ES728 – Controle Avançado de Sistemas

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

Regulador Linear Quadrático Ótimo

Problema LQR horizonte finito

- A função de custo para o problema de LQR de horizonte finito t_f é
$$J = x(t_f)^T M x(t_f) + \int_0^{t_f} \left(x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \right) \, \mathrm{d}t$$
com $M = M^T \geq 0$, $Q = Q^T \geq 0$ e $R = R^T > 0$.

- Lei de controle ótimo para o caso do horizonte finito é variante no tempo:
$$u(t) = -K(t)x(t), \qquad K(t) = R^{-1}B^T P(t)$$
em que a matriz de ganho de controle $K(t)$ é calculada pela solução, no intervalo de tempo $[0, t_f]$, da equação de Riccati diferencial
$$\dot{P}(t) = -A^T P(t) - P(t)A + P(t)BR^{-1}B^T P(t) - Q$$
com a condição terminal
$$P(t_f) = M$$
(já que não há custo além do tempo final t_f).

- A equação de Riccati diferencial é resolvida em sentido reverso no tempo (integração reversa), começando a partir de t_f e integrando em direção a 0.

- Quando $t_f \to \infty$, tem-se $P(t) \to P$ e $K(t) \to K$, solução do horizonte infinito.

- Exemplo: Considere o seguinte sistema escalar:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t)$$

com a função de custo para o problema LQR horizonte finito dada por

$$J = \int_0^{t_f} \left(qx(t)^2 + ru(t)^2 \right) \, \mathrm{d}t$$

- Para esse problema, a lei de controle ótimo fica sendo

$$u(t) = -k(t)x(t)$$

em que

$$k(t) = p(t)/r$$

com $p(t)$ a solução da equação de Riccati diferencial dada por

$$\dot{p}(t) = -2ap(t) + \frac{p(t)^2}{r} - q, \qquad p(t_f) = 0$$

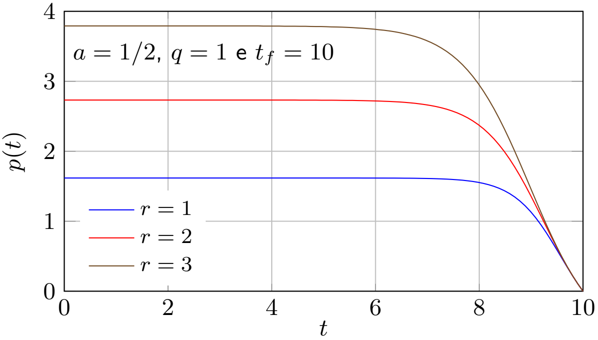
- Para esse caso escalar particular, a solução é dada por

$$p(t) = -\frac{qr}{ar + \sqrt{r\,(q + a^2 r)}\coth\left(\sqrt{a^2 + \frac{q}{r}}(t - t_f)\right)}$$

Regulador Linear Quadrático Ótimo

Problema LQR horizonte finito

- O gráfico abaixo apresenta $p(t)$ para os valores $r = \{1, 2, 3\}$.



- Observando (com $q = 1$) que

$$\lim_{t_f \to \infty} \coth\left(\sqrt{a^2 + r^{-1}}(t - t_f)\right) = -1$$

tem-se que

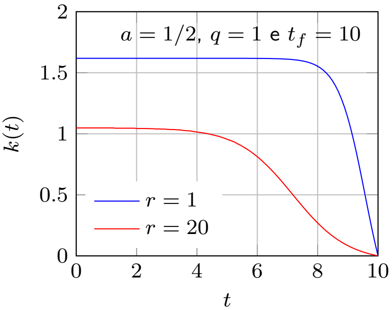
$$p = \lim_{t_f \to \infty} p(t) = ar + \sqrt{(ar)^2 + r}$$

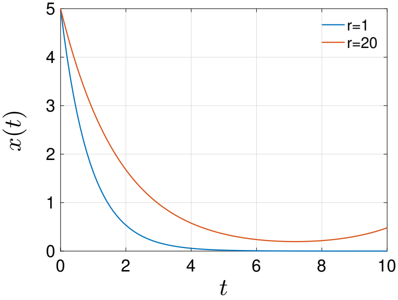
que é o resultado obtido anteriormente para o caso do horizonte infinito.

Regulador Linear Quadrático Ótimo

Problema LQR horizonte finito

- À esquerda tem-se $k(t)$ para $r = \{1, 20\}$.





- À direita tem-se $x(t)$ para $x(0) = 5$, com $k(t)$ obtido para $r = \{1, 20\}$.

```
a = 1/2; q = 1; tf = 10; x0 = 5; rvalues = [1 20];
tspan = linspace(0,tf,100);
for i=1:2
  r = rvalues(i);
  k = @(t) -q/(a*r+sqrt(r*(q+a^2*r))*coth(sqrt(a^2+q/r)*(t-tf)));
  sys = @(t, x) (a - k(t))*x;
  [¬, x(:,i)] = ode45(sys, tspan, x0);
end
plot(tspan,x), grid, xlabel('t'), ylabel('x(t)')
```

Regulador Linear Quadrático Ótimo

Problema LQR horizonte finito

- Considere o sistema linear contínuo invariante no tempo

$$x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

- Nesse problema, deseja-se encontrar uma lei $u(t)$ de forma a minimizar o custo finito:

$$J = x(t_f)^T M x(t_f) + \int_0^{t_f} \left(x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \right) \mathrm{d}t$$

em que $Q = Q^T \geq 0$, $M = M^T \geq 0$, $R = R^T > 0$ são matrizes de ponderação.

- A solução ótima é dada pela lei de controle

$$u(t) = -K(t)x(t)$$

com o ganho variante $K(t)$ dado por

$$K(t) = R^{-1} B^T P(t)$$

cuja matriz $P(t)$ é a solução da seguinte equação diferencial de Riccati

$$-\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q, \qquad P(t_f) = M$$

- Exemplo: considere o problema:

$$\min_{u(t)} J = \int_0^{t_f} \left(x(t)^2 + u(t)^2\right) \mathrm{d}t$$

sujeito à dinâmica

$$\dot{x}(t) = u(t), \qquad x(0) = x_0$$

- Pode se mostrar que a solução da equação diferencial de Riccati é dada por

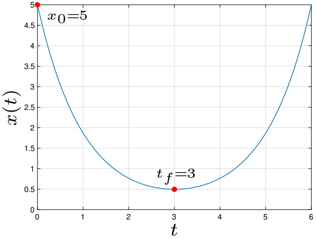
$$p(t) = \frac{1 - e^{-2(t_f - t)}}{1 + e^{-2(t_f - t)}} = -\tanh(t - t_f), \qquad p(t_f) = 0$$

- Portanto, o sistema em malha fechada com a lei

$$u(t) = -p(t)x(t)$$

é dado por

$$\dot{x}(t) = -\tanh(t - t_f)x(t)$$



- A solução desse sistema de primeira ordem é

$$x(t) = x_0 \left(\frac{e^{t_f} - e^{-t_f}}{2}\right) \left(\frac{e^{(t-t_f)} + e^{-(t-t_f)}}{2}\right) = x_0 \operatorname{sech}(t_f) \cosh(t - t_f)$$

- Considere o sistema linear invariante no tempo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \qquad x(0) = x_0$$

- Deseja-se encontrar uma lei de controle $u(k)$ de forma a minimizar o custo

$$J = x(N)^T M x(N) + \sum_{k=0}^{N} \left(x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k) \right)$$

  em que as matrizes Q e R são matrizes de ponderação (pesos) sobre, respectivamente, o estado $x(k)$ e a ação de controle $u(k)$.

- A matriz Q é positiva semidefinida, ou seja, $Q = Q^T \geq 0$.

- A matriz R é positiva definida, ou seja, $R = R^T > 0$.

- As matrizes de ponderação Q e R são varáveis de projeto que devem ser fornecidas pelo projetista.

- Pode-se pensar nesse problema de controle como um problema de otimização em que deseja-se minimizar o funcional de custo

$$J = x(N)^T M x(N) + \sum_{k=0}^{N} \left(x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k) \right)$$

sujeito a restrição

$$-x(k+1) + Ax(k) + Bu(k) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

- Esse tipo de problema com restrição pode ser resolvido usando-se o método dos multiplicadores de Lagrange.
- O método consiste em adicionar a restrição ao funcional de custo multiplicada por uma variável auxiliar λ (conhecida como multiplicador de Lagrange).
- Assim, o problema torna-se um problema de otimização sem restrição, cujo Lagrangiano é dado por

$$\mathcal{L}(x, u, \lambda) = \textstyle\sum_{k=0}^{N} \Bigg(\frac{1}{2} x(k)^T Q x(k) + \frac{1}{2} u(k)^T R u(k) + \lambda^T(k+1) \left\{ -x(k+1) + Ax(k) + Bu(k) \right\} \Bigg)$$

- Esse problema de otimização sem restrição pode agora ser resolvido igualando a zero a derivada do Lagrangiano $\mathcal{L}(x, u, \lambda)$ com relação as variáveis $x(k)$, $u(k)$ e $\lambda(k)$.
- Portanto, obtem-se
  1. Equação da lei de controle:
  $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u(k)} = u(k)^T R + \lambda^T(k+1)B = 0$$
  2. Equação de estado:
  $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda(k+1)} = -x(k+1) + Ax(k) + Bu(k) = 0$$
  3. Equação adjunta:
  $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x(k)} = x(k)^T Q - \lambda(k)^T + \lambda(k+1)^T A = 0$$
- Essa última equação pode ser reescrita como uma equação a diferenças reversa
$$\lambda(k) = A^T \lambda(k+1) + Qx(k), \qquad \lambda(N+1) = \bar{\lambda}$$
- A lei de controle é dada por
$$u(k) = -R^{-1} B^T \lambda(k+1)$$

Regulador Linear Quadrático Ótimo

Problema LQR horizonte finito: caso discreto

- Para resolver o conjunto de equações

$$\lambda(k) = A^T\lambda(k+1) + Qx(k)$$
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

  são necessárias duas condições de contorno: $x(0)$ e $\lambda(N+1)$.

- Como $u(N)$ não tem efeito nenhum em $x(N)$, percebe-se que $u(N)$ dever ser zero para minimizar $\mathcal{L}$ (ou o custo J).
- Com $u(N) = 0$, tem-se, pela equação da lei de controle, que $\lambda(N+1) = 0$.
- As condições de contorno passam a ser

$$x(0) = x_0$$
$$\lambda(N) = Qx(N)$$

- A solução do problema de valor de contorno em dois-pontos, caracterizado pelas equações acima, não é de fácil obtenção.
- Uma abordagem possível (proposta por Bryson e Ho) assume que

$$\lambda(k) = P(k)x(k)$$

- Substituindo a equação $\lambda(k) = P(k)x(k)$ na equação da lei de controle, obtem-se

$$Ru(k) = -B^T P(k+1)x(k+1) = -B^T P(k+1)\left[Ax(k) + Bu(k)\right]$$

- Resolvendo em termos de $u(k)$, tem-se

$$u(k) = -\left(R + B^T P(k+1)B\right)^{-1} B^T P(k+1)Ax(k) = -N(k)^{-1}B^T P(k+1)Ax(k)$$

com $N(k) = R + B^T P(k+1)B$.

- Substituindo a equação $\lambda(k) = P(k)x(k)$ na equação adjunta $\lambda(k) = A^T\lambda(k+1) + Qx(k)$, obtem-se

$$\begin{aligned} P(k)x(k) &= A^T P(k+1)x(k+1) + Qx(k) \\ &= A^T P(k+1)\left[Ax(k) + Bu(k)\right] + Qx(k) \end{aligned}$$

- Substituindo a lei de controle, obtem-se

$$P(k)x(k) = A^T P(k+1)\left[Ax(k) - BN(k)^{-1}B^T P(k+1)Ax(k)\right] + Qx(k)$$

- Que pode ser reescrito como

$$\left[P(k) - A^T P(k+1)A + A^T P(k+1)BN(k)^{-1}B^T P(k+1)A - Q\right]x(k) = 0$$

- Com a equação

$$\left[P(k) - A^T P(k+1)A + A^T P(k+1)BN(k)^{-1}B^T P(k+1)A - Q\right] x(k) = 0$$

deve ser nula para todo $x(k)$, chega-se a "Equação Discreta de Riccati":

$$P(k) = A^T M(k+1)A + Q$$

com

$$M(k+1) = P(k+1) - P(k+1)B\left[R + B^T P(k+1)B\right]^{-1} B^T P(k+1)$$

- A condição de contorno passa a ser unicamente

$$P(N) = Q$$

- A lei de controle $u(k)$ é nesse caso dada por

$$u(k) = -K(k)x(k)$$

em que

$$K(k) = \left[R + B^T P(k+1)B\right]^{-1} B^T P(k+1)A$$

- O Algoritmo é dado por
  1. Seja $k = N$, $P(N) = Q$ e $K(N) = 0$
  2. Calcule $M(k) = P(k) - P(k)B\left[R + B^T P(k)B\right]^{-1} B^T P(k)$
  3. Calcule $K(k-1) = \left[R + B^T P(k)B\right]^{-1} B^T P(k)A$
  4. Calcule $P(k-1) = A^T M(k)A + Q$
  5. Faça $k = k - 1$ e volte ao passo 2
- Usando as condições:

$$u(k)^T R + \lambda^T(k+1)B = 0 \qquad \text{e} \qquad x(k)^T Q - \lambda(k)^T + \lambda(k+1)^T A = 0$$

O Lagrangiano pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \textstyle\sum_{k=0}^{N} \left(\tfrac{1}{2} x_k^T Q x_k + \tfrac{1}{2} u_k^T R u_k + \lambda_{k+1}^T \{-x_{k+1} + Ax_k + Bu_k\} \right) \\
&= \frac{1}{2} \textstyle\sum_{k=0}^{N} \left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k - \lambda_{k+1}^T x_{k+1} + (\lambda_k^T - x_k^T Q)x_k - u_k^T R u_k \right) \\
&= \frac{1}{2} \textstyle\sum_{k=0}^{N} \left(\lambda_k^T x_k - \lambda_{k+1}^T x_{k+1} \right) = \tfrac{1}{2}\lambda(0)^T x(0) - \tfrac{1}{2}\lambda(N+1)^T x(N+1)
\end{aligned}$$

- Usando o fato que $\lambda(N+1) = 0$ e que $\lambda(k) = P(k)x(k)$, tem-se

$$\mathcal{L} = J = \frac{1}{2}\lambda^T(0)x_0 = \frac{1}{2} x_0^T P(0) x_0$$

Regulador Linear Quadrático Ótimo

Problema LQR horizonte finito: caso discreto

- Resumindo, para o sistema linear invariante no tempo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \qquad x(0) = x_0$$

a lei de controle $u(k)$ que minimiza o custo

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} \left(x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k) \right)$$

é obtida da seguinte equação algébrica (recursiva) de Riccati

$$P(k) = A^T M(k+1) A + Q, \qquad P(N) = Q$$

com

$$M(k+1) = P(k+1) - P(k+1)B \left[R + B^T P(k+1) B \right]^{-1} B^T P(k+1)$$

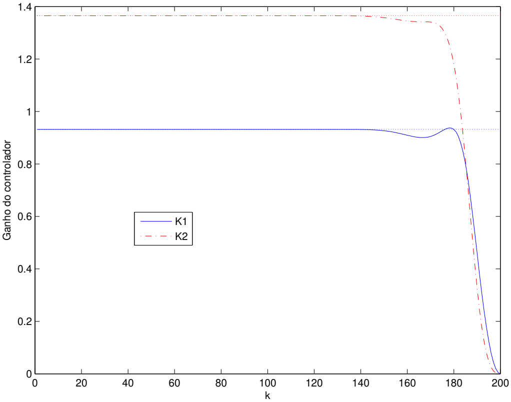
- A lei de controle ótima $u^*(k)$ nesse caso é dada por

$$u^*(k) = -K(k)x(k) \quad \text{com} \quad K(k) = \left[R + B^T P(k+1) B \right]^{-1} B^T P(k+1) A$$

- O custo ótimo é dado por

$$J = \frac{1}{2} x_0^T P(0) x_0$$

```
>> clear all, close all
>> % Planta
>> T=0.1; A=[0 1; 0 0]; B=[0; 1];
>> sysc = ss(A,B,[0 0],0);
>> sysd = c2d(sysc,T);
>> [A, B] = ssdata(sysd);
>> % Matrizes de ponderação
>> nx = 2; Q = [1 0; 0 0];
>> nu = 1; R = 1;
>> % Janela de tempo
>> N = 51;
>> % Algoritmo LQR tempo finito
>> K = zeros(nu,nx,N);
>> P = Q; K(:,:,N) = zeros(nu,nx);
>> for k=1:N-1,
>>   M = P-P*B/(R+B'*P*B)*B'*P;
>>   K(:,:,N-k) = (R+B'*P*B)\B'*P*A;
>>   P = A'*M*A+Q;
>> end
>> figure(1)
>> plot(1:N,squeeze(K(1,1,:))',1:N,squeeze(K(1,2,:)),'r-.')
>> legend('K1','K2')
>> xlabel('k'), ylabel('Ganho do controlador')
```



- Resultado: $P(0) = \begin{bmatrix} 14.6510 & 10.0000 \\ 10.0000 & 14.1510 \end{bmatrix}, \qquad K(0) = \begin{bmatrix} 0.9317 & 1.3651 \end{bmatrix}$