# ES728 – Controle Avançado de Sistemas

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

- Modelo Ideal: Controladores lineares, utilizando técnicas como lugar das raízes ou métodos no domínio da frequência, baseiam-se em modelos exatos.

- Incertezas: Na prática, raramente existe um modelo perfeito. Erros podem surgir devido a medições imprecisas, suposições simplificadas na modelagem ou mudanças nas propriedades do sistema ao longo do tempo.

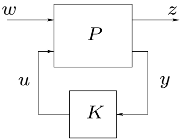
- Impacto das Incertezas: Caso essas incertezas não sejam consideradas, o desempenho pode ser inferior ao esperado.

- Perturbações e Ruído: Controladores lineares básicos não lidam com perturbações externas ou ruído de medição, e isso pode até amplificá-los.

- Controle Robusto: Lida com incertezas no modelo e assegura desempenho em diversas condições de operação. Considera perturbações e ruído, fornecendo controle robusto frente a esses fatores.

- Importância na Engenharia: O controle robusto é crucial na engenharia mecânica, onde se busca sistemas que operem de maneira confiável e eficaz, apesar das incertezas do mundo real.

- Considere o diagrama abaixo, com $P$ a planta generalizada e $K$ o controlador.




- O problema principal é determinar um controlador $K$ que, usando a informação do sensor $y$, gera um sinal de controle $u$ para reduzir o efeito da entrada exógena $w$ na saída controlada (desempenho) $z$.

- As normas mais empregadas para essa finalidade são as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$.

- O sistema MIMO acima é descrito pela seguinte função de transferência:

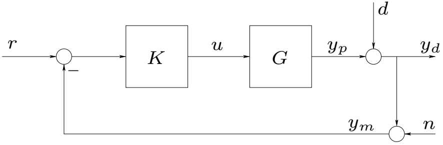
$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

$$u = K(s)y$$

- Uma realização no espaço de estado da planta generalizada $P$ é dada por

$$P \overset{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned}$$

- Praticamente qualquer problema de controle pode ser descrito nessa configuração.
- Exemplo: Pode-se colocar na forma padrão a configuração de controle abaixo.




- O primeiro passo é determinar os sinais da planta generalizada:

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ r \\ n \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} z &= e = y_d - r \\ y &= r - y_m = r - y_d - n \end{aligned}$$

# Projeto de controladores ótimos

## Formulação geral do problema de controle

- Com essa escolha de $y$, o controlador tem apenas a informação sobre o erro $r - y_m$. Note também que a escolha $z = y_d - r$ significa que o desempenho é dado em termos da saída real $y_d$ e não em termos da saída medida $y_m$.
- O diagrama de blocos acima fornece a seguinte relação entre os sinais:

$$z = y_d - r = Gu + d - r = 1w_1 - 1w_2 + 0w_3 + Gu$$
$$y = r - y_m = r - Gu - d - n = -1w_1 + 1w_2 - 1w_3 - Gu$$

- Assim, a planta generalizada $P$ (com entradas $\begin{bmatrix} d & r & n & u \end{bmatrix}^T$ e saída $\begin{bmatrix} z & y \end{bmatrix}^T$) é dada por

$$P(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & G \\ -1 & 1 & -1 & -G \end{bmatrix}$$

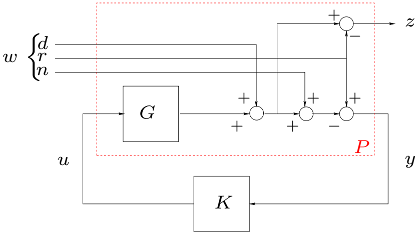
- Suponha que a planta $G(s)$ tenha a seguinte representação SISO:

$$G := \begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y_p = cx + fu \end{cases}$$

Então a representação no espaço de estado da planta generalizada será

$$P \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c|c} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc|c} a & 0 & 0 & 0 & b \\ \hline c & 1 & -1 & 0 & f \\ \hline -c & -1 & 1 & -1 & -f \end{array}\right]$$

- Uma representação equivalente é dada pelo seguinte diagrama:




- Obter a planta generalizada usando o Matlab/Simulink é simples.

- Exemplo: Para a planta $G(s) = 1/(s+1)$, o código abaixo determina $P(s)$ e a sua representação no espaço de estado:

```
>> G = tf(1,[1 1]);
>> systemnames = 'G'; % G is the SISO plant.
>> inputvar = '[d(1);r(1);n(1);u(1)]';
>> % Consists of vectors w and u.
>> input_to_G = '[u]';
>> outputvar = '[G+d-r; r-G-d-n]';
>> % Consists of vectors z and v.
>> sysoutname = 'P';
>> P = sysic;
>> [A,B,C,D]=ssdata(P)
```

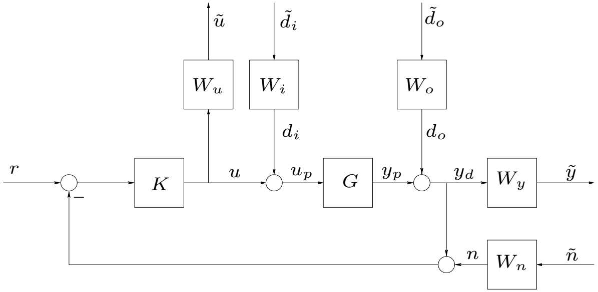
```
A =
    -1
B =
     0     0     0     2
C =
    0.5000
   -0.5000
D =
     1    -1     0     0
    -1     1    -1     0
```

# Projeto de controladores ótimos

## Conversão do diagrama de controle em uma planta generalizada

- Análise Diagrama de Blocos: Análise detalhada do diagrama de blocos, abrangendo plantas (como $G(s)$), controlador, sensores, atuadores e definição das entradas/saídas.
- Definição de Sinais e Desempenho: Especificação dos sinais de desempenho $(z)$ e medidos $(y)$, entradas $w$ (como $[d, r, n]$) e $u$. Inclusão de ponderações para desempenho e robustez.
- Expressões e Relações de Sinais: Obtenção das expressões para todos os sinais do diagrama reorganizados, destacando suas inter-relações.
- Construção da Matriz de Transferência $P(s)$: Matriz que representa a planta generalizada, baseada nas relações estabelecidas entre os sinais.
- Representação no Espaço de Estados das Funções de Transferência: Representação dos componentes individuais (como $G(s)$) no espaço de estados.
- Fórmulas dos Sinais Ajustadas: Ajuste das expressões dos sinais para incorporar as representações no espaço de estados das plantas individuais (como $G(s)$).
- Representação da Planta Generalizada no Espaço de Estados: Organização de um sistema de equações no espaço de estados, incluindo as equações das plantas individuais e os sinais $z$ e $y$. Determinação dos valores das matrizes $A$, $B_1$, etc.,

- Exercício. Determine a planta generalizada $P(s)$ e o respectivo modelo de estado aumentado, contendo todas as plantas: $G(s)$, $W_u(s)$, $W_i(s)$, $W_o(s)$, etc.




- Note que, fazendo-se $L = KG = GK$, $S = (I + L)^{-1}$ e $T = I - S$, tem-se

$$y_d = T(r - n) + SGd_i + Sd_o, \qquad r - y_d = S(r - d_o) + Tn - SGd_i$$

$$y_p = GKS(r - n - d_o) + GSd_i$$

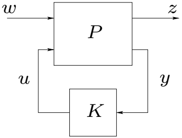
$$u = KS(r - n) - KSd_o - Td_i$$

$$u_p = KS(r - n) - KSd_o + Sd_i$$

# Projeto de controladores ótimos

## Controlador $\mathcal{H}_2$

- Considere a estrutura geral apresentada abaixo.




- O problema do projeto de controladores $\mathcal{H}_2$ consiste em se determinar um controlador $K(s)$ estabilizante que minimize a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência do sistema em malha fechada:

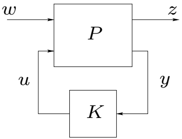
$$\|T_{zw}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |T_{zw}(\mathrm{j}\omega)|^2 \mathrm{d}\omega}$$

- É possível mostrar que o problema LQG, que consiste em se determinar uma lei $u(s) = K(s)y(s)$ de forma a minimizar o custo

$$J = E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left(x^T Q x + u^T R u\right)\mathrm{d}t\right\}$$

é um caso especial do problema $\mathcal{H}_2$.

- O projeto $\mathcal{H}_2$ usa a estrutura na forma geral, apresentada na figura abaixo.




- Assumi-se que a realização no espaço de estado da função de transferência $P$ é

$$P(s) := \left[\begin{array}{c|c|c} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right]$$

- Perceba a matriz $D$ tem uma estrutura especial, em que $D_{11}$ e $D_{22}$ são assumidos nulos para garantir a existência da solução do problema $\mathcal{H}_2$.
- As seguintes condições adicionais são também assumidas:
  1. $(A, B_2)$ é estabilizável e $(A, C_2)$ é detectável;
  2. $R_1 = D_{12}^T D_{12} > 0$ e $R_2 = D_{21} D_{21}^T > 0$.

- A solução do problema $\mathcal{H}_2$ é obtida através de duas equações algébricas de Riccati.

  1. Determina-se a solução $X = X^T \geq 0$ da seguinte equação:

  $$(A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^T C_1)^T X + X(A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^T C_1) - X B_2 R_1^{-1} B_2^T X + C_1^T (I - D_{12} R_1^{-1} D_{12}^T) C_1 = 0$$

  Em seguida, calcula-se o ganho:

  $$F_2 = -R_1^{-1}(B_2^T X + D_{12}^T C_1)$$

  2. Determina-se a solução $Y = Y^T \geq 0$ da seguinte equação:

  $$(A - B_1 D_{21}^T R_2^{-1} C_2) Y + Y(A - B_1 D_{21}^T R_2^{-1} C_2)^T - Y C_2^T R_2^{-1} C_2 Y + B_1 (I - D_{21}^T R_2^{-1} D_{21}) B_1^T = 0$$

  Em seguida, calcula-se o ganho

  $$L_2 = -(Y C_2^T + B_1 D_{21}^T) R_2^{-1}$$

  3. Finalmente, o controlador ótimo $\mathcal{H}_2$ é dado por

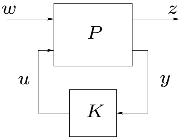
  $$K_{\mathcal{H}_2} = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2 F_2 + L_2 C_2 & -L_2 \\ \hline F_2 & 0 \end{array}\right]$$

- Exercício: Implemente as equações acima e aplique no exemplo (satélite) anterior.

# Projeto de controladores ótimos

## Controlador $\mathcal{H}_\infty$ subótimo

- Considere a estrutura geral apresentada abaixo.




- O problema $\mathcal{H}_\infty$ subótimo consiste em se determinar, para um dado $\gamma > 0$, todos os controladores $K(s)$ estabilizantes tais que

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty := \max_\omega \bar{\sigma}\left[T_{zw}(\mathrm{j}\omega)\right] < \gamma$$

- De forma similar ao caso $\mathcal{H}_2$, assumi-se a seguinte realização para a planta:

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|c|c} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right]$$

- As seguintes condições adicionais são também assumidas:
  1. $(A, B_1)$ é controlável e $(A, C_1)$ é observável;
  2. $(A, B_2)$ é estabilizável e $(A, C_2)$ é detectável;
  3. $D_{12}^T \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$.

- A solução do problema $\mathcal{H}_\infty$ é obtida através de duas equações algébricas de Riccati.
- Determina-se $X$ da seguinte equação:

$$A^TX + XA - X(B_2B_2^T - \gamma^{-2}B_1B_1^T)X + C_1^TC_1 = 0$$

- Determina-se $Y$ da seguinte equação:

$$AY + YA^T - Y(C_2^TC_2 - \gamma^{-2}C_1^TC_1)Y + B_1B_1^T = 0$$

- O problema terá solução se:
  $X \geq 0$ satisfizer

$$\operatorname{Re}\lambda_i\left[A - (B_2B_2^T - \gamma^{-2}B_1B_1^T)X\right] < 0, \qquad \forall i$$

e se $Y \geq 0$ satisfizer

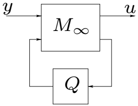
$$\operatorname{Re}\lambda_i\left[A - Y(C_2^TC_2 - \gamma^{-2}C_1^TC_1)\right] < 0, \qquad \forall i$$

e se o raio espectral satisfizer $\rho(XY) < \gamma^2$.

# Projeto de controladores ótimos

## Controlador $\mathcal{H}_\infty$ subótimo

- O conjunto de todos os controladores estabilizantes tem a forma:




com $Q(s)$ estável, tal que $\|Q(s)\| < \gamma$, e $M_\infty(s)$ dada por

$$M_\infty(s) := \left[\begin{array}{c|c|c} A_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ \hline F_\infty & 0 & I \\ \hline -C_2 & I & 0 \end{array}\right]$$

em que $F_\infty = -B_2^T X$, $L_\infty = -YC_2^T$, $Z_\infty = (I - \gamma^{-2} YX)^{-1}$ e

$$A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$$

- A escolha $Q(s) = 0$ fornece o controlador central, dado por:

$$K_\infty(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array}\right]$$

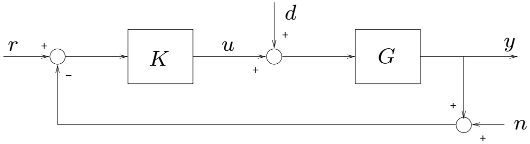
que tem a forma de um controlador/observador, em que o estimador é dado por

$$\dot{\hat{x}} = (A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X)\hat{x} + B_2 u + Z_\infty L_\infty (C_2 \hat{x} - y)$$

e um ganho de realimentação de estado dado por $u = F_\infty \hat{x}$.

# Função de sensibilidade
## Conceitos básicos

- Considere o diagrama de blocos abaixo, em que $G(s)$ é a planta, $K(s)$ o controlador, $r$ o sinal de referência, $u$ a lei de controle, $y$ a saída da planta, $d$ um distúrbio na entrada da planta e $n$ o ruído no sensor de medida.




- Um dos objetivos principais de um sistema de controle é fornecer um erro de rastreamento $e = r - y$ pequeno e simultaneamente rejeitar o distúrbio $d$.

- A saída do sistema é dada por

$$Y(s) = \frac{KG}{1+KG}R(s) + \frac{G}{1+KG}D(s) - \frac{KG}{1+KG}N(s)$$

- O erro de rastreamento $E(s) = R(s) - Y(s)$ é dado por

$$E(s) = \frac{1}{1+KG}R(s) - \frac{G}{1+KG}D(s) + \frac{KG}{1+KG}N(s)$$

# Função de sensibilidade
## Conceitos básicos

- A **função de transferência em malha aberta**, ou **loop gain**, é dada por

$$L(s) = K(s)G(s)$$

- Em termos de $L(s)$, o erro de rastreamento $e = r - y$ é dado por

$$E(s) = \frac{1}{1 + L(s)}R(s) - \frac{G}{1 + L(s)}D(s) + \frac{L(s)}{1 + L(s)}N(s)$$

- A **função de sensibilidade** é dada por

$$S(s) = (1 + K(s)G(s))^{-1} = \frac{1}{1 + L(s)}$$

- A **função de sensibilidade complementar** é dada por

$$T(s) = (1 + K(s)G(s))^{-1} K(s)G(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

- Assim, $Y(s)$ e $E(s)$ são dados por

$$Y(s) = T(s)[R(s) - N(s)] + S(s)G(s)D(s)$$
$$E(s) = S(s)R(s) - S(s)G(s)D(s) + T(s)N(s)$$

# Função de sensibilidade

## Conceitos básicos

- Note que pela definição de $S(s)$ e $T(s)$, tem-se

$$S(s) + T(s) = 1$$

- Essa condição é sempre válida, independente do compensador utilizado.

- Assim, não é possível fazer $S(s)$ e $T(s)$ simultaneamente pequenos. Existe um compromisso de projeto que deve ser respeitado.

- Por exemplo, considere a planta $G(s)$ com o compensador $K(s)$ dados por

$$G(s) = 100/s, \qquad K(s) = (s+5)/(s^2+s+100)$$

- Nesse caso, $L(s)$, $S(s)$ e $T(s)$ são dados por

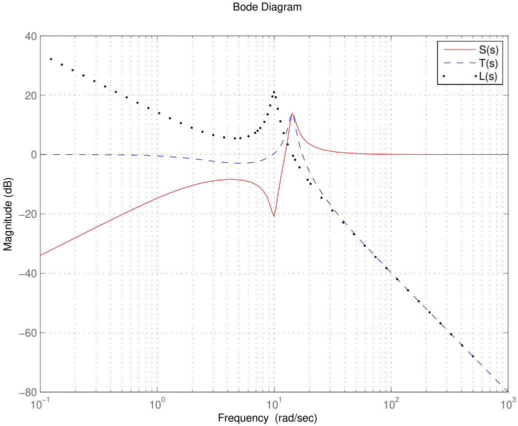
$$L(s) = \frac{100s + 500}{s^3 + s^2 + 100s}$$

$$S(s) = \frac{s^3 + s^2 + 100s}{s^3 + s^2 + 200s + 500}$$

$$T(s) = \frac{100s + 500}{s^3 + s^2 + 200s + 500}$$

- A figura na próxima página apresenta o diagrama de Bode da função de sensibilidade $S(s)$ e da função de sensibilidade complementar $T(s)$.

- Diagrama de Bode em magnitude da função de sensibilidade $S(s)$ e da função de sensibilidade complementar $T(s)$.



# Função de sensibilidade

## Conceitos básicos

- A variação na sensibilidade é definida como

$$\Delta S_G^T = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)}$$

- No limite, tem-se

$$S_G^T = \frac{\partial T/T}{\partial G/G} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln G}$$

- A saída de sistema é dada por:

$$Y(s) = T(s)R(s), \qquad \text{com} \quad T(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

- Calculando a função de sensibilidade $S_G^T$, tem-se

$$\begin{aligned} S(s) := S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G}\frac{G}{T} &= \left[-\frac{GK^2}{(1+GK)^2} + \frac{K}{1+GK}\right]\frac{G}{T} \\ &= \frac{K}{(1+GK)^2}\frac{G}{T} = \frac{1}{1+GK} \end{aligned}$$

- Note que $S_K^T$ também é dada por $S_K^T = (1+GK)^{-1}$.

# Função de sensibilidade

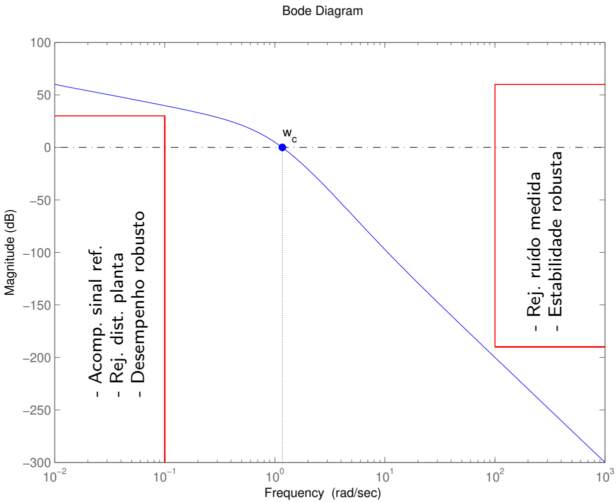
## Especificações de projeto

- A seguir, é apresentado um sumário das especificações:
  - Para adequado rastreamento é necessário um $S(s)$ pequeno (ou $T(s) \approx 1$).
  - Para adequada rejeição ao distúrbio $D(s)$ em $E(s)$ é necessário $L(s)$ grande na faixa de frequência do distúrbio. Isso implica que $K(s)$ deve ser grande.
  - Para atenuar ruídos de medição $N(s)$ em $E(s)$ é necessário que $L(s)$ seja pequeno na faixa de frequência do ruído. Isso implica que $K(s)$ deve ser pequeno nessa faixa. Equivalentemente, $S(s)$ deve ser grande e $T(s)$ pequeno.
  - Para que o sistema tenha uma boa margem de estabilidade é necessário um $S(s)$ pequeno, ou seja, um $L(s)$ grande, o que implica que $K(s)$ também deve ser grande.
- Percebe-se que os objetivos são conflitantes. Esse é o paradigma clássico de controle.
- No entanto, esses objetivos, na prática, são especificados em diferentes faixas de frequências.
- Assim, a maioria das especificações podem ser atendidas usando-se:
  - um grande “loop gain” ($|L| \gg 1$) em baixas frequências;
  - e um pequeno “loop gain” ($|L| \ll 1$) em altas frequências.

# Função de sensibilidade

## Especificações de projeto

- O diagrama de Bode da função de transferência em malha aberta $L(s)$ deve estar situado entre as barreiras de baixa e alta frequência.



# Função de sensibilidade

## Especificações de projeto

- Alternativamente, deseja-se impor limitantes nas funções de sensibilidade $S(s)$ e sensibilidade complementar $T(s)$.
- Em geral, deseja-se que em baixa frequência a função de sensibilidade $S(s)$ seja pequena e que seu valor máximo seja limitado, ou seja:

$$
\begin{aligned}
|S(\mathrm{j}\omega)| &\leq \epsilon \qquad && \forall \omega \leq w_0, \\
|S(\mathrm{j}\omega)| &\leq M, \qquad && \forall \omega > w_0
\end{aligned}
$$

- Uma forma de impor essa condição é escolher de forma apropriada uma função de ponderação $W_1(s)$, que seja grande em baixa frequencia, e exigir que:

$$|S(\mathrm{j}\omega)| < |W_1^{-1}(\mathrm{j}\omega)|$$

  ou, de forma equivalente, que:

$$|W_1(\mathrm{j}\omega) S(\mathrm{j}\omega)| < 1$$

- De forma similar, é possível escolher uma função de ponderação $W_2(s)$ que imponha a forma deseja para a função de sensibilidade complementar $T(s)$, ou seja:

$$|T(\mathrm{j}\omega)| < |W_2^{-1}(\mathrm{j}\omega)|$$

  Equivalentemente

$$|W_2(\mathrm{j}\omega) T(\mathrm{j}\omega)| < 1$$

# Projeto de controladores ótimos

## Desempenho ponderado

- Para aplicar ténicas de projeto de controladores ótimos, é necessário formular as especificações de desempenho de uma forma matematicamente tratável.

- Sabe-se que os critérios de desempenho podem ser especificados em termos de requerimentos sobre a função de sensibilidade (ou de sensibilidade complementar).

- Por exemplo, critérios de desempenho para sistemas SISO podem ser especificados impondo uma barreira na função de sensibilidade:

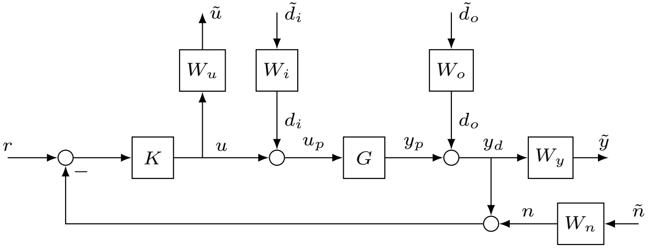
$$\begin{cases} |S(\mathrm{j}\omega)| \leq \epsilon, & \forall \omega \leq w_0, \\ |S(\mathrm{j}\omega)| \leq M, & \forall \omega > w_0 \end{cases}$$

- No entanto, é mais conveniente descrever os objetivos de desempenho usando funções de ponderação apropriadas. Note que a especificação acima pode ser reescrita como:

$$|W_e(\mathrm{j}\omega)S(\mathrm{j}\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega \quad \text{com} \quad |W_e(\mathrm{j}\omega)| = \begin{cases} 1/\epsilon, & \forall \omega \leq w_0, \\ 1/M, & \forall \omega > w_0 \end{cases}$$

- As funções de ponderação devem ser escolhidas de tal forma que sejam racionais, (estritamente) próprias e estáveis.

- A vantagem em se utilizar funções (pesos) de ponderação são: alguns componentes de um vetor são mais importantes que outros; cada componente de um sinal pode não ter a mesma unidade; pode-se estar interessado em rejeitar erros em certos intervalos de frequência. Assim, funções de ponderação (dependentes da frequência) devem ser utilizadas.

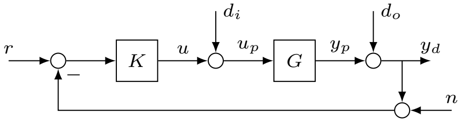



- Esses pesos são escolhidos para refletir objetivos de projeto ou conhecimentos sobre ruídos de processo e de medida. Por exemplo: $W_o$ e $W_i$ podem ser escolhidos para refletir as componentes de frequência de $d_o$ e $d_i$; $W_n$ pode ser usado para modelar a faixa de frequência do ruído do sensor; $W_y$ pode ser utilizado para impor a forma de certas funções de transferência em malha fechada (como a função de sensibilidade); $W_u$ pode ser utilizado para impor restrições sobre o sinal do atuador, etc.

# Projeto de controladores ótimos

## Seleção das funções de ponderação

- Considere o sistema SISO apresentado na figura abaixo.




- O erro de rastreamento $e$ e a lei de controle $u$ são dados por:

$$e = r - y_d = S(r - d_o - Gd_i) + Tn, \qquad u = KS(r - n - d_o) - Td_i$$

- É desejável que $S$ seja pequeno em baixa frequência (onde $r$ e $d$ são grandes).

- Para motivar a escolha da função peso $W_e$ sobre o sinal de erro $e$, suponha que $L = GK = KG$ representa um sistema ideal de segunda ordem:

$$L_{id} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

- Sabe-se que a qualidade da resposta ao degrau pode ser analisada pelas seguintes especificações: tempo de subida $t_r$, tempo de acomodação $t_s$ e sobressinal $M_p$:

$$t_s \approx \frac{4.6}{\zeta\omega_n}, \qquad M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \qquad t_r \approx \frac{0.6 + 2.16\zeta}{\omega_n}$$

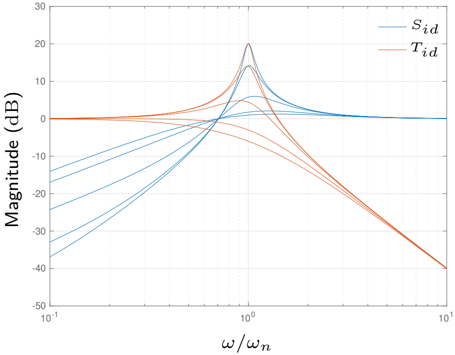
# Projeto de controladores ótimos

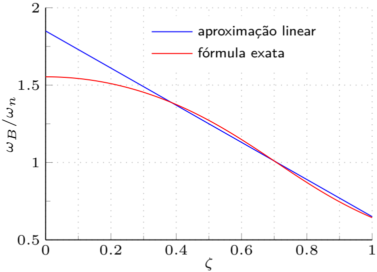
## Seleção das funções de ponderação

- Claramente, os desempenhos estão relacionados com:

$$T_{id}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \text{e} \qquad S_{id}(s) = \frac{s(s + 2\zeta\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- O gráfico abaixo apresenta a magnitude do diagrama de Bode (normalizado) das funções $|S_{id}(\mathrm{j}\omega)|$ e $|T_{id}(\mathrm{j}\omega)|$, para os valores de $\zeta = \{0.05, 0.1, 0.2, \sqrt{2}/2, 1\}$.




Note que $|S_{id}(\mathrm{j}\omega)|_{\omega = \frac{\omega_n}{\sqrt{2}}} = 0\,\mathrm{dB}$

- Aproximação da banda passante de $T(\mathrm{j}\omega)$ é $\omega_B \approx \omega_n$, já que $\omega_B = \omega_n$ se $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

# Projeto de controladores ótimos

## Seleção das funções de ponderação

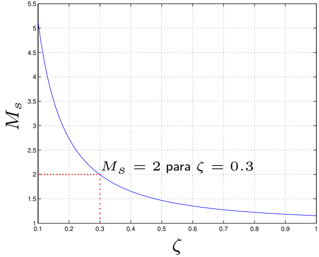
- Pode-se mostrar (exercício) que

$$M_s := \|S_{id}\|_\infty = |S_{id}(\mathrm{j}\omega_{\max})| = \frac{\beta\sqrt{\beta^2 + 4\zeta^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}}$$

em que

$$\beta = \sqrt{0.5 + 0.5\sqrt{1 + 8\zeta^2}} \quad \text{e} \quad \omega_{\max} = \beta\omega_n$$

- A relação entre $\zeta$ e $\|S_{id}\|_\infty$ está apresentada na figura abaixo.

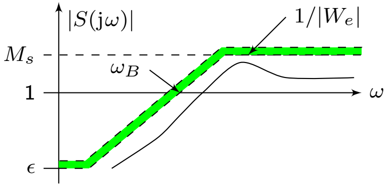



- Suponha que as especificações de desempenho no domínio do tempo sejam fornecidas, então pode-se determinar os requisitos no domínio da frequência em termos da largura de banda $\omega_B$ e do pico da sensibilidade $M_s = \|S_{id}\|_\infty$.

# Projeto de controladores ótimos

## Seleção das funções de ponderação

- Um projeto adequado deve fornecer uma função de sensibilidade $S(s)$ que satisfaça os requerimentos impostos sobre $\omega_B$ e $M_s$, como apresentado na figura abaixo.




- Esse requerimento pode ser expresso (aproximadamente) por:

$$|S(s)| \leq \left| \frac{s}{s/M_s + \omega_B} \right| \quad \text{com} \quad s = j\omega$$

ou equivalentemente como $|W_e(j\omega)S(j\omega)| \leq 1$ com

$$W_e = \frac{s/M_s + \omega_B}{s}$$

- Em geral, é preciso aproximar $W_e$ de forma que seja própria e estável:

$$W_e = \frac{s/M_s + \omega_B}{s + \omega_B \epsilon} \quad \text{ou} \quad W_e = \left( \frac{s/\sqrt[k]{M_s} + \omega_B}{s + \omega_B \sqrt[k]{\epsilon}} \right)^k, \ k \geq 1$$

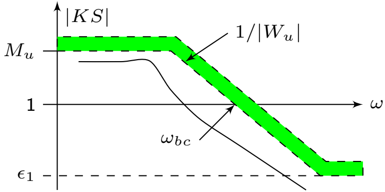
# Projeto de controladores ótimos

## Seleção das funções de ponderação

- A escolha da função de ponderação sobre o controle $W_u$ segue passos similares, só que agora usando a equação da lei de controle:

$$u = KS(r - n - d_o) - Td_i$$

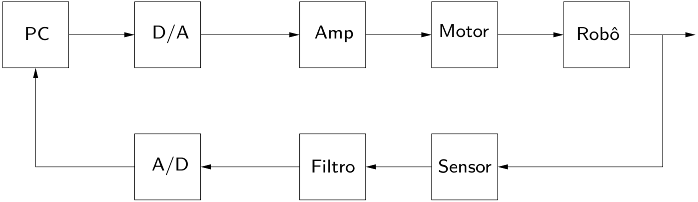
- A limitação sobre $|KS|$ em baixa frequência é essencialmente regida pela energia de controle disponível e pelos limites de saturação do atuador.
- O ganho $M_u$ de $KS$ deve ser alto, porem, em alta frequência ele é limitado pela largura de banda $\omega_{bc}$ do controlador e pela faixa de frequência do ruído do sensor.




- De forma ideal, é desejável que a inclinação na largura de banda (roll off) seja acentuada. Portanto, uma função de peso $W_u$ apropriada pode ser descrita por:

$$W_u = \frac{s + \omega_{bc}/M_u}{\omega_{bc}} \quad \rightarrow \quad W_u = \frac{s + \omega_{bc}/M_u}{\epsilon_1 s + \omega_{bc}} \quad \text{ou} \quad W_u = \left( \frac{s + \omega_{bc}/\sqrt[k]{M_u}}{\sqrt[k]{\epsilon_1} s + \omega_{bc}} \right)^k$$

- Será feita uma aplicação do projeto de controladores $\mathcal{H}_2$ para o controle de vibração e posicionamento de um braço robótico flexível.

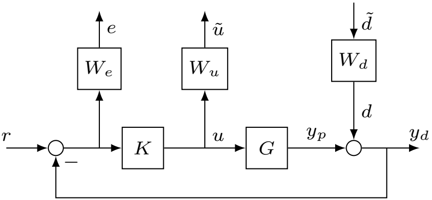



- O sistema de controle apresentado acima tem os seguintes componentes: um motor-DC; um braço acoplado ao motor; um sensor de posição na extremidade do braço; um amplificador de potência para acionar o motor; e um filtro antialiasing.

- O objetivo do problema de controle é posicionar a extremidade do braço robótico de forma a seguir uma entrada de referência (de comando) $r$ rejeitando possíveis distúrbios na saída da planta.

- Exercício: Resolva esse problema de forma análoga usando a norma $\mathcal{H}_\infty$.

- O diagrama de controle a ser utilizado nesse problema está apresentado abaixo, em que $W_e$ e $W_d$ e $W_u$ são pesos a serem selecionados pelo projetista.




- A saída da planta é contaminada com um ruído $d$ cujas componentes de frequências estão ponderadas pela função de transferência $W_d$.

- As especificações de desempenho que o sistema deverá satisfazer são dadas por:

$$\text{tempo de acomodação} \approx 8s$$
$$\text{sobressinal} \leq 10\%$$

- Nesse projeto, as especificações de desempenho serão atendidas modelando-se a função de sensibilidade $S$. Assim, define-se a função ideal $S_{id}$ como segue:

$$S_{id}(s) = \frac{s(s+2\zeta\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Note que um tempo de acomodação $t_s = 8$s e um sobressinal $M_p = 10\%$ fornecem:

$$t_s \approx \frac{4.6}{\zeta\omega_n} = 0.8, \quad M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.1, \quad \to \quad \zeta = 0.6, \quad \omega_n = 1$$

- Portanto, a função de sensibilidade ideal é dada por:

$$S_{id}(s) := \frac{s(s+1.2)}{s^2 + 1.2s + 1}$$

- Uma escolha obvia para a função peso $W_e$ é a própria inversa de $S_{id}$, ou seja:

$$W_e(s) = S_{id}^{-1}(s) = (s^2 + 1.2s + 1)/(s(s+1.2))$$

- Porem, é necessário alterar $W_e(s)$ para que ela seja estável e estritamente própria. Uma possibilidade é substituir o integrador $1/s$ por $1/((s+\epsilon)(\epsilon s + 1))$. Assim:

$$W_e(s) = \frac{s^2 + 1.2s + 1}{(s+0.001)(s+1.2)(0.001s+1)} \qquad \text{para } \epsilon = 0.001$$

- Um modelo linear ideal para representar a função de transferência da planta, entre o torque e a deflexão da extremidade do braço (viga), é dado por:

$$\frac{c_0}{s^2} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2}$$

- O primeiro termo $c_0/s^2$ corresponde ao movimento de corpo rígido. O termo

$$\frac{c_1}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2}$$

  corresponde ao primeiro modo flexível da viga. E assim por diante.

- Uma versão simplificada (considerando apenas o primeiro modo) é dada por

$$G(s) = \frac{(s-6)(s+5)}{s(s+0.0005)(s^2+0.6s+36)}$$

- Os dois primeiros polos são de corpo rígido: o polo $s = -0.0005$ foi movido da origem devido à força contra eletromotriz do motor. Os polos complexos correspondem ao primeiro modo de vibração da viga, cujo amortecimento é $0.05$.

- O zero em $s = 6$ indica que a planta é de fase não-mínima, refletindo o fato de que o atuador (motor) e o sensor não estão localizados no mesmo ponto na viga.

- Para simplificar o projeto, assume-se que $W_d = 1$.
- A escolha do peso $W_u$ depende das restrições impostas sobre o atuador.
- Primeiramente, será assumido que não existe restrições sobre o controlador, ou seja, $W_u \to 0$, fornecendo o melhor desempenho possível.
- Em seguida, restrições físicas sobre o controlador serão impostas usando-se uma função de ponderação $W_u$ apropriada.
- Código em Matlab utilizado:

```
s = tf('s');
G = (s-6)*(s+5)/((s+0.0001)*(s+0.0005)*(s^2+0.6*s+36));
e = 0.6; we = 1;
Sideal = (s^2+2*e*we*s)/(s^2+2*e*we*s+we^2);
Tideal = minreal(1 - Sideal);
We     = zpk((s^2+1.2*s+1)/((s+0.001)*(s+1.2)*(0.001*s+1)));
Wu     = 1e-4*(s+1)/(s+1); % Praticamente sem ponderação (Wu -> 0)
```

```
% Gera a planta geral P
systemnames = 'We Wu G';
input_to_G  = '[u]';
input_to_We = '[r-G-d]';
input_to_Wu = '[u]';
inputvar    = '[d(1); r(1); u(1)]';
outputvar   = '[We; Wu; r-G-d]';
Pgeral      = sysic;
[A,B,C,D]   = ssdata(Pgeral);
```

```
% Continuação...
Planta_ss = ss(A,B,C,D);
Pss_red   = minreal(Planta_ss);
% Calcula o controlador H2
KH2  = h2syn(Pss_red,1,1);
% Monta a função de sensibilidade
S    = minreal(1 / (1 + minreal(KH2*G)));
% Sistema em malha fechada.
Cl   = minreal(feedback(minreal(KH2*G),1));
```

- É possível resolver o problema $\mathcal{H}_2$ usando diretamente as equações de Riccati.

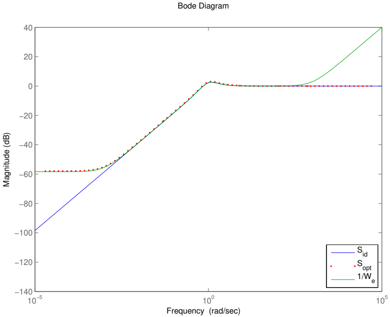
```
% Planta
G=(s-6)*(s+5)/((s+0.0001)*(s+0.0005)*(s^2+0.6*s+36));
[Ap,Bp,Cp,Dp] = ssdata(G); np = size(Ap,1);
% Inversa da funcao de sensibilidade
e =  0.6; we = 1;
Sideal = (s^2+2*e*we*s)/(s^2+2*e*we*s+we^2);
Tideal = minreal(1 - Sideal);
% We=Inv(Sideal) nao é realizavel. Assim:
We = (s^2+1.2*s+1)/((s+0.001)*(s+1.2)*(0.001*s+1));
[Ae,Be,Ce,De] = ssdata(We); ne = size(Ae,1);
% Peso no esforço de controle
wu = 50; Mu=10; e1=0.001;
Wu = (s + wu/Mu)/(e1*s + wu);
[Au,Bu,Cu,Du] = ssdata(Wu); nu = size(Au,1);
% Sistema aumentado
% x = [xp xe xu]; y = r - yp - d
% z = [We (r - yp -d); u];  w = [d; r];
A  =[Ap, zeros(np,ne), zeros(np,nu);...
    -Be*Cp, Ae, zeros(ne,nu);...
    zeros(nu,np), zeros(nu,ne), Au];
B1 =[zeros(np,1), zeros(np,1); -Be, Be;
     zeros(nu,1), zeros(nu,1)];
B2 =[Bp; zeros(ne,1); Bu];
C1 =[-De*Cp, Ce, zeros(1,nu);...
     zeros(1,np), zeros(1,ne), Cu];
D11=[0 0; 0 0]; % deve ser nula para o problema H2
D12=[ zeros(1,nu); Du];
C2 =[-Cp, zeros(1,ne), zeros(1,nu)];
D21=[-1 1];
D22=0;  % deve ser nula para o problema H2
```

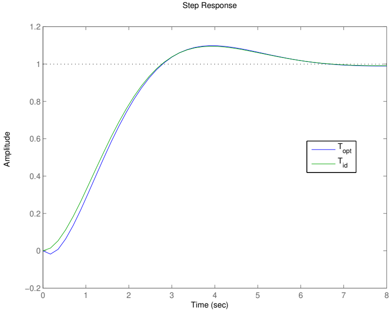
```
% Determina o controlador resolvendo duas
% equações de Riccati
% Determina o ganho F
R1 = D12'*D12;
QQ = C1'*C1-C1'*D12/R1*D12'*C1;
AA = A-B2/R1*D12'*C1;
RR = B2/R1*B2';
X  = are(AA,RR,QQ);
F  = -R1\D12'*C1 - R1\B2'*X;
% Determina o ganho L
% C1->B1', D12->D21', A->A', B2->C2', F->L'
R2 = D21*D21';
QQ = B1*B1'-B1*D21'/R2*D21*B1';
AA = A'-C2'/R2*D21*B1';
RR = C2'/R2*C2;
Y  = are(AA,RR,QQ);
L  = ( -R2\D21*B1' - R2\C2*Y )';
% Calcula o controlador ótimo
Ac = A+B2*F+L*C2; Bc=-L; Cc=F; Dc=0;
K  = minreal( ss(Ac,Bc,Cc,Dc) );
% % Monta a função de sensibilidade
S = minreal(1 / (1 + minreal(K*G)));
% Sistema em malha fechada.
Cl = minreal(feedback(minreal(K*G),1));
```

# Projeto de controladores ótimos

## Aplicação do controlador $\mathcal{H}_2$ usando o Matlab

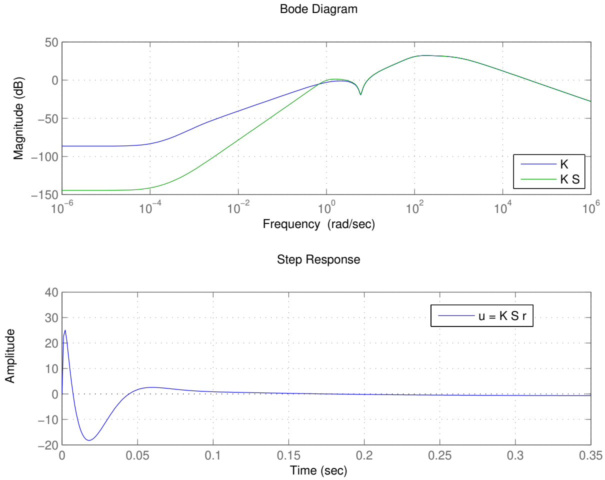
- A figura abaixo, a esquerda, apresenta a função de ponderação $W_e$, a função de sensibilidade ideal $S_{id}$ e a otimizada $S_{opt}$, obtida com o controlador $\mathcal{H}_2$.
- A figura abaixo, a direita, apresenta a resposta ao degrau do sistema em malha fechada ideal $T_{id}$ e do sistema otimizado $T_{opt}$.




- Percebe-se que a função de sensibilidade $S_{opt}$ convergiu para a ideal $S_{id}$ e, assim, a resposta ao degrau se aproximou da resposta ideal (para o sistema sem ruído $d = 0$).

- O sistema em malha fechada atingiu os objetivos estipulados, no entanto, a custa de um esforço de controle significante, como visto na figura abaixo.



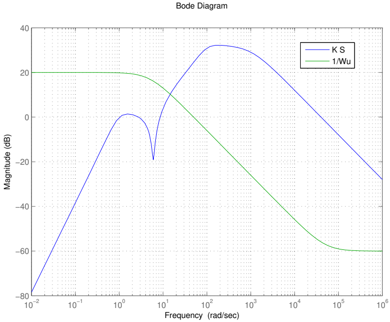
# Projeto de controladores ótimos

## Aplicação do controlador $\mathcal{H}_2$ usando o Matlab

- Em geral, atuadores possuem limitações que precisam ser levadas em consideração.
- Suponha que nesse projeto, a largura de banda do atuador esteja limitada em $\omega_{bc} = 50$ rad/s. Então, uma escolha inicial para a função $W_u$ é dada por

$$w_{bc} = 50,\ M_u = 10,\ \epsilon_1 = 0.001, \quad \rightarrow \quad W_u := \frac{(s + w_{bc}/M_u)}{(\epsilon_1 s + w_{bc})} = \frac{s+5}{0.001s + 50}$$

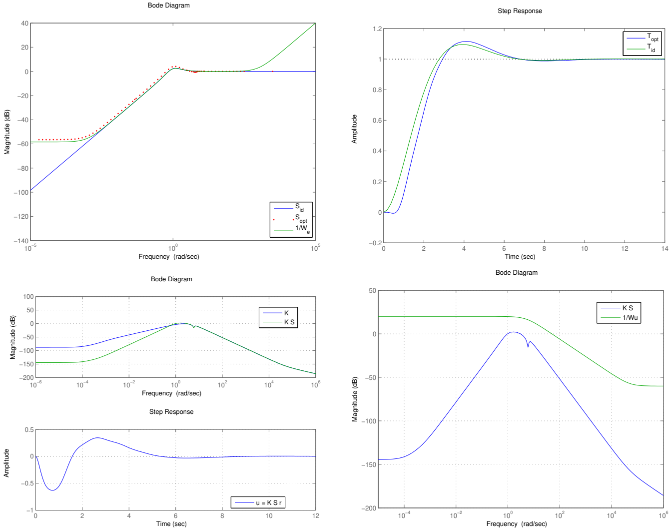
- A figura abaixo apresenta a função de transferência $KS$ usando o controlador ótimo $\mathcal{H}_2$ (sem ponderação sobre $\|\tilde{u}\|$) e a função de ponderação $W_u$.



# Projeto de controladores ótimos

## Aplicação do controlador $\mathcal{H}_2$ usando o Matlab

- Usando a função de ponderação $W_u$, um novo controlador $\mathcal{H}_2$ é projetado.

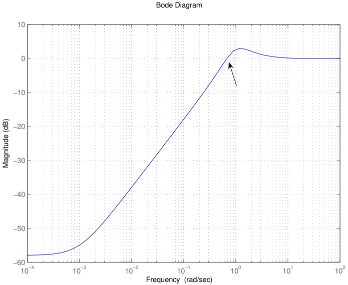


# Projeto de controladores ótimos

## Aplicação do controlador $\mathcal{H}_2$ usando o Matlab

- Embora a influência do distúrbio $d$ não tenha sido levada em consideração durante o projeto do controlador $\mathcal{H}_2$, é importante verificar a habilidade do sistema em malha fechada de rejeitar ruídos na saída da planta.

- A função de transferência entre o distúrbio $d$ e o sinal $y_d$ é a própria função de sensibilidade $S(\mathrm{j}\omega)$.




- Portanto, o erro estacionário será nulo para um degrau como entrada de distúrbio.

- No entanto, se o ruído tiver componentes de frequência acima da frequência de corte de $S$, que é aproximadamente de $0.6$ rads/s, o ruído será inclusive amplificado.