ES728 – Controle Avançado de Sistemas

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

- Seja o sistema discreto

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$
$$y(k) = Hx(k)$$

- Assumindo que os n estados estão disponíveis para realimentação, pode-se usar a seguinte lei de controle

$$u(k) = -Kx(k)$$

- A equação em malha fechada é dada por

$$x(k+1) = (\Phi - \Gamma K)x(k)$$

- Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ com condições iniciais nulas, tem-se

$$(zI - (\Phi - \Gamma K))X(z) = 0$$

- Portanto a equação característica em malha fechada é dada por

$$\det(zI - \Phi + \Gamma K) = 0$$

cujas raízes determinam o comportamento do sistema em malha fechada.

Projeto de controladores no espaço de estado: caso discreto

Alocação de polos

- Se a planta for controlável e observável, então as raízes da equação característica são os polos de malha fechada.
- Suponha que os polos desejados em malha fechada sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$
- Assim, o polinômio desejado é

$$\alpha_d(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

- Para alocar os polos, basta determinar K tal que

$$\det(zI - \Phi + \Gamma K) = \alpha_d(z)$$

- Exemplo. Considere o duplo integrador (discretizado pelo SOZ)

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}, \quad T = 0.1s$$

- Polos desejados: $z = 0.8 \pm j0.1\sqrt{6}$. Assim $\alpha_d(z) = z^2 - 1.6z + 0.7$.
- A equação a ser resolvida é

$$\left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right| = z^2 - 1.6z + 0.7$$

- A solução fornece: $\quad K_1 = \dfrac{0.1}{T^2} = 10, \qquad K_2 = \dfrac{0.35}{T} = 3.5$

- Nem todos os estados podem estar disponíveis, assim é necessário estimá-los.
- A equação do estimador por “predição” é dada por

$$\bar{x}(k+1) = \Phi\bar{x}(k) + \Gamma u(k)$$

em que $\bar{x}(k)$ é a estimação do estado $x(k)$.

- O erro de estimação é dado por

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k) &= \bar{x}(k) - x(k)\\ \tilde{x}(k+1) &= \Phi\bar{x}(k) + \Gamma u(k) - \Phi x(k) - \Gamma u(k)\\ &= \Phi(\bar{x}(k) - x(k)) = \Phi\tilde{x}(k)\end{aligned}$$

- Assim, o erro de estimação é $\tilde{x}(k) = \Phi^k\tilde{x}(0)$, com $\tilde{x}(0)$ é o erro inicial.
- Se a matriz Φ for estável, então $\tilde{x}(k) \to 0$.
- O erro de estimação depende apenas de Φ, não podendo ser controlado.

Projeto de controladores no espaço de estado: caso discreto

Observador de Luenberger

- O estimador de ordem completa de Luenberger é dado por

$$\begin{aligned}\bar{x}(k+1) &= \Phi\bar{x}(k) + \Gamma u(k) + L(y(k) - H\bar{x}(k)) \\ &= (\Phi - LH)\bar{x}(k) + \Gamma u(k) + Ly(k)\end{aligned}$$

  em que $\bar{x}(k)$ é o estado estimado e $\bar{y}(k) = H\bar{x}(k)$ é a saída estimada.

- Para esse estimador, a equação do erro $\tilde{x}(k) = \bar{x}(k) - x(k)$ é

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+1) &= \Phi\bar{x}(k) + \Gamma u(k) + L(y(k) - H\bar{x}(k)) - \Phi x(k) - \Gamma u(k) \\ &= (\Phi - LH)\tilde{x}(k)\end{aligned}$$

- Assim, o erro a qualquer instante é dado por

$$\tilde{x}(k) = (\Phi - LH)^k \tilde{x}(0)$$

- A equação característica é dada por

$$\det(zI - \Phi + LH) = 0$$

- Se o sistema for completamente observável, é possível escolher L de forma a alocar arbitrariamente os autovalores de $(\Phi - LH)$.

- Se o sistema for apenas detectável, é possível garantir que o erro convergirá a zero.

Projeto de controladores no espaço de estado: caso discreto

Controlabilidade e observabilidade: similares ao caso contínuo

- Se o sistema for completamente controlável, existe uma matriz K tal que

$$\det(zI - \Phi + \Gamma K) = \alpha_c(z)$$

- Fórmula de Ackermann:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \alpha_c(\Phi)$$

em que $\mathcal{C}$ é a matriz de controlabilidade dada por

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \ldots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}$$

- Se o sistema for completamente observável, existe uma matriz L tal que

$$\det(zI - \Phi + LH) = \alpha_o(z)$$

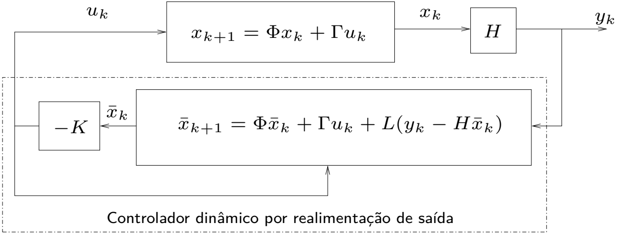
- Fórmula de Ackermann:

$$L = \alpha_o(\Phi)\mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$$

em que $\mathcal{O}$ é a matriz de observabilidade dada por

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ \vdots \\ H\Phi^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Similar ao caso contínuo, pode-se usar a lei da separação e projetar de forma independente o controlador e o observador.



- A equação dinâmica para o erro de estimação $\tilde{x}(k) = \bar{x}(k) - x(k)$ é dada por

$$\tilde{x}(k+1) = (\Phi - LH)\tilde{x}(k)$$

- Para essa configuração, o sistema aumentado em malha fechada passa a ser

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - LH & 0 \\ -\Gamma K & \Phi - \Gamma K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ x(k) \end{bmatrix}$$

- A função de transferência do controlador, de $Y(z)$ para $U(z)$, é dada por

$$D(z) = -K\left(zI - \Phi + \Gamma K + LH\right)^{-1} L$$

Projeto de controladores no espaço de estado: caso discreto

Exemplo de aplicação: duplo integrador

- O controlador que aloca os polos em $z = 0.8 \pm j0.1\sqrt{6}$ é dado por $K = \begin{bmatrix} 10 & 3.5 \end{bmatrix}$.
- Supondo que os estados não estejam disponíveis, é possível projetar um estimador de ordem completa resolvendo a equação característica: $\det(zI - \Phi + LH) = 0$
- O ganho L do estimador que aloca os polos em $z = 0.4 \pm j0.4$ é dado por $L = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 5.2 \end{bmatrix}$
- O controlador é dado por $D(z) = U(z)/Y(z) = -K\left(zI - \Phi + \Gamma K + LH\right)^{-1} L$
- Algoritmo em Matlab:

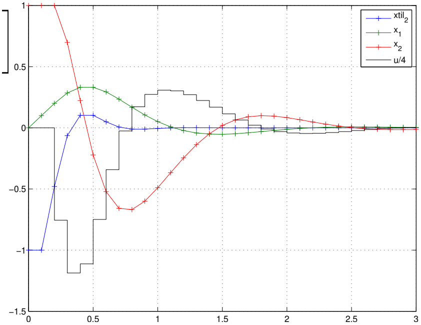
```
>> T = 0.1; A = [1 T; 0 1]; B = [T^2/2 ; T]; H = [1 0];
>> K = acker(A,B,0.1*[8+i*sqrt(6) 8-i*sqrt(6)])
   10.0000    3.5000
>> L = acker(A',H',0.4*[1+i 1-i])'
    1.2000
    5.2000
>> z = tf('z',T);
>> Dz = -K/(z*eye(2) - A + B*K + L*H)*L;
>> zpk(minreal(Dz))
  -30.2 (z-0.8278)
---------------------
(z^2  - 0.4z + 0.34
```

Projeto de controladores no espaço de estado: caso discreto

Exemplo de aplicação: duplo integrador

- O sistema aumentado em malha fechada é dado por

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - LH & 0 \\ -\Gamma K & \Phi - \Gamma K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ x(k) \end{bmatrix}$$



- Algoritmo em Matlab:

```
>> Ag = [A-L*H  zeros(2,2); -B*K A-B*K];
>> eig(Ag)
ans =
   0.4000 + 0.4000i
   0.4000 - 0.4000i
   0.8000 + 0.2449i
   0.8000 - 0.2449i
>> % Resposta a condição inicial:
>> % xp(0)=[0; 1] e xe(0)=[0; 0]
>> sistema = ss(Ag,zeros(4,1),eye(4),zeros(4,1),T);
>> [y,t,x]=initial(sistema,[0 -1 0 1]',3);
>> u = -K*(x(:,1:2) + x(:,3:4))'; % Lei de controle
>> plot(t,x(:,[2 3 4]),'-+'),grid
>> hold on
>> stairs(t,u/4,'k-')
>> legend('xtil_2','x_1','x_2','u/4')
>> planta_tf = minreal(H/(z*eye(2) - A)*B);
>> malha_fechada_tf = minreal(feedback(planta_tf,Dz,+1));
```

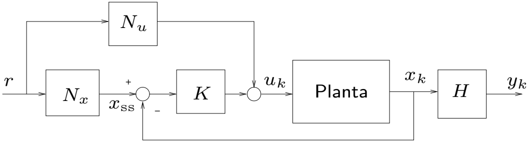
Projeto de controladores no espaço de estado: caso discreto

Projeto de servossistemas

- Seja o sistema discreto

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$
$$y(k) = Hx(k)$$

- Considere o diagrama de controle abaixo.



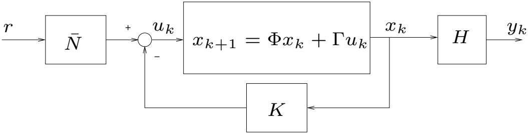
- O projeto (similar ao caso contínuo) consiste em determinar a lei de controle $u_k = N_u r - K(x_k - x_{ss})$ com os ganhos N_u, N_x e K tais que a saída $y_k \to r$.
- Assumindo

$$x_{ss} = N_x r, \qquad u_{ss} = N_u r$$
$$y_{ss} = Hx_{ss} = r$$

obtem-se (se o sistema for inversível)

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - I & \Gamma \\ H & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

- Definindo $\bar{N}$ como
$$\bar{N} = N_u + KN_x$$
a lei de controle é dada por
$$u_k = \bar{N}r - Kx_k$$
e o sistema em malha fechada fica sendo
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (\Phi - \Gamma K)x_k + \Gamma \bar{N} r \\ y_k &= Hx_k \end{aligned}$$
- O diagrama de blocos correspondente está apresentado na figura abaixo.



- Caso todos os estados não estejam disponíveis para realimentação, pode-se utilizar um estimador. Nesse caso, a lei de controle passa a ser
$$u_k = -K(\bar{x}_k - x_{ss}) + N_u r$$
com $\bar{x}_k$ o estado estimado.

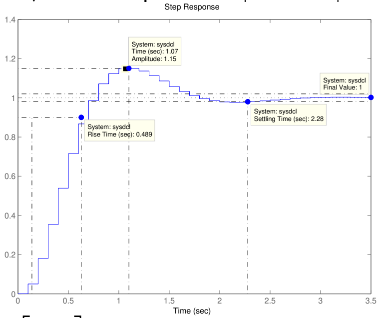
Projeto de controladores no espaço de estado: caso discreto

Projeto de servossistemas

- Exemplo. Considere o duplo integrador discretizado ($T = 0.1s$) dado por

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.1000 \\ 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.0050 \\ 0.1000 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- O controlador que aloca os polos em $z = 0.8 \pm j0.1\sqrt{6}$ é dado por $K = \begin{bmatrix} 10 & 3.5 \end{bmatrix}$.



- Os ganhos N_x e N_u são dados por

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - I & \Gamma \\ H & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} N_x \\ \hline N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

- Assim $\bar{N} = N_u + KN_x = 10$.

- O sistema em malha fechada passa a ser

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9500 & 0.0825 \\ -1.000 & 0.6500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.05 \\ 1.00 \end{bmatrix} r, \qquad y(k) = Hx(k)$$

- A função de transferência é dada por $H_{ry} = 0.05 \dfrac{z+1}{z^2 - 1.6z + 0.7}$.

- Casos os estados não estejam disponíveis, pode-se utilizar um estimador.
- A lei de controle passa ser

$$\begin{aligned} u(k) &= -K(\bar{x}(k) - x_{ss}) + N_u r = -K(\bar{x}(k) - N_x r) + N_u r \\ &= (N_u + KN_x)r - K\bar{x}(k) \\ &= \bar{N}r - K\bar{x}(k) \end{aligned}$$

- O sistema completo com o estimador é dada por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ &= \Phi x(k) - \Gamma K\bar{x}(k) + \Gamma\bar{N}r \end{aligned}$$

$$y(k) = Hx(k)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= (\Phi - LH)\,\bar{x}(k) + \Gamma u(k) + Ly(k) \\ &= (\Phi - LH - \Gamma K)\,\bar{x}(k) + LHx(k) + \Gamma\bar{N}r \end{aligned}$$

- O sistema aumentado em malha fechada passa a ser

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \bar{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & -\Gamma K \\ LH & \Phi - LH - \Gamma K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \bar{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma\bar{N} \\ \Gamma\bar{N} \end{bmatrix} r$$

- O ganho L do estimador que aloca os polos em $z = 0.8 \pm j0.4$ é $L = \begin{bmatrix} 0.4 & 2.0 \end{bmatrix}^T$.
- O algoritmo abaixo simula o sistema em malha fechada com o estimador.

```
>> T = 0.1; A = [0 1; 0 0]; B = [0; 1]; H = [1 0];
>> sysc = ss(A,B,H,0);
>> sysd = c2d(sysc,T);
>> % Ganhos do controlador e do estimador
>> K = [10 3.5]; L = [0.4; 2.0];
>> % Calcula Nu, Nx e Nb
>> N=[sysd.a-eye(2) sysd.b; sysd.c 0]\[0;0;1];
>> Nx = N(1:2); Nu = N(3); Nb = Nu + K*Nx;
>> % Sistema em malha fechada sem estimador
>> sysd_cl=ss(sysd.a-sysd.b*K,sysd.b*Nb,H,0,T);
>> % Sistema em malha fechada com estimador
>> Ag = [sysd.a, -sysd.b*K;
         L*H, sysd.a-L*H-sysd.b*K];
>> Bg = [sysd.b*Nb; sysd.b*Nb];
>> sysd_ag = ss(Ag, Bg,[H zeros(1,2)],0,T);
>> % Condições iniciais
>> xi_p = [0.4 -2]; xi_e = [0 0];
>> % Simula uma entrada em degrau
>> TF = 5; t = 0:T:TF; r = ones(1,length(t));
>> lsim(sysd_ag,r,t,[xi_p xi_e]), hold on
>> lsim(sysd_cl,r,t,xi_p), axis([0 TF -0.2 1.6])
>> legend('Controlador usando estados do estimador',['Controlador usando ' ...
                     'estados da planta'],'Location','Best')
```