ES728 – Controle Avançado de Sistemas

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

- Considere o sistema abaixo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(t_0) = x_0$$

- Controlabilidade completa de estado:
  O par (A, B) é dito completamente controlável num instante $t = t_0$, se existir um tempo $t_f > t_0$ e uma lei de controle $u(t)$, com $t \in [t_0, t_f]$, tal que o estado é transferido de um estado inicial arbitrário $x(t_0) = x_0$ para um estado específico $x(t_f) = x_f$ num intervalo de tempo finito $t_f < \infty$.
- Essa condição é equivalente a verificar se existe um $t_f < \infty$ tal que o Gramiano de Controlabilidade X dado por

$$X = \int_0^{t_f} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} \, d\tau$$

  é uma matriz positiva definida, ou seja, se $X = X^T > 0$.
- Uma condição necessária e suficiente para que $X > 0$, é que matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ tenha posto n:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

- Quando A é Hurwitz, a matriz X satisfaz a seguinte equação de Lyapunov

$$AX + XA^T + BB^T = 0$$

- Algoritmo para determinar a controlabilidade.

```
>> % Sistema de ordem 3
>> A = [0 1 0; 0 0 1; -2 -4 -3];
>> B = [0 ; 0 ; 1]; C = [-1 0 1]; D = 0;
>> planta = ss(A,B,C,D); % Sistema contínuo
>> % Matriz de controlabilidade
>> CO1 = [B A*B A^2*B] % Matriz de controlabilidade
CO1 =
     0     0     1
     0     1    -3
     1    -3     5
>> CO2 = ctrb(A,B);     % Matriz de controlabilidade
>> CO3 = ctrb(planta);  % Matriz de controlabilidade
>> posto = rank(CO1)    % Calcula o posto de CO
posto =
     3
>> % Como o posto = 3, então o par (A,B) é completamente controlável
>> % Equação de Lyapunox: A*X + X*A' + B*B' = 0
>> X = lyap(A,B*B');
>> autovalX = eig(X)
autovalX =
    0.0500
    0.0575
    0.2175
>> % Como Real(autovalX)>0, a matriz X é positiva definida
>> % consequentemente o par (A,B) é comletamente controlável
```

Análise no espaço de estado

Controlabilidade

- Proposição: Um sistema pode ser representado, via uma transformação de similaridade na forma canônica controlável se, e somente se, sua matriz de controlabilidade tiver posto n.

- Prova da suficiência (caso SISO):
  Assuma que o par (A, B) é completamente controlável. Defina T como

$$T = MW$$

com

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots A^{n-1}B \end{bmatrix}, \qquad W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em que os a_i são os coeficientes de

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Perceba que as matriz T é não singular. Assim, pode-se usar T como uma transformação de similaridade.

- Prova (continuação):
  Defina um novo vetor de estado $\hat{x}$ por

$$x = T\hat{x} \quad \rightarrow \quad \hat{x} = T^{-1}x$$

com a matriz T dada por $T = MW$. Então

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}Bu$$

em que

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, o sistema está na forma canônica controlável.

- Exercício: Prove que $T^{-1}AT$ tem de fato a estrutura controlável acima.

- Exercício: Mostre que a matriz $H = M^T M$ é simétrica.

- Estabilizabilidade: Modos não controláveis estáveis e modos instáveis controláveis. Portanto, existe uma lei de controle

$$u = Kx$$

tal que o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A + BK)x$$

seja estável, ou seja, K pode ser escolhido tal que a matriz $A + BK$ seja Hurwitz.

- Considere o seguinte sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \text{com} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \;\rightarrow\; \lambda = -1, \; \lambda = 2$$

- O par (A, B) não é completamente controlável, pois:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{posto} = 1$$

- No entanto, o ganho $K = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}$ estabiliza o sistema, já que os autovalores de $A + BK$ são: $\lambda = -1$ e $\lambda = -2$.

Análise no espaço de estado

Observabilidade

- Considere o sistema abaixo com condição inicial $x(t_0) = x_0$.

$$\dot{x} = Ax, \qquad y = Cx$$

- Observabilidade completa de estado:
  O par (A, C) é completamente observável num instante $t_f > t_0$, se o conhecimento de $y(t)$, com $t \in [t_0, t_f]$, fornece uma solução única $x(t_0)$ para a equação

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

- Essa condição é equivalente a verificar se existe um $t_f < \infty$ tal que o Gramiano de Observabilidade Q é uma matriz positiva definida, ou seja, se $Q > 0$:

$$Q = \int_0^{t_f} e^{\tau A^T} C^T C e^{A\tau} \, d\tau$$

- $Q > 0$ sse a matriz de observabilidade $\mathcal{O}$ tiver posto n: $\quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$

- Quando A é Hurwitz, a matriz Q satisfaz a seguinte equação de Lyapunov

$$QA + A^T Q + C^T C = 0$$

Análise no espaço de estado

Observabilidade

```
>> A = [0 1 0; 0 0 1; -2 -4 -3];  B = [0 ; 0 ; 1]; C = [-1 0 1]; D = 0;
>> planta = ss(A,B,C,D); % Sistema contínuo
>> % Matriz de observabilidade
>> OB1 = [C; C*A; C*A^2] % Matriz de observabilidade
OB1 =
    -1     0     1
    -2    -5    -3
     6    10     4
>> OB2 = obsv(A,C); OB3 = obsv(planta); % Matriz de observabilidade
>> posto = rank(OB1)   % Calcula o posto de CO
posto =
     2
>> % Como o posto não é 3, então o par (A,C) não é completamente observável
>> % Equação de Lyapunox: Q*A + A'*Q + C'*C = 0
>> Q = lyap(A',C'*C);
>> autovalQ = eig(Q)
autovalQ =
    -5.592700271845682e-16
     4.415097082585265e-01
     5.308490291741466e+00
>> % Como autovalQ(1)=0, Q não é positiva definida e o (A,C) não é observável
>> % Expressando a função de transferência na forma zero-polo-ganho:
>> zpk(tf(planta))
Zero/pole/gain:
   (s+1) (s-1)
--------------------   Exercício: fazer as representações por diagramas de bloco
(s+1) (s^2 + 2s + 2)
```

- Detectabilidade: Modos não observáveis estáveis e modos instáveis observáveis.
- Portanto, existe uma matriz L tal que a matriz $A + LC$ é Hurwitz.
- Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax, \qquad y = Cx, \qquad \text{com} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Esse par (A,C) não é completamente observável, pois:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \text{posto} = 1$$

- No entanto, o ganho $L = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ estabiliza o sistema, já que os autovalores de $A + LC$ são: $\lambda = -3$ e $\lambda = -1$.
- Exercício: Coloque o sistema acima na forma modal/diagonal.
- Exercício: Mostre que determinar um ganho L tal que $A + LC$ seja estável é equivalente a determinar um ganho L^T tal que $A^T + C^T L^T$ seja estável.
- Proposição: Um sistema pode ser representado via uma transformação de similaridade na forma canônica observável, se, e somente se, sua matriz de observabilidade tiver posto n.

- Sabe-se que um sistema mecânico é estável se sua energia total decresce continuamente até atingir um estado de equilíbrio.
- Definição: uma função escalar $V(x) : R^n \to R$ é positiva definida se

$$V(x) > 0 \quad \text{para todo } x \neq 0 \text{ e } V(0) = 0$$

  A função $V(x)$ é positiva semidefinida se $V(x) \geq 0$.

- Exemplo:
  1. $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ é positiva definida.
  2. $V(x) = (x_1 + x_2)^2$ é positiva semidefinida.
  3. $V(x) = x_1 x_2 + x_2^2$ é indefinida.
- Considere o sistema dinâmico contínuo (linear ou não linear)

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

  Seus pontos de equilíbrio são todos os pontos x_e tais que

$$0 = f(x_e)$$

- Exemplo:
  1. $\dot{x}(t) = \sin(x(t))$ tem pontos de equilíbrio em $x_e = n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
  2. $\dot{x}(t) = x^2 - 4$ tem pontos de equilíbrio em $x_e = \pm 2$.
  3. $\dot{x}(t) = 2x + x^2$ tem pontos de equilíbrio em $x = 0$ e $x = -2$.

- Considere o sistema dinâmico descrito por

$$\dot{x}(t) = f(x)$$

com equilíbrio na origem, ou seja, $f(0) = 0$.

- Se existir uma função de Lyapunov $V(x) > 0$ tal que
  1. $\dot{V}(x) \leq 0$, então a origem $x = 0$ é estável;
  2. $\dot{V}(x) < 0$, então a origem $x = 0$ é assintoticamente estável.

- Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x} = Ax$$

com A uma matriz $n \times n$.

- Para esse caso, pode-se usar como função de Lyapunov a forma quadrática

$$V(x) = x^T P x, \quad \text{com} \quad P = P^T > 0$$

Como $P > 0$, tem-se que $V(x) > 0$.

- Para garantir estabilidade assintótica via Lyapunov, é preciso que

$$\dot{V}(x) < 0$$

Análise no espaço de estado

Estabilidade de Lyapunov

- Calculando a derivada de $V(x)$, tem-se

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x = x^T (A^T P + PA) x \\ &= x^T Q x, \quad \text{com} \quad Q = A^T P + PA\end{aligned}$$

- Para garantir estabilidade via Lyapunov, é preciso que

$$\dot{V}(x) = x^T Q x < 0$$

- Uma condição suficiente é que a matriz Q seja negativa definida $Q < 0$ pois

$$z^T Q z < 0, \quad \forall z \neq 0 \in R^n \quad \Longrightarrow \quad \dot{V}(x) = x^T Q x < 0$$

- Assim, dada uma matriz qualquer $Q = Q^T < 0$, se a solução P de

$$A^T P + PA = Q$$

  for positiva definida, se $P = P^T > 0$, então o sistema será assintoticamente estável.

- De forma prática, basta selecionar $Q = -I$ e verificar se a solução de

$$A^T P + PA = -I$$

  é positiva definida, ou seja, se $P > 0$.

Análise no espaço de estado

Estabilidade de Lyapunov: caso discreto

- Considere o sistema discreto

$$x(k+1) = f(x(k))$$

- As condições de estabilidade passam a ser
  1. $V(x) > 0, \quad V(0) = 0$
  2. $\Delta V(x) < 0$, em que $\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k))$

- Para sistemas lineares

$$x(k+1) = Ax(k)$$

  pode-se usar a função de Lyapunov quadrática

$$V(x(k)) = x(k)^T P x(k), \qquad P = P^T > 0$$

- Nesse caso

$$\begin{aligned} \Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x) &= x(k+1)^T P x(k+1) - x(k)^T P x(k) \\ &= x(k)^T A^T P A x(k) - x(k)^T P x(k) \\ &= x(k)^T [A^T P A - P] x(k) \end{aligned}$$

- Para garantir estabilidade é necessário que

$$A^T P A - P < 0 \qquad \text{com } P = P^T > 0$$

- Equivalentemente, é necessário existir $P = P^T > 0$ tal que $A^T P A - P = -I$.

- O comando $X = \mathrm{lyap}(A, Q)$ resolve a equação contínua de Lyapunov

$$AX + XA^T + Q = 0$$

- O comando $X = \mathrm{dlyap}(A, Q)$ resolve a equação discreta de Lyapunov

$$AXA^T - X + Q = 0$$

```
>> A = [0 0 ; 1 0]; B = [1; 0]; C = [0 1]; D = 0; % Note que o sistema é instável
>> % Deseja-se projetar K para que se obtenha polos duplos em s = -1
>> K = acker(A,B,[-1 -1]); Acl = A - B*K; % Matriz do sistema em malha fechada
>> % Verificar estabilidade usando lyap com Q = I
>> X = lyap(Acl,eye(2))
    0.5000   -0.5000
   -0.5000    1.5000
>> eig(X)
    0.2929
    1.7071
>> % Como os autovalores de X são positivos, conclui-se que a matriz Acl é estável
>> % Discretizando as matrizes A e B usando Tustin
>> T=1/2; Ad=(eye(2)+A*T/2)/(eye(2)-A*T/2); Bd=(eye(2)-A*T/2)\B*sqrt(T);
>> X = dlyap(Ad-Bd*K,eye(2))
    1.9260   -1.0625
   -1.0625    2.4360
>> eig(X)
    1.0883
    3.2737
% Como os autovalores de X são positivos, conclui-se que a matriz Ad é estável
% Obsv.: O controlador K já não estabiliza o sistema discretizado com T = 2
```