ES927 – Controle de Sistemas Robóticos
Cinemática e Dinâmica de Robôs

Camino, J. F.

DPM / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 6 de março de 2015

Nota ao leitor

- Este material é baseado principalmente na referência:
  - M. W. Spong, S. Hutchinson and M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, John Wiley & Sons, 2006
- Livro texto suplementar:
  - J. J. Craig, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 3rd ed., Pearson Prentice Hall, 2005.
  - D. T. Greenwood. *Classical Dynamics*. Dover Publications, New York, 1997.

Representando posições

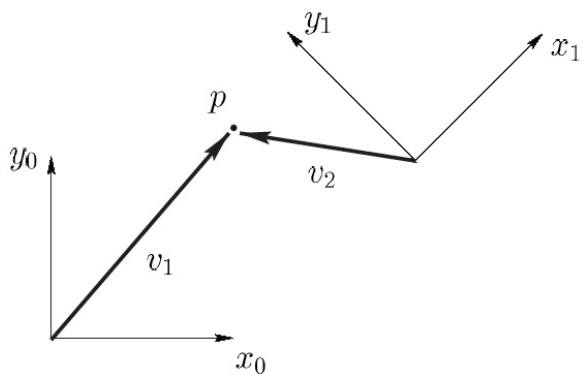


Figura: Dois referenciais, um ponto p, e dois vetores v_1 e v_2.

- Coordenada do ponto p no referencial $o_0x_0y_0$: $p^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$
- Coordenada do ponto p no referencial $o_1x_1y_1$: $p^1 = \begin{bmatrix} -2.89 \\ 4.2 \end{bmatrix}$
- Posição da origem de um sistema de coordenada com relação ao outro:

$$o_1^0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad o_0^1 = \begin{bmatrix} -10.6 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

- Os vetores v_1 e v_2 podem ser representados como segue:

$$v_1^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad v_1^1 = \begin{bmatrix} 7.77 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \qquad v_2^0 = \begin{bmatrix} -5.1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_2^1 = \begin{bmatrix} -2.89 \\ 4.2 \end{bmatrix}$$

Rotação no plano

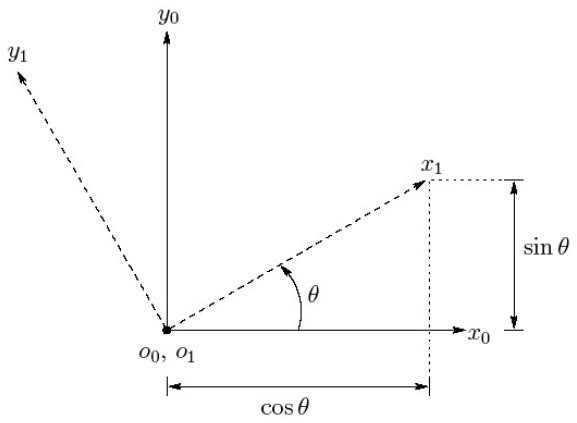


Figura: Sistema $o_1x_1y_1$ deslocado de θ com relação a $o_0x_0y_0$.

- A matriz de rotação é dada por $R_1^0 = [x_1^0 | y_1^0]$
- Com $x_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ e $y_1^0 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ temos $R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
- Por cossenos diretores:

$$x_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 \end{bmatrix}, \qquad y_1^0 = \begin{bmatrix} y_1 \cdot x_0 \\ y_1 \cdot y_0 \end{bmatrix}, \qquad R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 \end{bmatrix}$$

- É fácil mostrar que a matriz de rotação é ortogonal, ou seja, satisfaz: $R_0^1 = \left(R_1^0\right)^T = \left(R_1^0\right)^{-1}, \quad \det R_1^0 = \pm 1$
- O grupo "especial" ortogonal, com $\det R_1^0 = +1$, é denominado por $SO(n)$.

Rotação no R^3

- A matriz de rotação é dada por $R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 & z_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 & z_1 \cdot y_0 \\ x_1 \cdot z_0 & y_1 \cdot z_0 & z_1 \cdot z_0 \end{bmatrix}$

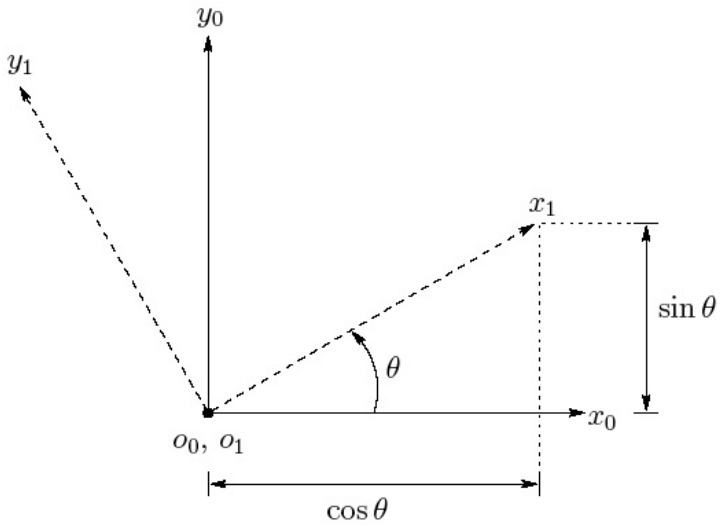


Figura: Rotação sobre z_0 de um ângulo θ.

- Matrizes de rotação:

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, R_{y,\theta} = \cdots$$

- Propriedades: $R_{z,0} = I, \quad R_{z,\theta} R_{z,\phi} = R_{z,\theta+\phi}, \quad \left(R_{z,\theta}\right)^{-1} = R_{z,-\theta}.$

Aplicação das matrizes de rotação

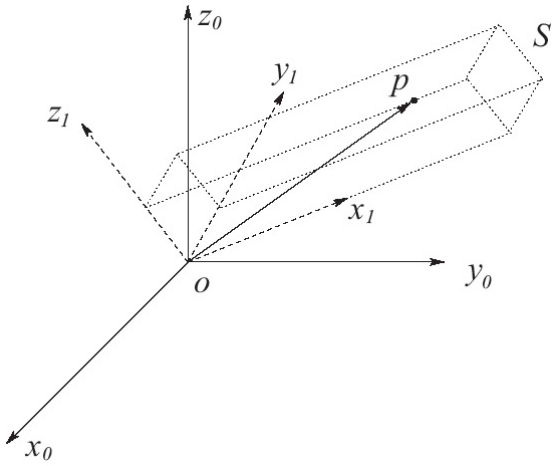


Figura: Referencial fixo a um corpo rígido.

- A coordenada $p^1 = [u, v, w]^T$ satisfaz $p = ux_1 + vy_1 + wz_1$
- A coordenada p^0 é dada por $p^0 = \begin{bmatrix} p \cdot x_o \\ p \cdot y_o \\ p \cdot z_o \end{bmatrix}$
- Combinando esses dois resultados temos:

$$p^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 & z_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 & z_1 \cdot y_0 \\ x_1 \cdot z_0 & y_1 \cdot z_0 & z_1 \cdot z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

- Portanto: $p^0 = R_1^0 p^1$

Aplicação das matrizes de rotação

- A matriz de rotação pode ser usada para representar um movimento de corpo rígido que corresponde a uma rotação pura.

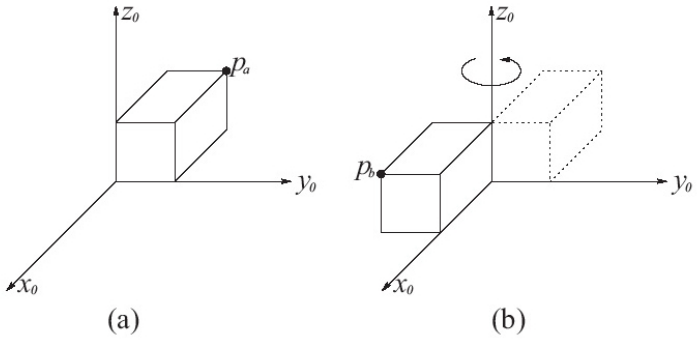


Figura: O bloco em (b) é obtido rotacionando o bloco em (a) por π em torno de z_0.

- Suponha que o referencial do bloco está fixo ao corpo rígido em (a), coincidindo com a coordenada $o_0 x_o y_o z_o$.
- Após a rotação π, a coordenada do referencial do bloco (denominada $o_1 x_1 y_1 z_1$) também rotacionou π.
- A matriz de rotação é dada por:

$$R_1^0 = R_{z,\pi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{Assim} \quad p_b^0 = R_{z,\pi} p_b^1$$

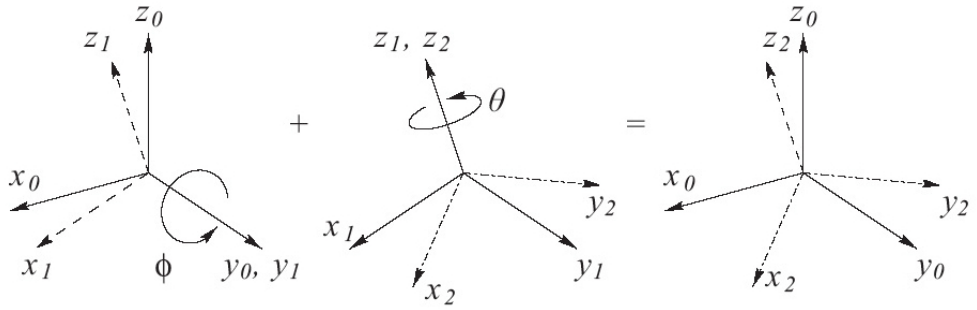
- Lembrando que, antes da rotação, p_b^1 é igual a p_a^0, temos $p_b^0 = R_{z,\pi} p_a^0$.

Composição de rotações

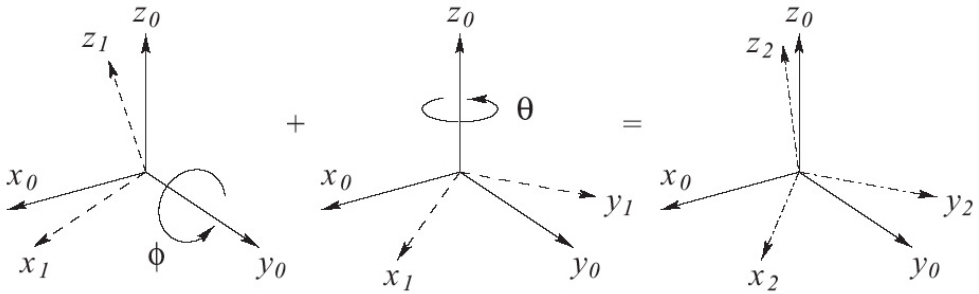
- Transformação de similaridade.
  - Se A é a matriz que representa uma dada transformação linear em $o_0x_0y_0z_0$ e B é a representação da mesma transformação em $o_1x_1y_1z_1$, então

$$B = \left(R_1^0\right)^{-1} A R_1^0$$

  com R_1^0 a transformação entre os referenciais $o_0x_0y_0z_0$ e $o_1x_1y_1z_1$.
- Rotação sobre o eixo corrente.



  - $R = R_{y,\phi} R_{z,\theta} \neq R_{z,\theta} R_{y,\phi}$
- Rotação sobre o eixo fixo.



  - $R = R_{y,\phi}\left[R_{y,-\phi} R_{z,\theta} R_{y,\phi}\right] = R_{z,\theta} R_{y,\phi}$

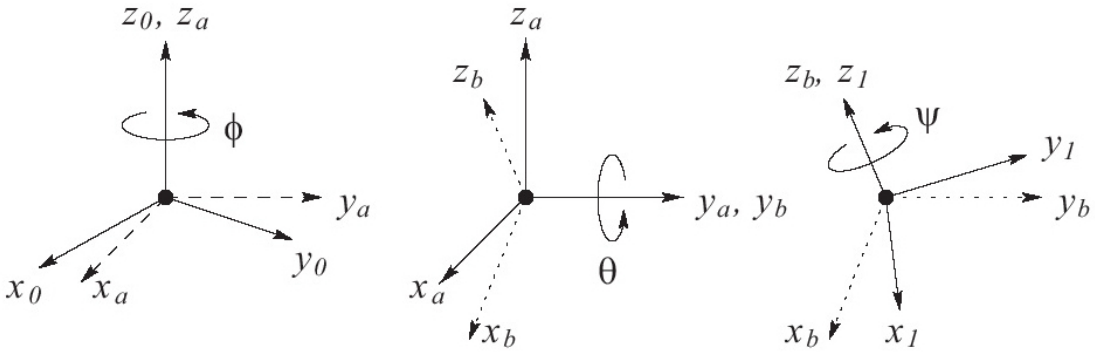
Parametrização das rotações

- Um corpo rígido possui apenas 3 graus de liberdade. Assim, os elementos de $R \in SO(3)$ possuem a seguinte restrição:

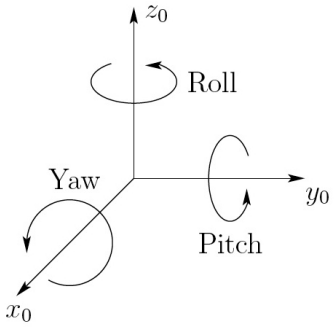
$$\sum_i r_{ij}^2 = 1, \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

$$r_{1i}r_{1j} + r_{2i}r_{2j} + r_{3i}r_{3j} = 0, \quad i \neq j$$

- Ângulos de Euler: matriz de rotação $R_{ZYZ} = R_{z,\phi}R_{y,\theta}R_{z,\psi}$



- Ângulos Tait-Bryan: Roll (balanceio), Pitch (empinamento), Yaw (cabeceio)



$$(\psi, x) + (\theta, y) + (\phi, z)$$

A matriz de rotação é dada por $R_{\phi\theta\psi} = R_{z,\phi}R_{y,\theta}R_{x,\psi}$

Movimento rígido

Movimento Rígido

Definição: Um movimento rígido é um par ordenado (d, R) onde $d \in R^3$ e $R \in SO(3)$. O grupo de todos os movimentos rígido é conhecido como o grupo Euclidiano Especial, denominado por $SE(3)$. Assim $SE(3) = R^3 \times SO(3)$.

- Combina uma translação pura com uma rotação pura.
- Seja R_1^0 a rotação entre $o_0x_0y_0z_0$ e $o_1x_1y_1z_1$. Seja d o vetor de $o_0x_0y_0z_0$ a $o_1x_1y_1z_1$. Suponha p fixo em $o_1x_1y_1z_1$ com coordenada p^1. Então:

$$p^0 = R_1^0 p^1 + d^0$$

- Agora, considere 3 referenciais: $o_0x_0y_0z_0$, $o_1x_1y_1z_1$ e $o_2x_2y_2z_2$. Seja d_1 de $o_0x_0y_0z_0$ a $o_1x_1y_1z_1$ e d_2 de $o_1x_1y_1z_1$ a $o_2x_2y_2z_2$. Suponha que o ponto p esteja fixo ao referencial $o_2x_2y_2z_2$ com coordenada p^2. Então:

$$\left.\begin{aligned} p^1 &= R_2^1 p^2 + d_2^1 \\ p^0 &= R_1^0 p^1 + d_1^0 \end{aligned}\right\} \rightarrow p^0 = R_1^0 R_2^1 p^2 + R_1^0 d_2^1 + d_1^0$$

- Como a relação entre p^0 e p^2 é um movimento rígido, temos: $p^0 = R_2^0 p^2 + d_2^0$
- Portanto: $R_2^0 = R_1^0 R_2^1$ e $d_2^0 = d_1^0 + R_1^0 d_2^1$.

Transformações homogêneas

- O cálculo anterior pode ser simplificado usando-se uma notação matricial.
- Para o exemplo anterior ($p^0 = R_1^0 R_2^1 p^2 + R_1^0 d_2^1 + d_1^0$):

$$\begin{bmatrix} R_1^0 & d_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2^1 & d_2^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^0 R_2^1 & R_1^0 d_2^1 + d_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  onde 0 denota o vetor linha $(0, 0, 0)$.

- Assim, o movimento rígido pode ser representado por um conjunto de matrizes da forma:

$$H = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R \in SO(3), \quad d \in R^3$$

- É fácil mostrar que: $H^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Para o primeiro exemplo ($p^0 = R_1^0 p^1 + d^0$) é necessário aumentar os vetores:

$$P^0 = \begin{bmatrix} p^0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P^1 = \begin{bmatrix} p^1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad P^0 = H_1^0 P^1$$

Parâmetros principais de um robô

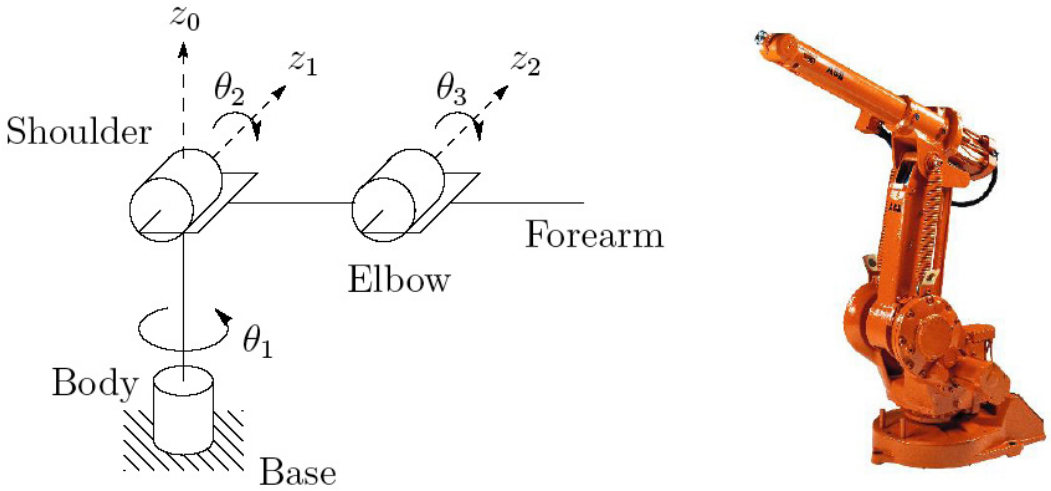


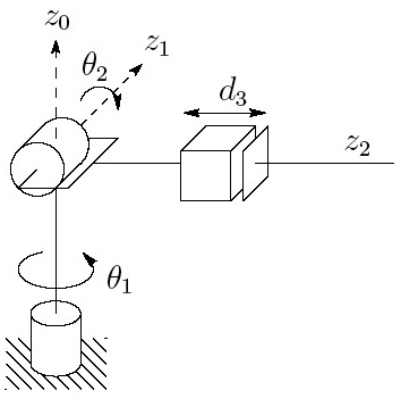
Figura: Robô com 6 GDL.

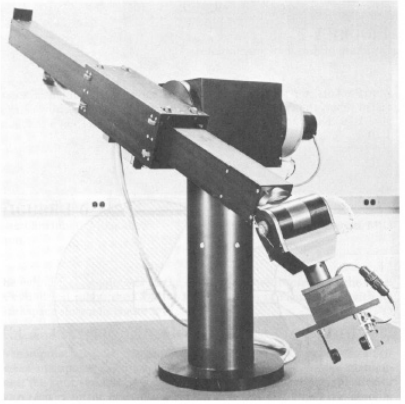
- Um robô manipulador é constituído de elos (links) conectados por juntas.
- Cada junta representa a conexão entre dois elos (links), considerados corpos rígidos.
- O número de juntas define o grau de liberdade do robô.
- As juntas podem ser: prismáticas ou de revolução.
- O punho é a junta que une o último elo ao efetuador final.

Cadeia cinemática

- Todas as juntas possuem apenas um único grau de liberdade.
- A ação da junta será representada por um ângulo ou por um deslocamento.
- Um manipulador com n juntas terá $n+1$ elos: cada junta conecta 2 elos.
- Juntas: numeradas de 1 a n. Elos: numerados de 0 a n (iniciando da base).
- Assim, a junta i conecta o elo $i-1$ ao elo i.
- A localização da junta i está fixada ao elo $i-1$.
- O elo 0 é fixo e não move.
- Associado à junta i temos a variável:

$$q_i = \begin{cases} \theta_i, & \text{se a junta } i \text{ for de revolução,} \\ d_i, & \text{se a junta } i \text{ for prismática.} \end{cases}$$





- Um sistema de coordenada $o_i x_i y_i z_i$ é ligado ao elo i.
- Quando a junta i é atuada, o elo i e o respectivo sistema de coordenada $o_i x_i y_i z_i$ movem.

Matriz de transformação homogênea

- Suponha que A_i é a matriz de transformação homogênea de $o_i x_i y_i z_i$ em relação a $o_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$. Note que A_i é uma função de q_i
- A matriz de transformação homogênea que expressa a posição e orientação de $o_j x_j y_j z_j$ com relação a $o_i x_i y_i z_i$ é denominada por T_j^i, dada por:

$$T_j^i = \begin{cases} A_{i+1} A_{i+2} \cdots A_{j-1} A_j & \text{se } i < j, \\ I & \text{se } i = j, \\ \left(T_i^j\right)^{-1} & \text{se } i > j. \end{cases}$$

- A posição de qualquer ponto do efetuador final é constante no referencial n.
- Denotamos a posição e a orientação do efetuador final com relação à base inercial por um vetor o_n^0 e uma matriz de rotação R_n^0. Portanto:

$$H = \begin{bmatrix} R_n^0 & o_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T_n^0 = A_1(q_1) \cdots A_n(q_n)$$

onde cada matriz A_i é dada por $\begin{bmatrix} R_i^{i-1} & o_i^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Se $i < j$, temos $T_j^i = A_{i+1} \cdots A_j = \begin{bmatrix} R_j^i & o_j^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $R_j^i = R_{i+1}^i \cdots R_j^{j-1}$.
- A coordenada do vetor o_j^i é dada recursivamente por $o_j^i = o_{j-1}^i + R_{j-1}^i o_j^{j-1}$.

A notação de Denavit-Hartenberg (DH)

- A matriz de transformação homogênea A_i é representada pelo produto:

$$A_i = \mathrm{Rot}_{\mathrm{z},\theta_\mathrm{i}}\mathrm{Trans}_{\mathrm{z},\mathrm{d_i}}\mathrm{Trans}_{\mathrm{x},\mathrm{a_i}}\mathrm{Rot}_{\mathrm{x},\alpha_\mathrm{i}}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

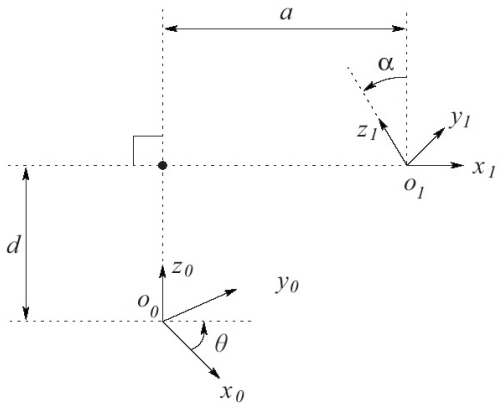
  onde $a_i, \theta_i, d_i, \alpha_i$ são parâmetros associados com o elo i e a junta i.

- Como a matriz A_i é função apenas de uma variável (θ_i ou d_i), os outros três parâmetros serão constantes.
- Note que uma matriz de transformação homogênea arbitrária é caracterizada por 6 parâmetros. No entanto, a notação de DH usa apenas 4 parâmetros.
- Hipóteses que levam a existência e unicidade desta matriz:

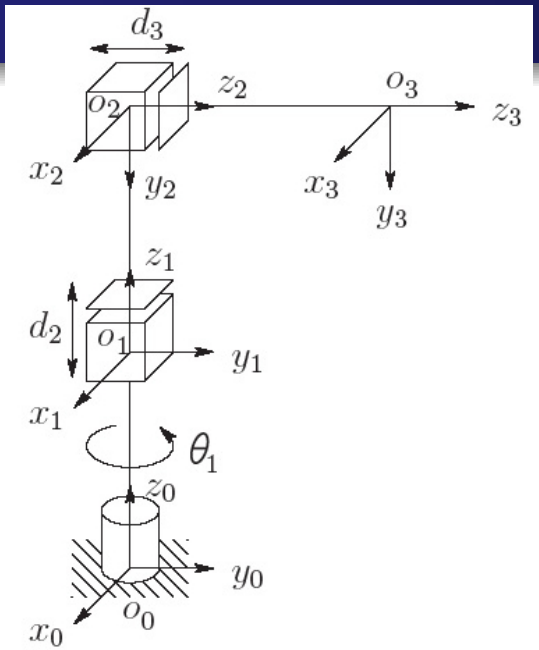
  (DH1) O eixo x_1 é perpendicular ao eixo z_0.

  (DH2) O eixo x_1 intercepta o eixo z_0.

  Note a orientação dos ângulos α_i, de z_{i-1} a z_i, e θ_i, de x_{i-1} a x_i.

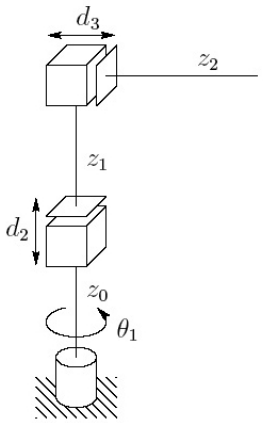


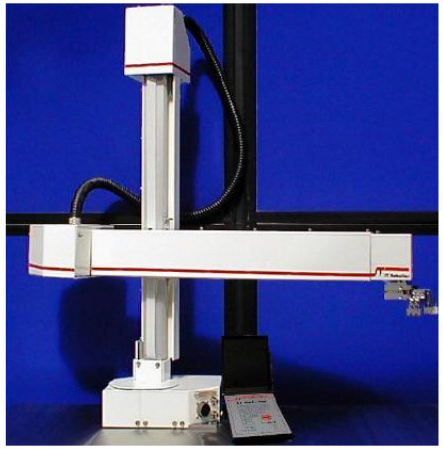
Exemplo: manipulador cilíndrico de três elos



- O referencial o_0 está na junta 1.
- Já que z_0 e z_1 coincidem, a origem de o_1 ficou na junta 1.
- O eixo x_1 é paralelo ao eixo x_0 quando $\theta_1 = 0$.
- A origem de o_2 está na interseção de z_2 e z_1.
- A direção de x_2 é escolhida paralela a x_1, assim $\theta_2 = 0$.
- A terceira coordenada é posicionada no final do elo 3.
- Tabela com os parâmetros de DH:

Elo	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1^*
2	0	-90	d_2^*	0
3	0	0	d_3^*	0





- As matrizes A e T são respectivamente:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática inversa

- A cinemática inversa consiste em determinar as variáveis da junta em termos da posição e orientação do efetuador final.
- O problema geral da cinemática inversa pode ser descrito como:

  Dada uma matriz de transformação homogênea $H = \begin{bmatrix} R & o \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$

  Determine a(s) solução(ões) da equação:

  $$T_n^0(q_1, \ldots, q_n) = H$$

  onde $T_n^0(q_1, \ldots, q_n) = A_1(q_1) \cdots A_n(q_n)$

  Equivalentemente, resolva o sistema composto por 12 equações não-lineares em n variáveis: $T_{ij}(q_1, \ldots, q_n) = h_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, \ldots, 4.$
- Encontrar uma solução em forma fechada:

  $$q_k = f_k(h_{11}, \ldots, h_{34}), \quad k = 1, \ldots, n$$

  é em geral bastante difícil.
- Soluções analíticas são preferíveis em lugar das numéricas por duas razões:
  1. o tempo computacional pode ser excessivo;
  2. pode existir múltiplas soluções.
- A questão prática de existência de soluções do problema inverso depende tanto de considerações matemáticas como de engenharia.
- Em alguns casos especiais, o problema pode ser bastante simplificado através do desacoplamento cinemático.

Matrizes anti-simétricas

- Uma matriz é anti-simétrica se e somente se

$$S^T + S = 0$$

- O conjunto das matrizes anti-simétricas 3×3 é denominado por $so(3)$.
- Os elementos s_{ij} de uma matriz $S \in so(3)$ satisfazem

$$s_{ij} + s_{ji} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

- Assim, uma matriz $S \in so(3)$ tem a forma

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Se $a = [a_x, a_y, a_z]^T$, definimos a matriz anti-simétrica $S(a)$ por

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades das matrizes anti-simétricas

1. O operador S é linear, ou seja,

$$S(\alpha a + \beta b) = \alpha S(a) + \beta S(b)$$

2. Para quaisquer vetores a e p no R^3,

$$S(a)p = a \times p$$

onde $a \times p$ denota o produto vetorial.

3. Para $R \in SO(3)$ e $a \in R^3$

$$RS(a)R^T = S(Ra)$$

A prova usa o fato que para $a, b \in R^3$

$$R(a \times b) = Ra \times Rb$$

Assim

$$\begin{aligned} RS(a)R^T b &= R(a \times R^T b) = (Ra) \times (RR^T b) \\ &= (Ra) \times b = S(Ra)b \end{aligned}$$

4. Para uma matriz $S \in so(3)$ e um vetor qualquer $x \in R^3$

$$x^T S x = 0$$

Derivada da matriz de rotação

- Suponha que $R = R(\theta) \in SO(3)$ para cada θ. Assim
$$R(\theta)R(\theta)^T = I$$
cuja derivada em relação a θ fornece
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}R(\theta)^T + R(\theta)\frac{\mathrm{d}R^T}{\mathrm{d}\theta} = 0$$
- Definindo
$$S = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}R(\theta)^T$$
temos: $\quad S + S^T = 0$
- Multiplicando à direita esta equação por R temos
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = SR(\theta)$$
- Exemplo. Seja $i = [1, 0, 0]$. Se $R = R_{x,\theta}$, então $S = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}R^T$ é dada por
$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = S(i)$$
- Portanto: $\frac{\mathrm{d}R_{x,\theta}}{\mathrm{d}\theta} = S(i)R_{x,\theta}$, $\frac{\mathrm{d}R_{y,\theta}}{\mathrm{d}\theta} = S(j)R_{y,\theta}$ e $\frac{\mathrm{d}R_{z,\theta}}{\mathrm{d}\theta} = S(k)R_{z,\theta}$.

Velocidade angular (eixo fixo)

- Quando um corpo rígido está sujeito a uma rotação pura em torno de um eixo fixo, cada ponto do corpo descreve um círculo cujo centro está sobre o eixo de rotação e cujo plano é perpendicular ao eixo.
- À medida que o corpo rotaciona, uma linha perpendicular de um ponto qualquer do corpo ao eixo de rotação sofre uma rotação θ.
- Se k é um vetor unitário na direção do eixo de rotação, então:

$$\omega = \dot{\theta} k$$

- A velocidade linear de um ponto q do corpo é dada por

$$v = \omega \times r$$

  onde r é um vetor partindo da origem (no eixo de rotação) ao ponto q.
- Para este caso particular de rotação pura sobre um eixo fixo, a cinemática limita-se a um movimento planar.

Velocidade angular (caso geral)

- Assumindo-se que $R(t)$ é continuamente diferenciável pode-se mostrar que

$$\dot{R} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = S(\omega(t))R(t)$$

onde o vetor $\omega(t)$ representa a velocidade angular do referencial móvel em relação ao referencial fixo.

- Exemplo: Considere um ponto p fixo no referencial móvel com coordenada $p^0 = R_1^0 p^1$. Diferenciando essa expressão temos

$$\frac{\mathrm{d}p^0}{\mathrm{d}t} = \dot{R}_1^0 p^1 = S(\omega) R_1^0 p^1 = \omega \times R_1^0 p^1 = \omega \times p^0$$

que mostra que ω é de fato o vetor velocidade angular.

- Exemplo: Suponha que $R(t) = R_{x,\theta(t)}$. Então

$$\dot{R} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta} S(i) R(t) = S(\omega(t))R(t)$$

onde $\omega = i\dot{\theta}$ é a velocidade angular.

Adição de velocidades angulares

- Considere três sistemas de coordenas $o_0x_0y_0z_0$, $o_1x_1y_1z_1$ e $o_2x_2y_2z_2$ tendo a mesma origem.
- Suponha que as orientações relativas dos sistemas $o_1x_1y_1z_1$ e $o_2x_2y_2z_2$ sejam respectivamente $R_1^0(t)$ e $R_2^1(t)$.
- Notação: o termo $\omega_{i,j}^k$ denota o vetor de velocidade angular correspondente à derivada de R_j^i expresso no referencial k.
- Lembrando que $R_2^0(t) = R_1^0(t)R_2^1(t)$. A sua derivada fornece

$$\dot{R}_2^0 = \dot{R}_1^0 R_2^1 + R_1^0 \dot{R}_2^1$$

- Note que o termo $\dot{R}_2^0$ pode ser escrito como

$$\dot{R}_2^0 = S(\omega_{0,2}^0)R_2^0$$

onde $\omega_{0,2}^0$ é a velocidade angular total to referencial $o_2x_2y_2z_2$. Esta velocidade é um resultado das rotações combinadas expressas por R_1^0 e R_2^1.

- O termo $\dot{R}_1^0 R_2^1$ é simplesmente

$$\dot{R}_1^0 R_2^1 = S(\omega_{0,1}^0)R_1^0 R_2^1 = S(\omega_{0,1}^0)R_2^0$$

onde $\omega_{0,1}^0$ é a velocidade angular do referencial $o_1x_1y_1z_1$ (relativa ao referencial $o_0x_0y_0z_0$) resultante da variação de R_1^0.

Adição de velocidades angulares

- Usando a propriedade $RS(a)R^T = S(Ra)$, o termo $R_1^0\dot{R}_2^1$ fornece

$$\begin{aligned} R_1^0\dot{R}_2^1 &= R_1^0 S(\omega_{1,2}^1)R_2^1 = R_1^0 S(\omega_{1,2}^1)(R_1^0)^T R_1^0 R_2^1 \\ &= S(R_1^0\omega_{1,2}^1)R_1^0 R_2^1 = S(R_1^0\omega_{1,2}^1)R_2^0 \end{aligned}$$

  onde $\omega_{1,2}^1$ representa a velocidade angular do referencial $o_2x_2y_2z_2$ resultante da variação de R_2^1 (expresso no sistema de coordenada $o_1x_1y_1z_1$).

- Combinando os resultados acima, obtemos a expressão

$$S(\omega_{0,2}^0)R_2^0 = \left\{S(\omega_{0,1}^0) + S(R_1^0\omega_{1,2}^1)\right\}R_2^0$$

- Como $S(a) + S(b) = S(a+b)$, percebemos que

$$\omega_{0,2}^0 = \omega_{0,1}^0 + R_1^0\omega_{1,2}^1$$

  Velocidades angulares podem ser somadas sempre que no mesmo referencial.

- A idéia pode ser estendida facilmente para n referenciais: seja $R_n^0 = R_1^0 R_2^1 \cdots R_n^{n-1}$. Então

$$\dot{R}_n^0 = S(\omega_{0,n}^0)R_n^0$$

  onde

$$\begin{aligned} \omega_{0,n}^0 &= \omega_{0,1}^0 + R_1^0\omega_{1,2}^1 + R_2^0\omega_{2,3}^2 + \cdots + R_n^0\omega_{n-1,n}^{n-1} \\ &= \omega_{0,1}^0 + \omega_{1,2}^0 + \cdots + \omega_{n-1,n}^0 \end{aligned}$$

Velocidade linear de um ponto fixo a um referencial móvel

- Suponha que o ponto p esteja fixo ao referencial $o_1x_1y_1z_1$ que rotaciona em relação ao referencial $o_ox_oy_oz_o$.
- A coordenada do ponto p com relação a $o_ox_oy_oz_o$ é $p^0 = R_1^0(t)p^1$
- A velocidade $\dot{p}^0$ é dada por

$$\begin{aligned}\dot{p}^0 &= \dot{R}_1^0(t)p^1 + R_1^0(t)\dot{p}^1 \\ &= S(\omega^0)R_1^0(t)p^1 \\ &= S(\omega^0)p^0 = \omega^0 \times p^0\end{aligned}$$

  onde assumimos $\dot{p}^1 = 0$ (rigidamente fixo ao referencial $o_1x_1y_1z_1$).
- Suponha o caso mais geral: $H_1^0(t) = \begin{bmatrix} R_1^0(t) & o_1^0(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

  onde $p^0 = R_1^0(t)p^1 + o_1^0$.
- Derivando esta expressão, temos:

$$\begin{aligned}\dot{p}^0 &= \dot{R}p^1 + \dot{o} \\ &= S(\omega)Rp^1 + \dot{o} \\ &= \omega \times r + v\end{aligned}$$

  onde $r = Rp^1$ e v é a velocidade com que a origem o_1 se move.
- Se p se move em relação a $o_1x_1y_1z_1$, precisamos adicionar $R(t)\dot{p}^1$.

Matriz Jacobiana

- Considere um manipulador com variáveis de juntas $q = [q_1, \ldots, q_n]$.
- Seja a transformação do referencial do efetuador final à base fixa:

$$T_n^0(q) = \begin{bmatrix} R_n^0(q) & o_n^0(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Para determinar a matriz Jacobiana, é necessário relacionar as velocidades lineares e angulares do efetuador com as velocidades da junta $\dot{q}$.
- As velocidade lineares e angulares do efetuador final são dadas por:

$$v_n^0 = \dot{o}_n^0$$
$$S(\omega_n^0) = \dot{R}_n^0 (R_n^0)^T$$

- O objetivo é determinar uma expressão na forma:

$$v_n^0 = J_v \dot{q}$$
$$\omega_n^0 = J_\omega \dot{q}$$

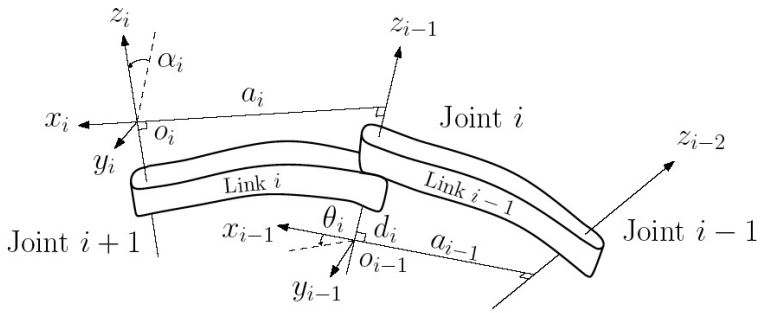
- Ou na forma compacta com $\xi = (v_n^0, \omega_n^0)$ e $J = (J_v, J_\omega)$:

$$\xi = J\dot{q}$$

Velocidade angular

- Se a junta i for prismática, então $q_i = d_i$ (constante) e $\omega_i^{i-1} = 0$.
- Se a junta i é de revolução, então $q_i = \theta_i$ e o eixo de rotação é z_{i-1}.
- Seja ω_i^{i-1} a velocidade angular do elo i (proveniente da rotação da junta i), expressa em relação ao referencial $o_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$, dada por

$$\omega_i^{i-1} = \dot{q}_i z_{i-1}^{i-1} = \dot{q}_i k, \qquad k = [0, 0, 1]^T$$



- Portanto, lembrando que velocidades angulares na mesma base podem ser somadas, a velocidade angular do efetuador ω_n^0 é dada por

$$\omega_n^0 = \rho_1 \dot{q}_1 k + \rho_2 \dot{q}_2 R_1^0 k + \cdots + \rho_n \dot{q}_n R_{n-1}^0 k = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \dot{q}_i z_{i-1}^0$$

onde:

1. ρ_i é 1 para juntas rotacionais e 0 para juntas prismáticas.
2. o vetor z_{i-1}^0 é dada por $z_{i-1}^0 = R_{i-1}^0 k$
3. o vetor $z_0^0 = k = [0, 0, 1]^T$.

- Assim, a parte J_ω da matriz Jacobiana J é dada por

$$J_\omega = [\rho_1 z_0 \cdots \rho_n z_{n-1}]$$

Velocidade Linear

- A velocidade linear do efetuador final $\dot{o}_n^0$ é dada por

$$\dot{o}_n^0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial o_n^0}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

- Assim, a i-éssima coluna J_{v_i} da matriz J_v é dada por

$$J_{v_i} = \frac{\partial o_n^0}{\partial q_i}$$

- Percebe-se que esta expressão é justamente a velocidade linear do efetuador que resultaria se $\dot{q}_i = 1$ e $\dot{q}_j = 0$.
- Portanto, a i-éssima coluna do Jacobiano pode ser gerada atuando a junta i com uma velocidade unitária e mantendo todas as outras fixas.
- Possibilita calcular de forma simples e independente o Jacobiano para cada de tipo de junta: prismática ou de revolução.

Caso 1: juntas prismáticas

- Nesta figura, todas as juntas estão imóveis exceto a prismática i.

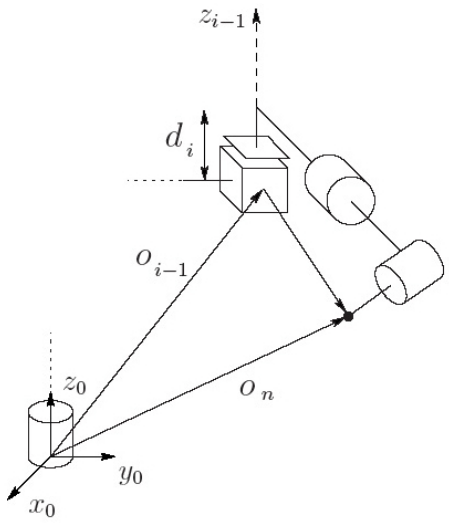


Figura: Movimento do efetuador devido a junta prismática i.

- Como a junta é prismática, o efetuador sofrerá uma translação pura $q_i = d_i$.
- A direção da translação é paralela ao eixo z_{i-1} e a magnitude é $\dot{d}_i$. Assim

$$\dot{o}_n^0 = \dot{d}_i R_{i-1}^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \dot{d}_i z_{i-1}^0$$

- As colunas da matriz Jacobiana é dada por

$$J_{v_i} = z_{i-1}$$

Caso 2: juntas de revolução

- Nesta figura, todas as juntas estão imóveis exceto a de revolução i.

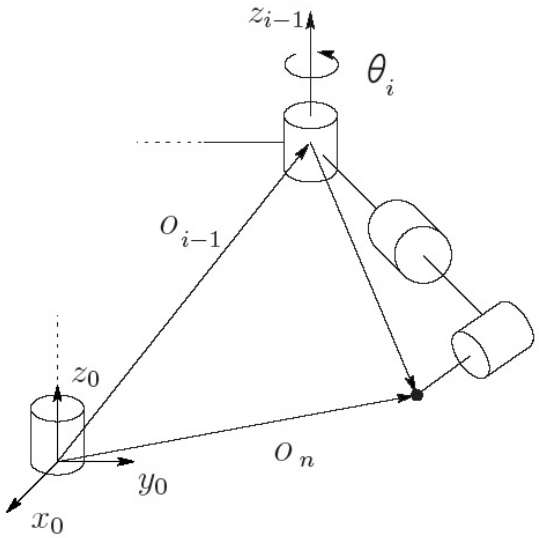


Figura: Movimento do efetuador devido a junta de revolução i.

- Como a junta é de revolução, o efetuador sofrerá uma rotação pura $q_i = \theta_i$.
- Assim, percebe-se que a velocidade linear do efetuador é $\omega \times r$, onde

$$\omega = \dot{\theta}_i z_{i-1}, \qquad r = o_n - o_{i-1}$$

- Expressando as coordenadas relativas à base fixa, chegamos a:

$$J_{v_i} = z_{i-1} \times (o_n - o_{i-1})$$

Combinando as velocidades lineares e angulares

- Usando os resultados apresentados anteriormente, a matriz Jacobiana J_v é

$$J_v = [J_{v_1} \cdots J_{v_n}]$$

onde a i-éssima coluna J_{v_i} é dada por

$$J_{v_i} = \begin{cases} z_{i-1} \times (o_n - o_{i-1}) & \text{se a junta } i \text{ for de revolução} \\ z_{i-1} & \text{se a junta } i \text{ for prismática} \end{cases}$$

- A matriz Jacobiana J_ω fica sendo

$$J_\omega = [J_{\omega_1} \cdots J_{\omega_n}]$$

onde a i-éssima coluna J_{ω_i} é dada por

$$J_{\omega_i} = \begin{cases} z_{i-1} & \text{se a junta } i \text{ for de revolução} \\ 0 & \text{se a junta } i \text{ for prismática} \end{cases}$$

- As únicas quantidades necessárias para o cálculo do Jacobiano são os vetores unitários z_i e as coordenadas das origens $o_1, \ldots, o_n$.
- Essas quantidades são facilmente obtidas da matriz de transformação T_i^0.

Exemplo: manipulador planar de dois elos

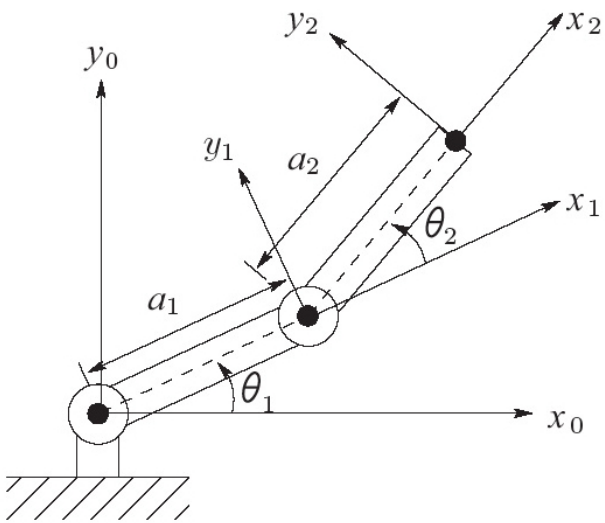
- O referencial o_0 está na junta 1. Os eixos z_o e z_1 são normais à pagina.
- O referencial $o_1x_1y_1z_1$ segue a notação de Denavit-Hartenberg.
- Tabela com os parâmetros de DH:

Elo	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1^*
2	a_2	0	0	θ_2^*

- As matrizes A e T são respectivamente:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^0 = A_1, \quad T_2^0 = A_1A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- A matriz Jacobiana é dada por

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 \times (o_2 - o_0) & z_1 \times (o_2 - o_1) \\ z_0 & z_1 \end{bmatrix}$$

onde $z_0 = z_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$,

$$o_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, o_1 = \begin{bmatrix} a_1c_1 \\ a_1s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, o_2 = \begin{bmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} & -a_2s_{12} \\ a_1c_1 + a_2c_{12} & a_2c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

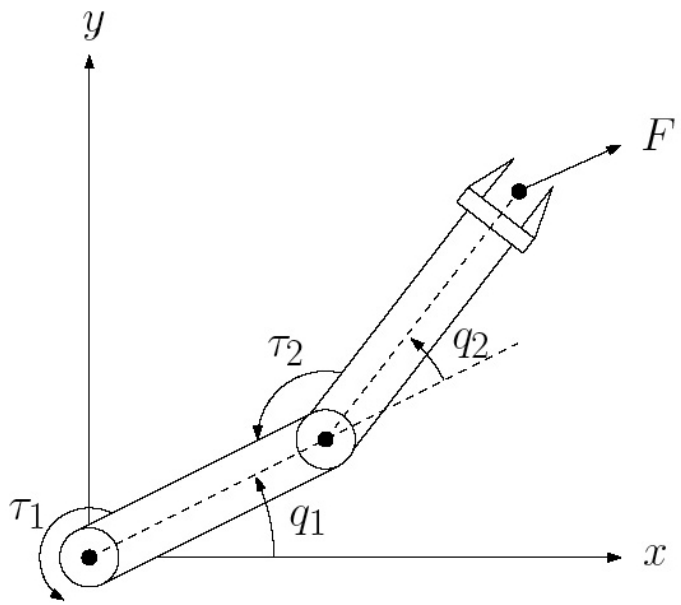
Relações de forças/torques estáticos

- Forças aplicadas no efetuador produzem torques nas juntas de revolução.
- Seja $F = [F_x, F_y, F_z, n_x, n_y, n_z]^T$ o vetor de forças e momentos no efetuador.
- Seja τ o vetor correspondente de torques na junta.
- Então, as variáveis F e τ estão linearmente relacionadas por

$$\tau = J^T(q)F$$

- Por exemplo, para o manipulador planar de 2 elos,

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$



Velocidades e acelerações inversas

- Vimos que as velocidades do efetuador e das juntas estão relacionadas por

$$\xi = J\dot{q}, \qquad J \in R^{6\times n}$$

- Quando a matriz Jacobiana é quadrada e não-singular, temos

$$\dot{q} = J^{-1}\xi$$

- Para manipuladores que não possuem exatamente $n = 6$ juntas, o Jacobiano não é inversível.
- Neste caso, haverá uma solução se e somente se ξ pertencer à imagem de J.
- Um vetor ξ pertence à imagem de J se e somente se

$$\text{posto}[J(q)] = \text{posto}[J(q) \mid \xi]$$

- Quando $n > 6$, a solução pode ser obtida usando-se a pseudo-inversa de J.
- Para $J \in R^{m\times n}$ com $m < n$ e $\text{posto}[J] = m$, temos $|JJ^T| \neq 0$ e

$$I = (JJ^T)(JJ^T)^{-1} = J[J^T(JJ^T)^{-1}] = JJ^+$$

  onde $J^+ = J^T(JJ^T)^{-1}$ é a pseudo-inversa (à direita) da matriz J.
- Portanto a solução fica sendo

$$\dot{q} = J^+\xi + (I - J^+J)b$$

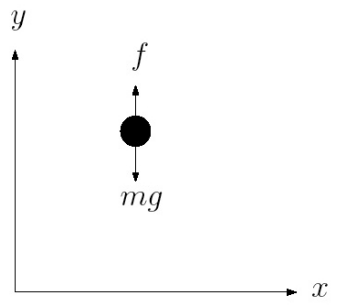
  onde b é um vetor qualquer arbitrário.

Velocidades e acelerações inversas

- Em geral, quando $m < n$, o termo $(I - J^+J) \neq 0$ e todos os vetores da forma $(I - J^+J)b$ pertencem ao espaço nulo de J.
- Se $\dot{\hat{q}}$ é a velocidade das juntas tal que $\dot{\hat{q}} = (I - J^+J)b$, então quando a junta se move com velocidade $\dot{\hat{q}}$, o efetuador permanece imóvel pois $J\dot{\hat{q}} = 0$.
- Assim, se $\dot{q}$ é uma solução, então $\dot{q} + \dot{\hat{q}}$, com $\dot{\hat{q}} = (I - J^+J)b$, para qualquer b, também será uma solução.
- A pseudo-inversa de J pode ser calculada usando-se a decomposição em valores singulares:
$$J = U\Sigma V^T$$
com $U \in R^{m\times m}$ e $V \in R^{n\times n}$ matrizes ortogonais e $\Sigma \in R^{m\times n}$ dada por
$$\Sigma = \left[\begin{array}{cccc|c} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \sigma_2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \sigma_m & 0 \end{array}\right]$$
onde σ_i são os valores singulares.
- A pseudo-inversa (à direita) é dada por $J^+ = V\Sigma^+U^T$, onde
$$\Sigma^+ = \left[\begin{array}{cccc|c} \sigma_1^{-1} & & & & 0 \\ & \sigma_2^{-1} & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \sigma_m^{-1} & 0 \end{array}\right]^T \tag{1}$$

Equação de Euler-Lagrange
Motivação

- Para uma motivação da derivação das equações de Euler-Lagrange, considere a figura abaixo onde uma massa m está sujeita a ação da gravidade.



- Pela lei de Newton, temos

$$m\ddot{y} = f - mg$$

- Podemos ainda reescrever $m\ddot{y}$ como segue

$$m\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}m\dot{y}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{y}}\right)$$

com $\mathcal{K} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$ a energia cinética do sistema.

- De forma similar, para a força da gravidade, temos

$$mg = \frac{\partial}{\partial y}mgy = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y}$$

onde $\mathcal{P} = mgy$ é a energia potencial devido a ação da gravidade.

Equação de Euler-Lagrange
Motivação

- Definindo o Lagrangiano $\mathcal{L}$ como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$$

- Percebendo que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{y}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y}, \qquad m\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{y}}\right), \qquad mg = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y}$$

- Podemos reescrever $m\ddot{y} + mg = f$ na forma de "Euler-Lagrange":

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f$$

- Para o caso geral, temos

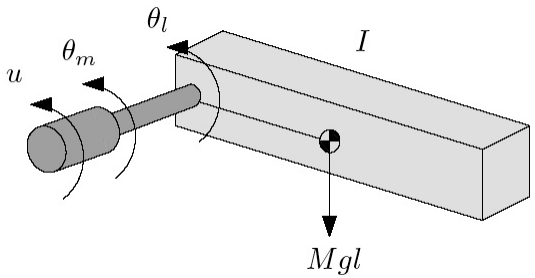
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \mathcal{Q}_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

onde $\mathcal{Q}_k$ são forças generalizadas associadas às coordenadas generalizadas q_k.

Equação de Euler-Lagrange

Exemplo de um sistema de 1 GL

- Exemplo: os deslocamentos do elo e do motor são respectivamente θ_l e θ_m.



- Assumindo uma relação de transmissão r, temos $\theta_m = r\theta_l$. Assim, o sistema possui apenas um grau de liberdade.
- Em termos de θ_l, a energia cinética é dada por

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}J_l\dot{\theta}_l^2 = \frac{1}{2}(J_m r^2 + J_l)\dot{\theta}_l^2$$

onde J_m e J_l são os momentos de inércia do motor e do elo respectivamente.

- A energia potencial é dada por

$$\mathcal{P} = Mgl(1 - \cos(\theta_l))$$

- Definindo $J = r^2 J_m + J_l$, o Lagrangiano é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}J\dot{\theta_l}^2 - Mgl(1 - \cos(\theta_l))$$

Equação de Euler-Lagrange

Exemplo de um sistema de 1 GL

- Substituindo o Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}_l^{\,2} - Mgl(1 - \cos(\theta_l))$$

na expressão de Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_l} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_l} = \tau_l$$

obtemos

$$J\ddot{\theta}_l + Mgl \sin(\theta_l) = \tau_l$$

- Para este caso, o torque externo τ_l consiste:
  - do torque do motor $u = r\tau_m$;
  - dos torques devidos ao amortecimento (forças generalizadas não conservativas) dados por $B_m \dot{\theta}_m$ e $B_l \dot{\theta}_l$.
- Assim, o torque externo τ_l é

$$\tau_l = u - B\dot{\theta}_l, \qquad B = rB_m + B_l$$

- Portanto, a expressão para a equação de movimento do sistema é

$$J\ddot{\theta}_l + B\dot{\theta}_l + Mgl \sin(\theta_l) = u$$

Energia cinética e potencial

- A energia cinética de um corpo rígido consiste das energias cinéticas de rotação e de translação.

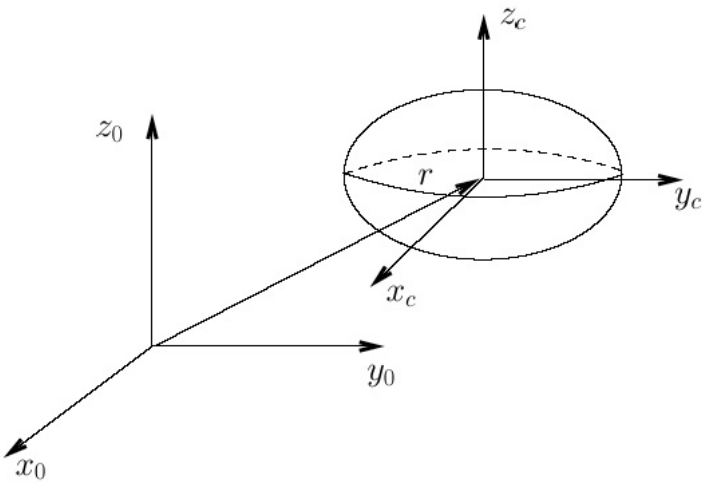


Figura: Corpo rígido com seis graus de liberdade.

- Para o corpo rígio acima, a energia cinética é portanto

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m v^T v + \frac{1}{2} \omega^T \mathcal{I} \omega$$

onde m é a massa total do corpo, v e ω são respectivamente os vetores de velocidade linear e angular, e $\mathcal{I}$ é o tensor de inércia de dimensão 3×3.

- As quantidades acima são calculadas com relação ao centro de massa.

Energia cinética e potencial

Tensor de inércia

- Se v e ω estiverem descritos no referencial inercial, sabemos que ω é obtido de

$$S(\omega) = \dot{R}R^T$$

onde $S(\omega)$ é anti-simétrica e R é a transformação entre o referencial local e o inercial.

- Para calcular $\omega^T \mathcal{I} \omega$ é necessário descrever $\mathcal{I}$ no referencial inercial.
- Portanto, se I é o tensor de inércia no referencial local, temos que

$$\mathcal{I} = RIR^T$$

- O tensor de inércia I depende da densidade de massa $\rho(x, y, z)$ e da geometria:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

com

$$I_{xx} = \iiint (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad I_{xy} = I_{yx} = \iiint xy\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$I_{yy} = \iiint (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad I_{xz} = I_{zx} = \iiint xz\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$I_{zz} = \iiint (y^2 + x^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \qquad I_{zy} = I_{yz} = \iiint zy\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Energia cinética e potencial

Tensor de inércia

- Exemplo. Considere o sólido retangular apresentado na figura abaixo de comprimento a, largura b e altura c. Suponha que sua densidade de massa $\rho(x, y, z)$ seja constante.

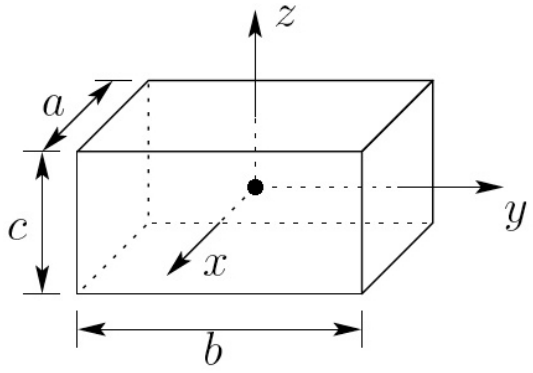


Figura: Sólido retangular de densidade de massa uniforme.

- Como o referencial local está fixado no centro geométrico do corpo, então, por simetria, todos os produtos de inércia cruzados são zeros.

- Os momentos de inércia principais são dados por

$$I_{xx} = \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho\frac{abc}{12}(b^2+c^2) = \frac{m}{12}(b^2+c^2)$$

$$I_{yy} = \frac{m}{12}(a^2+c^2), \qquad I_{zz} = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$$

Energia cinética e potencial

Energia cinética para um robô de n-elos

- Vimos que as velocidades lineares e angulares de qualquer ponto do elo podem ser descritas usando-se a matriz jacobiana

$$v_i = J_{v_i}(q)\dot{q}, \qquad \omega_i = J_{\omega_i}(q)\dot{q}$$

- Assuma que para o elo i a massa seja m_i e que a matriz de inercia, calculada num referencial paralelo ao referencial i, com origem no centro de massa, seja I_i.
- Então a energia cinética total $\mathcal{K}$, do robô de n-elos, é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2}\omega_i^T \mathcal{I}_i \omega_i \\
&= \frac{1}{2}\dot{q}^T \left[\sum_{i=1}^{n} m_i J_{v_i}(q)^T J_{v_i}(q) + J_{\omega_i}(q)^T R_i(q) I_i R_i(q)^T J_{\omega_i}(q)\right]\dot{q} \\
&= \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q}
\end{aligned}$$

com a matriz de inércia $D(q)$, simétrica e positiva definida, dada por

$$D(q) = \sum_{i=1}^{n} m_i J_{v_i}(q)^T J_{v_i}(q) + J_{\omega_i}(q)^T R_i(q) I_i R_i(q)^T J_{\omega_i}(q)$$

Energia cinética e potencial

Energia potencial para um robô de n-elos

- A energia potencial do elo i pode ser calculada assumindo-se que a massa inteira do objeto está concentrada no seu centro de massa:

$$P_i = -m_i g^T r_{ci} + p_{r_i}$$

onde g e r_{ci} são, respectivamente, a direção da gravidade e a coordenada do centro de massa, medidos no referencial inercial. A constante p_{r_i} pode ser escolhida de forma que o valor mínimo de P_i seja zero.

- Como a dinâmica depende apenas da derivada parcial de P_i com relação a q, a constante p_{r_i} é arbitrária, podendo ser escolhida zero.
- A energia potencial total $P(q)$ do robô com n-elos é portanto

$$P(q) = \sum_{i=1}^{n} P_i = -\sum_{i=1}^{n} m_i g^T r_{ci} + p_{r_i}$$

- O Lagrangiano passa a ser

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - P = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} - P(q) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} d_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - P(q)$$

- Para aplicar a equação de Euler-Lagrange, é necessário conhecer os termos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

Equação de Movimento

- Equação de movimento de Euler-Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \tau_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

com τ_k o torque externo aplicado.

- Calculando as derivadas parciais, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} &= \sum_j d_{kj}\dot{q}_j \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) &= \sum_j d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} d_{kj}\dot{q}_j \\
&= \sum_j d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial P}{\partial q_k}
\end{aligned}$$

- Portanto, para cada $k = 1, \ldots, n$, a equação de Euler-Lagrange é

$$\sum_j d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{i,j}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial P}{\partial q_k} = \tau_k$$

Equação de Movimento

Formula geral sempre que $\mathcal{K} = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q}$ e P não depender de $\dot{q}$

- A equação de Euler-Lagrange abaixo pode ser rescrita numa forma mais clássica.

$$\sum_j d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{i,j}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k = \tau_k, \qquad g_k = \frac{\partial P}{\partial q_k}$$

- Alterando a ordem da adição e usando a simetria, pode se mostrar que

$$\sum_{i,j}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

$$\sum_{i,j}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{i,j}\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{i,j} c_{ijk}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

onde $c_{ijk} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right\}$ são os símbolos de Christoffel. Portanto

$$\sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k(q) = \tau_k, \qquad k = 1, \ldots, n$$

- Na forma matricial temos

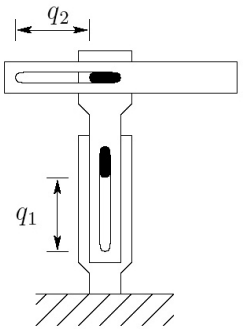
$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

com $g(q) = [g_1(q), \ldots, g_n(q)]^T$ e $c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} c_{ijk}(q)\dot{q}_i$ os elementos de $C(q,\dot{q})$.

Equação de Movimento

Manipulador cartesiano de dois-elos

- Considere o manipulador Cartesiano planar de dois-elos da figura abaixo, com massas m_1 e m_2 e deslocamento prismático das juntas q_1 e q_2.



- Nitidamente, a energia cinética tem a forma $\dot{q}^T D(q)\dot{q}$ e a potencial é independe de $\dot{q}$.
- A velocidade do centro de massa do elo 1 é dada por

$$v_{c1} = J_{v_{c1}}\dot{q}, \qquad \text{com} \qquad J_{v_{c1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

- A velocidade do centro de massa do elo 2 é dada por

$$v_{c2} = J_{v_{c2}}\dot{q}, \qquad \text{com} \qquad J_{v_{c2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Equação de Movimento

Manipulador cartesiano de dois-elos

- A energia cinética é dada por

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\dot{q}^T \left\{ m_1 J_{v_{c1}}^T J_{v_{c1}} + m_2 J_{v_{c2}}^T J_{v_{c2}} \right\} \dot{q} = \frac{1}{2}\dot{q}^T D \dot{q}$$

com a matriz D dada por

$$D = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

- A energia potencial dos elos 1 e 2 são $P_1 = m_1 g q_1$ e $P_2 = m_2 g q_1$. Portanto

$$P = g(m_1 + m_2)q_1, \qquad g_1 = \frac{\partial P}{\partial q_1} = g(m_1 + m_2), \qquad g_2 = \frac{\partial P}{\partial q_2} = 0$$

- Como a matriz de inércia é constante, todos os símbolos de Christoffel são zero.
- Substituindo os valores acima na seguinte equação de movimento

$$\sum_{j=1}^{n} d_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ijk}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k(q) = \tau_k, \qquad k = 1, \ldots, n$$

obtemos

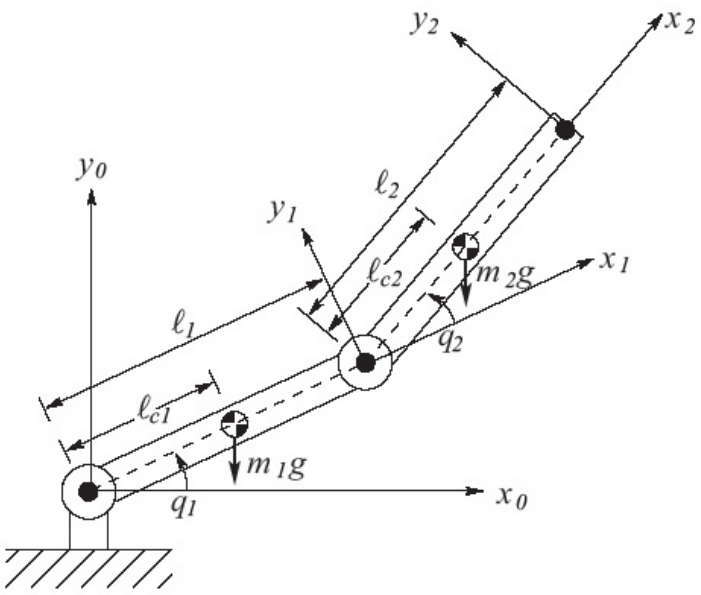
$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + g(m_1 + m_2) &= f_1 \\ m_2\ddot{q}_2 &= f_2 \end{aligned}$$

onde f_1 e f_2 são as forças atuantes nas juntas.

Equação de Movimento

Manipulador planar de revolução

- Considere o manipulador planar de revolução da figura abaixo, com massas m_1 e m_2 e deslocamento angulares das juntas q_1 e q_2.



- O comprimento do elo i é l_i e a distância do centro de massa do elo i à junta anterior é l_{ci}. O momento de inércia do elo i com relação a um eixo saindo da página passando no centro de massa do elo i é representado por I_i.
- Para esta configuração, o movimento de rotação da juntas gera um acoplamento dinâmico entre as juntas.

Equação de Movimento

Manipulador planar de revolução

- As velocidades lineares v_{c1} e v_{c2} são respectivamente dados por

$$v_{c1} = J_{v_{c1}}\dot{q}, \qquad J_{v_{c1}} = \begin{bmatrix} -l_{c1}\sin q_1 & 0 \\ l_{c1}\cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{c2} = J_{v_{c2}}\dot{q}, \qquad J_{v_{c2}} = \begin{bmatrix} -l_1\sin q_1 - l_{c2}\sin(q_1+q_2) & -l_{c2}\sin(q_1+q_2) \\ l_1\cos q_1 + l_{c2}\cos(q_1+q_2) & l_{c2}\cos(q_1+q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Portanto, a energia cinética de translação é dada por

$$\frac{1}{2}m_1 v_{c1}^T v_{c1} + \frac{1}{2}m_2 v_{c2}^T v_{c2} = \frac{1}{2}\dot{q}\left\{m_1 J_{v_{c1}}^T J_{v_{c1}} + m_2 J_{v_{c2}}^T J_{v_{c2}}\right\}\dot{q}$$

- As velocidades angulares são dadas por

$$\omega_1 = \dot{q}_1 k, \qquad \omega_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)k$$

- Como ω_i está alinhado com o eixo z, a energia cinética de rotação é $I_i\omega_i^2$, com I_i o momento de inércia com relação a um eixo que passa pelo centro de massa. Assim:

$$\frac{1}{2}\omega^T\mathcal{I}\omega = \frac{1}{2}\dot{q}^T\left\{I_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + I_2\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right\}\dot{q}$$

Equação de Movimento

Manipulador planar de revolução

- A matriz de inércia é dada por

$$D(q) = m_1 J_{v_{c1}}^T J_{v_{c1}} + m_2 J_{v_{c2}}^T J_{v_{c2}} + \begin{bmatrix} I_1 + I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{bmatrix}$$

- Calculando a expressão acima, chegamos a

$$d_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2 l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_1 + I_2$$
$$d_{12} = d_{21} = m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2, \qquad d_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

- Os símbolos de Christoffel são dados por

$$c_{111} = \frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} = 0, \qquad c_{121} = c_{211} = \frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 := h$$
$$c_{221} = \frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} = h \qquad c_{112} = \frac{\partial d_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} = -h$$
$$c_{122} = c_{212} = \frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} = 0 \qquad c_{222} = \frac{1}{2}\frac{\partial d_{22}}{\partial q_2} = 0$$

- Portanto, os coeficientes $c_{kj} = \sum_{i=1}^n c_{ijk}(q)\dot{q}_i$ da matrix $C(q, \dot{q})$ são dados por

$$c_{11} = c_{111}\dot{q}_1 + c_{211}\dot{q}_2 = h\dot{q}_2, \qquad c_{12} = c_{121}\dot{q}_1 + c_{221}\dot{q}_2 = h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$
$$c_{21} = c_{112}\dot{q}_1 + c_{212}\dot{q}_2 = -h\dot{q}_1, \qquad c_{22} = c_{122}\dot{q}_1 + c_{222}\dot{q}_2 = 0$$

Equação de Movimento

Manipulador planar de revolução

- A energia potencial do robô é justamente a soma das energias potenciais dos elos dadas por

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= m_1 g l_{c1} \sin q_1 \\ P_2 &= m_2 g (l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)) \end{aligned}\right\} \quad \longrightarrow \quad P = P_1 + P_2$$

- Portanto, as funções g_k são dadas por

$$g_1 = \frac{\partial P}{\partial q_1} = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos q_1 + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)$$

$$g_2 = \frac{\partial P}{\partial q_2} = m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)$$

- Finalmente, chegamos a equação de movimento do sistema:

$$\begin{aligned} d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + c_{211}\dot{q}_2\dot{q}_1 + c_{121}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{221}\dot{q}_2^2 + g_1 &= \tau_1 \\ d_{21}\ddot{q}_1 + d_{22}\ddot{q}_2 + c_{112}\dot{q}_1^2 + g_2 &= \tau_2 \end{aligned}$$

- Ou forma matricial $D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$ abaixo

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{211}\dot{q}_2 & c_{121}\dot{q}_1 + c_{221}\dot{q}_2 \\ c_{112}\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

onde d_{kj}, c_{ijk} e g_k já foram calculados e precisam ser substituídos nesta equação.

Propriedades das matrizes do sistema

Propriedade anti-simétrica

- A equação de movimento de um manipulador com n-elos pode ser bastante complexa. No entanto, existem algumas propriedades que podem ser eficientemente exploradas.
- *Propriedade anti-simétrica*. Seja $D(q)$ a matriz de inércia do sistema e c_{kj} os elementos de $C(q, \dot{q})$ dados por

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i$$

Então, $N(q, \dot{q}) = \dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})$ é anti-simétrica, i.e., os componentes $n_{jk} = -n_{kj}$.

- Prova: O elemento (k, j) de $\dot{D}(q)$ é dado por

$$\dot{d}_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Portanto o elemento (k, j) de $N = \dot{D} - 2C$ é dado por

$$n_{kj} = \dot{d}_{kj} - 2c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \right] \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} \right] \dot{q}_i$$

Como $d_{ij} = d_{ji}$, temos que $n_{jk} = -n_{kj}$.

Propriedades das matrizes do sistema

Propriedade passividade

- *Propriedade passividade*. Implica que existe uma constante $\beta \geq 0$ tal que

$$\int_0^t \dot{q}^T(\zeta)\tau(\zeta)\, d\zeta \geq -\beta, \qquad \forall t > 0$$

- Observe que o termo $\dot{q}^T\tau$ tem unidade de potência. Assim, a expressão acima é a energia produzida pelo sistema no intervalo de tempo $[0, t]$.

- Prova: Seja H a energia total do sistema dada por: $H = \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} + P(q)$
  A sua derivada $\dot{H}$ satisfaz

$$\dot{H} = \dot{q}^T D(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{D}(q)\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial P}{\partial q} = \dot{q}^T \left\{\tau - C(q,\dot{q})\dot{q} - g(q)\right\} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{D}(q)\dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial P}{\partial q}$$

  Manipulando essa expressão com $g(q) = \dfrac{\partial P}{\partial q}$, temos

$$\dot{H} = \dot{q}^T\tau + \frac{1}{2}\dot{q}^T \left\{\dot{D}(q) - 2C(q,\dot{q})\right\}\dot{q} = \dot{q}^T\tau$$

- Seja $\mu = \min_q P(q)$. Integrando ambos os lados, obtemos

$$\int_0^t \dot{q}^T(\zeta)\tau(\zeta)\, d\zeta = H(t) - H(0) \geq -\beta, \qquad \text{com} \quad \beta = H(0) + |\mu|$$

Propriedades das matrizes do sistema

Limitantes para a matriz de inércia

- Vimos que a matriz de inércia $D(q)$, de dimensão $n \times n$, é simétrica e positiva definida.
- Portanto, a matriz $D(q)$ possui n autovalores reais e não-negativos $\lambda_i(q)$, $i = 1, \ldots, n$, possivelmente dependentes de q.
- Suponha que estes n autovalores de $D(q)$ estejam disposto na seguinte ordem $0 < \lambda_1(q) \leq \cdots \leq \lambda_n(q)$. Então, pode-se mostrar que

$$\lambda_1(q) I_{n\times n} \leq D(q) \leq \lambda_n(q) I_{n\times n}$$

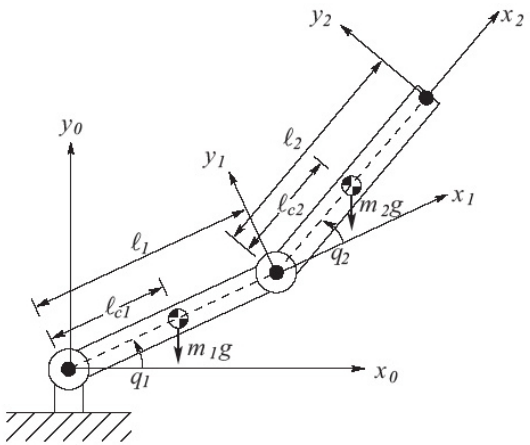
- Se todas as juntas forem de revolução, então a matriz de inércia $D(q)$ conterá apenas termos constantes e termos variantes envolvendo senos e cossenos. Assim, os seus coeficientes serão limitados.
- Isto implica que os autovalores $\lambda_i(q)$ também serão limitados. Assim, podemos selecionar limitantes $\lambda_m \leq \lambda_1(q)$ e $\lambda_M \geq \lambda_n(q)$, independentes de q, tais que

$$\lambda_m I \leq D(q) \leq \lambda_M I < \infty$$

- Se houverem juntas prismáticas cujos deslocamentos sejam limitados, então o resultado acima permanece válido.

Propriedade da parametrização linear

- A equação dinâmica de um robô pode ser representada como o produto de uma matriz de regressores $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ por um vetor θ de parâmetros do sistema.
- Considere a equação de movimento do manipulador planar abaixo.



$$d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + h\dot{q}_1\dot{q}_2 + h\dot{q}_2\dot{q}_1 + h\dot{q}_2^2 + g_1 = \tau_1$$
$$d_{21}\ddot{q}_1 + d_{22}\ddot{q}_2 - h\dot{q}_1^2 + g_2 = \tau_2$$

$$d_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2}\cos q_2) + I_1 + I_2$$
$$d_{12} = d_{21} = m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2}\cos q_2) + I_2, \quad d_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$
$$g_1 = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g\cos q_1 + m_2 l_{c2} g\cos(q_1 + q_2)$$
$$g_2 = m_2 l_{c2} g\cos(q_1 + q_2), \qquad h = -m_2 l_1 l_{c2}\sin q_2$$

- Usando a propriedade da parametrização linear, temos

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta$$

onde a matriz de regressores Y e o vetor de parâmetros θ são dados por:

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_1 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & y_{14} & \ddot{q}_1 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & \cos(q_1) & \cos(q_1) & \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & y_{24} & 0 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & 0 & 0 & \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 & m_2 l_1^2 & m_2 l_{c2}^2 & m_2 l_1 l_{c2} & I_1 & I_2 & m_1 l_{c1} g & m_2 l_1 g & m_2 l_{c2} g \end{bmatrix}^T$$

com

$$y_{14} = 2\cos(q_2)\ddot{q}_1 + \cos(q_2)\ddot{q}_2 - 2\sin(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 - \sin(q_2)\dot{q}_2^2$$
$$y_{24} = \cos(q_2)\ddot{q}_1 + \sin(q_2)\dot{q}_1^2$$