ES728 – Controle Avançado de Sistemas

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

- Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0$$

- Nesse problema, deseja-se encontrar uma lei de controle na forma

$$u(t) = -Kx(t)$$

de forma a minimizar o custo quadrático

$$J = \int_0^{\infty} \big(x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)\big)\, \mathrm{d}t$$

em que as matrizes Q e R são matrizes de ponderação (pesos) sobre, respectivamente, o estado $x(t)$ e a ação de controle $u(t)$.

- A matriz Q é positiva semidefinida, ou seja, $Q = Q^T \geq 0$.

- A matriz R é positiva definida, ou seja, $R = R^T > 0$.

- As matrizes de ponderação Q e R são varáveis de projeto que devem ser fornecidas pelo projetista.

- O seguinte Lema será útil para a obtenção da solução do problema LQR.

Lemma (Feedback Invariant)

Seja P uma matriz simétrica. Para toda entrada de controle $u(t)$, $t \in [0, \infty)$ tal que $x(t) \to 0$ com $t \to \infty$, então

$$\int_0^\infty x(t)^T (A^T P + PA) x(t) + 2x(t)^T PBu(t) \mathrm{d}t = -x(0)^T P x(0)$$

Demonstração.

Completando o quadrado, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^T (A^T P + PA) x + 2x^T PBu \mathrm{d}t &= \int_0^\infty (x^T A^T + u^T B^T) Px + x^T P (Ax + Bu) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}(x^T P x)}{\mathrm{d}t} \\
&= \lim_{t \to \infty} x(t)^T P x(t) - x(0)^T P x(0) \\
&= -x(0)^T P x(0)
\end{aligned}$$

□

- Agora fica fácil determinar a solução do problema LQR.

Regulador Linear Quadrático Ótimo

Problema LQR horizonte infinito

- O Lema anterior diz que:

$$\int_0^\infty x(t)^T(A^TP + PA)x(t) + 2x(t)^TPBu(t)\mathrm{d}t + x(0)^TPx(0) = 0$$

- Assim, a função custo J pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \left(x(t)^TQx(t) + u(t)^TRu(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= x(0)^TPx(0) + \int_0^\infty \left[x(t)^T\left(Q + A^TP + PA\right)x(t) + u^TRu + 2x^TPBu\right]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

- Percebendo que

$$u^TRu + 2x^TPBu = (u - \bar{u})^TR(u - \bar{u}) - x^TPBR^{-1}B^TPx$$

com

$$\bar{u} := -R^{-1}B^TPx$$

- O funcional de custo fica sendo

$$J = J_0 + \textstyle\int_0^\infty (u - \bar{u})^TR(u - \bar{u})\mathrm{d}t$$

com

$$J_0 = x(0)^TPx(0) + \textstyle\int_0^\infty x(t)^T\left(Q + A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP\right)x(t)\mathrm{d}t$$

Regulador Linear Quadrático Ótimo

Problema LQR horizonte infinito

- Agora fica claro que a solução do problema

$$\min_u J = J_0 + \int_0^\infty (u-\bar{u})^T R(u-\bar{u})\mathrm{d}t$$

com

$$J_0 = x(0)^T P x(0) + \int_0^\infty x(t)^T \left(Q + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P\right) x(t)\mathrm{d}t$$

é dada por

$$u = \bar{u}$$

ou seja

$$u = -Kx, \quad \text{com} \quad K = R^{-1}B^T P$$

com a matriz P solução da seguinte Equação Algébrica de Riccati

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

- Com essa solução, o custo ótimo fica sendo

$$J = x_0^T P x_0$$

Regulador Linear Quadrático Ótimo

Problema LQR horizonte infinito

- Resumindo, a solução do problema LQR é obtida da seguinte equação de Riccati:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

- A lei de controle é dada por

$$u(t) = -Kx(t), \quad \text{com} \quad K = R^{-1}B^T P$$

- A solução ótima não necessariamente garante estabilidade.

- Exemplo: considere o problema LQR dado por

$$\min_u J = \int_0^\infty u(t)^2 \mathrm{d}t \quad \text{sujeito a} \quad \dot{x}(t) = x(t) + u(t)$$

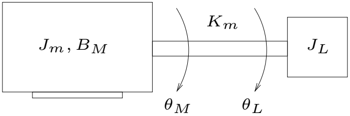
  Claramente, tem-se $u = 0$. No entanto o sistema em malha fechada será instável.

- Para garantir que $P > 0$ e que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável, é suficiente que (A, B) seja controlável e que (A, Q) seja observável.

- Controle por Matlab:

```
>> % A matriz P pode ser determinada pelo comando:
>> [P] = care(A,B,Q,R);
>> % O ganho ótimo K e a matriz P são obtidos pelo comando:
>> [K, P] = lqr(A,B,Q,R);
```

- Exemplo: Considere o problema de projetar um controlador de torque ótimo para o sistema motor-carga abaixo.



- O modelo que descreve o comportamento dinâmico desse sistema é dada por

$$J_m\ddot{\theta}_m + B_m\dot{\theta}_m + K_m(\theta_m - \theta_L) = T_m$$
$$J_L\ddot{\theta}_L - K_m(\theta_m - \theta_L) = 0$$

- Pode-se simplificar esse modelo assumindo que o eixo é rígido e não se deforma, ou seja, que $K_m \to \infty$.

- Com essa simplificação, o modelo passa a depender apenas de θ_m:

$$J\ddot{\theta}_m + B_m\dot{\theta}_m = T_m, \qquad \text{com} \quad J = J_m + J_L$$

Regulador Linear Quadrático Ótimo

Exemplo de aplicação do controlador LQR

- A função de transferência que relaciona a entrada de torque T_m com o deslocamento θ_m é dada por

$$\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{J} \frac{1}{s(s + B_m/J)}$$

- A função de transferência que relaciona a entrada de torque T_m com a velocidade do eixo $\omega(t) = \dot{\theta}_m(t)$ é dada por

$$\frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{J} \frac{1}{s + B_m/J}$$

- Esse último modelo representa um processo de primeira ordem.

- Escolhendo o estado $x(t) = \omega(t)$, tem-se o seguinte modelo no espaço de estado:

$$J\dot{x}(t) = -B_m x(t) + T_m(t)$$

- Definindo as variáveis $a = -B_m/J$ e $u(t) = T_m(t)/J$, tem-se finalmente

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \qquad \leftrightarrow \qquad G(s) = \frac{1}{s - a}$$

- Como o problema é escalar, a função custo pode ser escolhida como

$$J = \int_0^\infty x(t)^2 + ru(t)^2 \mathrm{d}t$$

com r um escalar positivo.

- A equação algébrica de Riccati é dada por

$$ap + pa - pr^{-1}p + 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad p^2 - 2arp - r = 0$$

- A solução positiva é dada por

$$p = ar + \sqrt{(ar)^2 + r}$$

- A lei de controle ótima é $u(t) = -kx(t)$ com k dado por

$$k = p/r = a + \sqrt{a^2 + 1/r}$$

- Assim, o sistema em malha fechada passa a ser:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t) = -\sqrt{a^2 + 1/r}\, x(t)$$

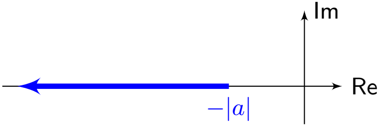
Regulador Linear Quadrático Ótimo

Exemplo de aplicação do controlador LQR

- Os polos do sistema em malha fechada estão localizados em

$$s = -\sqrt{a^2 + 1/r}$$

- Portanto, o lugar das raízes (com relação a r) para o sistema em malha fechada começa em $s = -|a|$ para $r = \infty$ e move-se em direção a $-\infty$ sobre o eixo real para $r \to 0$.



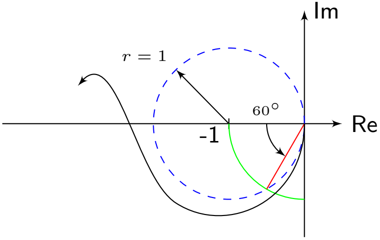
- Note que o lugar das raízes em função de $k = a + \sqrt{a^2 + 1/r}$ é o mesmo para ambas as planta $G(s)$ estável ($a < 0$) e $G(s)$ instável ($a > 0$).

- Para $a > 0$, a energia mínima necessária para estabilizar a planta (correspondente a $r \to \infty$) é obtida com a entrada

$$u(t) = -2|a|x(t)$$

que move os polos de $s = a$ para a sua imagem em $s = -a$.

- Para o controlador LQR, o diagrama de Nyquist de $L(\mathrm{j}\omega) = kG(\mathrm{j}\omega)$ nunca cruza o disco de raio 1 centrado em -1.



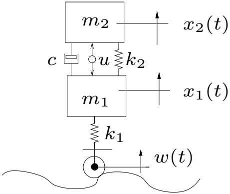
- Assim, em todas as frequências, tem-se

$$\left| \frac{1}{1 + L(\mathrm{j}\omega)} \right| \leq 1$$

- Isso é óbvio para a planta estável (com $a < 0$) já que $k > 0$ e portanto a fase de $L(\mathrm{j}\omega) = k/(s - a)$ varia de 0° (com $\omega \to 0$) até -90° (em $\omega \to \infty$).

- Portanto, o ganho pode variar no intervalo $(1/2, +\infty)$ e a fase no intervalo $(-60^\circ, +60^\circ)$ sem que o número de envolvimento do ponto -1 se altere.

- **Projeto de uma suspensão ativa** (`doi.org/10.1080/00423117608968414`):



1. Determine a equação de movimento desse sistema.
2. Definindo $z = \begin{bmatrix} x & \dot{x} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix}^T$, reescreva na forma:
$$\dot{z}(t) = Az(t) + B_1 w + B_2 u(t)$$
determinando as matrizes A, B_1 e B_2.
3. Determine as frequências naturais e amortecimentos. Realize uma análise completa na frequência usando o diagrama de Bode da suspensão em malha aberta.
4. Analise a resposta da suspensão em malha aberta a um degrau.

5. Projete uma lei de controle $u(t) = -Kz(t)$ tal que a matriz de malha fechada

   $$A - B_2 K \qquad \text{tenha polos em } -7 \pm i \text{ e } -5 \pm 5i$$

   Nesse caso, o sistema em malha fechada fica sendo

   $$\dot{z} = (A - B_2 K)z + B_1 w$$

6. Analise a resposta ao degrau do sistema ativo com a lei de controle $u(t) = -Kz(t)$ e constate que existe erro estacionário.

7. Para eliminar o erro estacionário, reescreva o sistema aplicando a mudança de variável:

   $$q_1(t) = z_1(t) - w, \quad q_2(t) = z_2(t) - w, \quad q_3(t) = z_3(t), \quad q_4(t) = z_4(t)$$

   resultando em

   $$\dot{q}(t) = Aq(t) + B_2 u(t)$$

8. Calcule um ganho K para o novo modelo no estado q e mostre que $z_1(\infty) = z_2(\infty) = w$.

9. Usando a lei de controle $u(t) = -Kq(t)$ no modelo original

$$\dot{z}(t) = Az(t) + B_1 w + B_2 u(t)$$

   mostre que $z_1(\infty) = z_2(\infty) = w$.

10. Usando a teoria do LQR, projete K para $Q = I$ e $R = \{1, 10, 100, 1000\} \times 10^{-6}$. Discuta como a escolha de Q e R afeta a resposta do sistema.

11. Realize uma análise de sensibilidade, alterando ligeiramente os parâmetros do sistema. Discuta como a robustez do controlador varia em termos de Q e R.

12. Compare o desempenho, no tempo e na frequência, do sistema em malha aberta com o sistema em malha fechada com os controladores projetados.

13. Compare também o esforço de controle usando o gráfico de $u(t)$.

14. Suponha que os estados não estejam disponíveis, projete um observador de Luenberger de ordem completa.

15. Verifique o desempenho do sistema usando o estimador.

- Considere o sistema linear discreto invariante no tempo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \qquad x(0) = x_0$$

- Deseja-se encontrar uma lei de controle $u(k)$ de forma a minimizar o custo

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k) \right)$$

em que as matrizes $Q = Q^T \geq 0$ e $R = R^T > 0$ são matrizes de ponderação.

- Sob as condições de controlabilidade do par (A, B) e observabilidade do par (A, Q), a solução ótima é obtida da seguinte equação algébrica de Riccati

$$A^T PA - P - A^T PB(R + B^T PB)^{-1} B^T PA + Q = 0$$

- A lei de controle ótima u no caso é dada por

$$u(k) = -Kx(k), \quad \text{com} \quad K = \left[R + B^T PB\right]^{-1} B^T PA$$

- O custo ótimo é dado por

$$J = \frac{1}{2} x_0^T P x_0$$

- Algoritmo no Matlab

```
>> T = 0.1; Ac = [0 1; 0 0]; Bc = [0; 1];
>> sysc = ss(Ac,Bc,[0 0],0);
>> sysd = c2d(sysc,T);
>> [A, B] = ssdata(sysd);
>> Q = [1 0; 0 0]; R = 1; % Matrizes de ponderação
>> [P] = dare(A,B,Q,R) % Fornece a matriz P
>> P
   14.6510   10.0000
   10.0000   14.1510
>> [K, P] = dlqr(A,B,Q,R) % Fornece o ganho ótimo K e a matriz P
>> K
    0.9317    1.3651
>> P
   14.6510   10.0000
   10.0000   14.1510
>> eig(P)'
   4.3978   24.4041
>> eig(A-B*K)
   0.9294 + 0.0658i
   0.9294 - 0.0658i
>> abs(eig(A-B*K))'
    0.9317    0.9317
```

- Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu + w$$
$$y = Cx + v$$

onde w representa o ruído de processo e v o ruído de medida.

- Considera-se que w e v sejam ruídos brancos Gaussianos não-correlacionados de média zero com covariâncias $W \geq 0$ e $V > 0$, ou seja:

$$E\left\{\begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(\tau)^T & v(\tau)^T \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}\delta(t-\tau)$$

com $E\{m\}$ denotando o valor médio esperado (esperança matemática ou expectância) da variável aleatória m.

- O objetivo do problema LQG é determinar uma lei de controle u^* (ótima) que minimize o seguinte custo:

$$J = E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left(x^T Q x + u^T R u\right) \mathrm{d}t\right\}$$

com $Q = Q^T \geq 0$ e $R = R^T > 0$.

- Ruído Gaussiano: Refere-se a uma perturbação estatística que segue a função densidade de probabilidade Gaussiana. Em contextos práticos, muitos fenômenos naturais apresentam ruídos que são bem modelados como Gaussianos.

- Valor Médio (ou Esperado): Representado por $E\{\}$, é uma média ponderada dos possíveis valores que uma variável aleatória pode tomar. No contexto de ruído, o valor médio é frequentemente zero, indicando que, em média, o ruído não tem um valor líquido positivo ou negativo.

- Covariância: Mede a relação linear entre duas variáveis aleatórias. No contexto de controle, as matrizes de covariância W e V dão uma ideia da incerteza ou variabilidade associada ao ruído de processo e de medida, respectivamente.

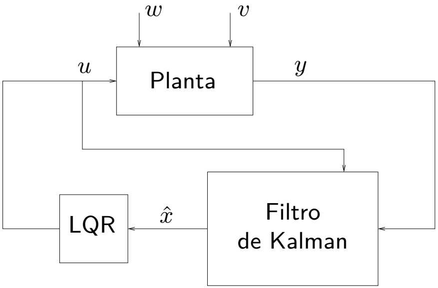
- Estimador: Em sistemas de controle, frequentemente é desejável estimar o estado de um sistema com base em medidas disponíveis. Um estimador (como o Filtro de Kalman) usa essas medidas para fornecer a melhor estimativa possível do estado real do sistema.

- A solução do problema LQG é a combinação de uma lei de realimentação

$$u(t) = -K\hat{x}(t)$$

  em que:
  - o ganho ótimo K é obtido do problema LQR;
  - o estado ótimo $\hat{x}(t)$ é obtido do filtro de Kalman.

- A figura abaixo apresenta a estrutura do princípio da separação.



- Filtro de Kalman: Esse filtro possui a estrutura típica de um estimador completo de estado (observador), ou seja:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

- O ganho ótimo L que minimiza o erro de estimação:

$$E\left\{(x-\hat{x})^T(x-\hat{x})\right\}$$

é dado por

$$L = YC^TV^{-1}$$

em que a matriz $Y = Y^T \geq 0$ é a solução única da seguinte equação algébrica de Riccati

$$YA^T + AY - YC^TV^{-1}CY + W = 0$$

- Como o princípio da separação é válido, o controlador e o observador podem ser projetados de forma independente.

- O problema LQG combina um estimador ótimo com um ganho de realimentação ótimo, ambos de estado completo.

Projeto de controladores ótimos

Projeto de controladores LQG

- O sistema aumentado em malha fechada passa ser

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ x-\hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x-\hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$$

  com K o ganho LQR e L o ganho do Filtro de Kalman.

- A função de transferência do controlador é dada por

$$K(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \left[\begin{array}{c|c} A-BK-LC & L \\ \hline -K & 0 \end{array}\right]$$

- Usando o fato de que $K = R^{-1}B^TP$ e $L = YC^TV^{-1}$, tem-se

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A-BR^{-1}B^TP-YC^TV^{-1}C & YC^TV^{-1} \\ \hline -R^{-1}B^TP & 0 \end{array}\right]$$

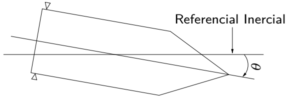
  com P e Y a solução das seguintes equações algébricas de Riccati:

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$
$$YA^T + AY - YC^TV^{-1}CY + W = 0$$

- Percebam a dualidade entre os problemas:

$$[P] = \mathrm{care}(A,B,Q,R) \qquad \text{e} \qquad [Y] = \mathrm{care}(A^T,C^T,W,V)$$

- Exemplo: Considere o esquema de controle de um satélite apresentado na figura abaixo (Franklin, 1994).



- A equação que descreve a dinâmica desse sistema é dada por

$$I_c\ddot{\theta}(t) = T_c(t)$$

com I_c o momento de inércia do satélite e T_c o torque de controle.

- Adicionando o ruído w e fazendo $u(t) = T_c(t)/I_c$, tem-se

$$\ddot{\theta}(t) = u(t) + w(t)$$

- Aplicando Laplace, chega-se ao duplo integrador

$$\Theta(s) = \frac{1}{s^2}\left(U(s) + W(s)\right)$$

- A saída mensurável de interesse é o ângulo de rotação, ou seja: $y(t) = \theta(t)$

- Na forma de estado, tem-se

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t)$$
$$y(t) = Cx + v(t)$$

com as matrizes de estado ($x_1 = \dot{\theta}$ e $x_2 = \theta$) dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Suponha que o sistema de atuação e de medição estejam contaminados por ruídos $w(t)$ e $v(t)$, respectivamente, com matrizes de covariância

$$W = 0.05 I_2 \quad \text{e} \quad V = 0.01$$

- O objetivo é projetar um controlador LQG de forma a minimizar o custo

$$J = E\left\{ \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(x^T Q x + u^T R u \right) \mathrm{d}t \right\}$$

- Suponha que o interesse maior seja ponderar $\dot{\theta}(t)$ e a energia do controlador $u(t)$. Uma escolha, seria

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R = 10;$$

Projeto de controladores ótimos

Projeto de controladores LQG

- O ganho LQR $K = R^{-1}B^TP$ é obtido da solução da seguinte equação de Riccati:
$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$
- Primeiramente, deve-se verificar se o custo "observa" os estados instáveis. Para isso, basta verificar o posto da seguinte matriz de observabilidade:
$$\mathcal{O}(A,Q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- Como essa matriz não tem posto cheio, não será possível obter uma solução estritamente positiva da equação de Riccati. Assim, a matriz Q é alterada de forma a ponderar o deslocamento θ:
$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(ou, por exemplo, } Q = I\text{)}$$
- A matriz de observabilidade $\mathcal{O}(A,Q)$ agora tem posto 2. A solução P da equação de Riccati e o respectivo ganho K são dados por:
$$P = \begin{bmatrix} 7.9527 & 3.1623 \\ 3.1623 & 2.5149 \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} 0.7953 & 0.3162 \end{bmatrix}$$

- O ganho de Kalman $L = YC^TV^{-1}$ é obtido da solução da equação de Riccati:

$$YA^T + AY - YC^TV^{-1}CY + W = 0$$

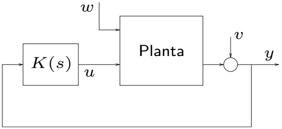
- Resolvendo a equação acima obtem-se:

$$Y = \begin{bmatrix} 0.0688 & 0.0224 \\ 0.0224 & 0.0308 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 2.2361 \\ 3.0777 \end{bmatrix}$$

- A função de transferência do controlador é dada por

$$K(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \left[\begin{array}{c|c} A - BK - LC & L \\ \hline -K & 0 \end{array}\right] = -K\left(sI - (A - BK - LC)\right)^{-1} L$$
$$= \frac{-2.752s - 0.7071}{s^2 + 3.873s + 5} = -2.7515\frac{s + 0.257}{s^2 + 3.873s + 5}$$

- A figura abaixo apresenta a estrutura do sistema em malha fechada.



Projeto de controladores ótimos

Projeto de controladores LQG: caso discreto

- Considere o sistema discreto:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + v(k)$$

onde $w(k)$ e $v(k)$ são ruídos brancos Gaussianos não correlacionados com média zero e covariâncias $W \geq 0$ e $V > 0$.

- O objetivo é encontrar uma lei de controle ótima que minimize

$$J = E\left\{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)\right)\right\}$$

com $Q = Q^T \geq 0$ e $R = R^T > 0$.

- A solução ótima é obtida da seguinte equação algébrica de Riccati:

$$A^T PA - P - A^T PB(R + B^T PB)^{-1} B^T PA + Q = 0$$

- Com P obtido da equação acima, o ganho ótimo K fica sendo

$$K = \left[R + B^T PB\right]^{-1} B^T PA$$

- Filtro de Kalman: Para um horizonte infinito, este filtro, que é um estimador de estado completo discreto, assume a forma:

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k))$$

- O ganho ótimo L que minimiza o erro de estimação

$$E\left\{(x(k) - \hat{x}(k))^T(x(k) - \hat{x}(k))\right\}$$

é dado por

$$L = YC^T(CYC^T + V)^{-1}$$

em que Y é a solução da seguinte equação algébrica de Riccati discreta:

$$AYA^T - Y - AYC^T(V + CYC^T)^{-1}CYA^T + W = 0$$

- Pelo princípio da separação, o controlador e o observador podem ser projetados de forma independente.

- O problema LQG discreto combina um estimador ótimo (Filtro de Kalman) com um ganho de realimentação ótimo, ambos de estado completo.

- O sistema aumentado em malha fechada torna-se:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k+1)-\hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k)-\hat{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$$

com K o ganho LQR e L o ganho do Filtro de Kalman.

- A função de transferência do controlador em tempo discreto é:

$$K(z) = \frac{U(z)}{Y(z)} = \left[\begin{array}{c|c} A-BK-LC & L \\ \hline -K & 0 \end{array}\right]$$

com $K = (R + B^T PB)^{-1} B^T PA$ e $L = YC^T (V + CYC^T)^{-1}$.

- As matrizes P e Y são solução das seguintes equações algébricas de Riccati discretas

$$A^T PA - P - A^T PB(R + B^T PB)^{-1} B^T PA + Q = 0$$
$$AYA^T - Y - AYC^T (V + CYC^T)^{-1} CYA^T + W = 0$$

- A dualidade entre os problemas é evidente:

$$[P] = \mathrm{dare}(A, B, Q, R) \qquad \text{e} \qquad [Y] = \mathrm{dare}(A, C, W, V)$$