ES728 – Controle Avançado de Sistemas

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

- Considere o sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0$$

- Deseja-se projetar a lei de controle $u(t)$ por realimentação completa de estado:

$$u(t) = -Kx(t)$$

de forma a estabilizar o sistema em malha fechada abaixo:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) = A_{cl}\, x(t)$$

- Exemplo: Seja a planta $G(s)$ e sua representação no espaço de estado:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

- Suponha que o polinômio característico desejado $\alpha_c(s)$ seja dado por

$$\alpha_c(s) = s^2 + 0.40s + 0.08 \qquad \text{que fornece} \qquad \zeta = \sqrt{2}/2 \quad \text{e} \quad \omega_n = \sqrt{2}/5$$

- Assim, os polos em malha fechada devem ser alocados em $|sI - A_{cl}| = \alpha_c$:

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right| = s^2 + K_1 s + K_2 = s^2 + 0.40s + 0.08$$

- Cuja solução claramente fornece $K_1 = 0.40$ e $K_2 = 0.08$.

Projeto de controladores no espaço de estado

Realimentação completa de estado: fórmula de Ackermann

- A fórmula de Ackermann é usada para alocar os polos de um sistema controlável.
- Suponha que o polinômio característico desejado em malha fechada seja

$$\alpha_c(s) = |sI - A + BK| = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

- Então o ganho por realimentação completa de estado K é dado por

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \alpha_c(A)$$

- Exemplo: Deseja-se alocar em $\alpha_c = s^2 + 0.40s + 0.08$ os polos do sistema abaixo:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

- Calculando $\alpha_c(A)$ e $\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}^{-1}$, tem-se

$$\alpha_c(A) = A^2 + 0.40A + 0.08I = \begin{bmatrix} 0.08 & 0 \\ 0.40 & 0.08 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}^{-1} = I$$

- Assim, a formula de Ackermann fornece:

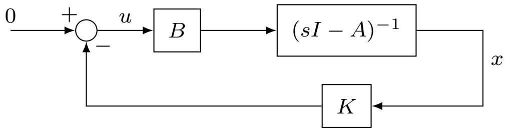
$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.08 & 0 \\ 0.40 & 0.08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.40 & 0.08 \end{bmatrix}$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Realimentação completa de estado: fórmula de Ackermann

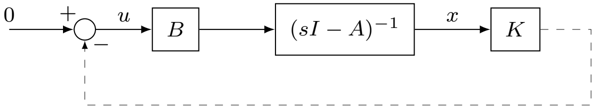
```
>> % A planta é dada por
>> A = [0 0; 1 0];  B = [1; 0];  C = [0 1];  D = 0;
>> % Suponha que seja desejado polos com zeta=sqrt(2)/2 e wn=sqrt(2)/5
>> zeta=sqrt(2)/2; wn=sqrt(2)/5;
>> s1 = -zeta*wn - j*wn*sqrt(1-zeta^2);
>> s2 = -zeta*wn + j*wn*sqrt(1-zeta^2);
>> % Assim, o polinômio característico desejado é
>> polydesejado=poly([s1 s2])
1.0000    0.4000    0.0800
>> % Para usar a formula de Ackermann, precisamos determinar
>> M = ctrb(A,B)
1     0
0     1
>> % Calculando o polinômio desejado em A:
>> pA  = A^2+0.4*A+0.08*eye(2)
>> % Equivalentemente
>> pA = polyvalm(polydesejado,A)
0.0800         0
0.4000    0.0800
>> % Aplicando a fórmula de Ackermann
>> K = [0 1]*(M\pA)
0.4000    0.0800
>> % Pode-se usar diretamente a fórmula de Ackermann
>> K = acker(A, B, [s1 s2])
0.4000    0.0800
>> % Pode-se também usar o comando place
>> K = place(A, B, [s1 s2])
0.4000    0.0800
```

- O problema de controle por realimentação de estado está ilustrado abaixo.



- Uma vez projetado K, é possível verificar a margem de ganho e de fase.

- Para isso, basta notar que a figura acima é equivalente à figura abaixo.



- Assim, a função de transferência do ramo direto $L(s)$ é dada por

$$L(s) = K(sI - A)^{-1}B$$

- Exemplo: Seja a planta $G(s)$ dada por

$$G(s) = \frac{100}{(s+10)^2}$$

com a seguinte representação no espaço de estado

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -20 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 100 \end{bmatrix}, \qquad D = 0$$

- Suponha que se deseje alocar os dois polos de malha fechada em

$$s_{1,2} = -3 \pm 15\text{j}$$

- Assim, a matriz de ganho K é dada por $K = \begin{bmatrix} -14 & 414 \end{bmatrix}$.

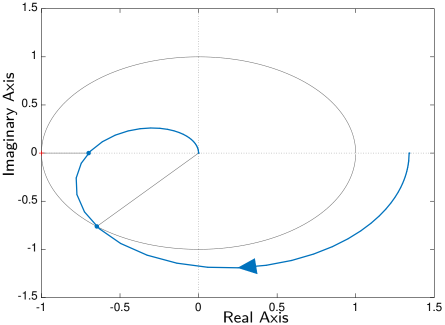
- A função de transferência do ramo direto $L(s)$ é dada por

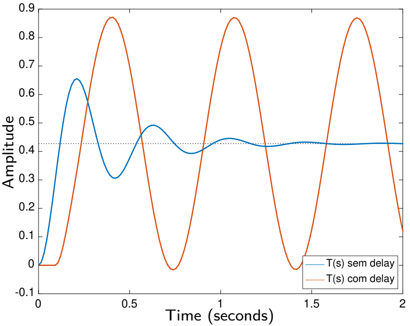
$$L(s) = K(sI - A)^{-1}B = \frac{-14s + 134}{s^2 + 20s + 100}$$

cujas margens de ganho e de fase são respectivamente dadas por

  - $\mathrm{MG} = 1.428\ (3.1\,\mathrm{dB})$, na frequência de cruzamento de fase $\omega_f = 17.07$ rad/s.
  - $\mathrm{MF} = 49.64^\circ$, na frequência de cruzamento de ganho $\omega_g = 9.33$ rad/s.

- O diagrama de Nyquist de $L(s)$ e a resposta ao degrau de $T(s)$ estão abaixo.





- Note que $\mathrm{MG} = 1.428\ (3.1\,\mathrm{dB})$ indica que K pode ser multiplicado por $\gamma \in (0, 1.428)$ mantendo os autovalores de $A - \gamma BK$ estáveis.

- Porém, analisando o Diagrama de Nyquist de $L(s)$ e notando que $L(0) = 134/100$, conclui-se que o sistema será estável para $\gamma \in (-100/134, 1.428)$.

- Já $\mathrm{MF} = 49.64^\circ$, na frequência $\omega_g = 9.33$ rad/s, fornece $\mathrm{MA} = 0.0928$, indicando que o sistema tolerá um "delay" de $\tau = 0.0928$[s] na entrada: $u(t) \to u(t - \tau)$.

Questão

Quando é possível alocar arbitrariamente os autovalores da matriz do sistema em malha fechada usando a lei de realimentação completa de estado $u = -Kx$?

Resposta

Sempre que o par (A, B) for completamente controlável.

Prova (caso SISO):

Prova da necessidade. Assuma que o sistema não é completamente controlável. Então, existe uma transformação de similaridade tal que

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad \hat{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_{11} \in \mathbb{R}^{q \times r}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{q \times n-r}$ e $A_{22} \in \mathbb{R}^{n-q \times n-r}$.
Definindo

$$\hat{K} = KP = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$

e notando que os autovalores são invariantes sob uma transformação de similaridade, tem-se

$$|sI - A + BK| = |P^{-1}(sI - A + BK)P| = |sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}|$$

Substituindo as matrizes $\hat{A}$ e $\hat{B}$, obtem-se

$$
\begin{aligned}
|sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}| &= \left| sI - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{bmatrix} sI_q - A_{11} + B_{11}K_1 & -A_{12} + B_{11}K_2 \\ 0 & sI_{n-q} - A_{22} \end{bmatrix} \right| \\
&= |sI_q - A_{11} + B_{11}K_1|\,|sI_{n-q} - A_{22}|
\end{aligned}
$$

Claramente o subsistema A_{22} não é controlável e assim não tem-se como alocar arbitrariamente todos os autovalores do sistemas.

Prova da suficiência. Assuma o sistema controlável. Defina T como

$$T = MW$$

com

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots A^{n-1}B \end{bmatrix}, \qquad W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em que os a_i são os coeficientes de

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Perceba que as matriz T é não singular. Assim, pode-se usá-la como uma transformação de similaridade. Defina um novo vetor de estado $\hat{x}$ por

$$x = T\hat{x} \quad \rightarrow \quad \hat{x} = T^{-1}x$$

Então

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}Bu$$

em que

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, o sistema está na forma canônica controlável.

Falta mostrar que nessa forma, os autovalores podem ser arbitrariamente alocados escolhendo-se a matriz K de forma apropriada.

Projeto de controladores no espaço de estado

Realimentação completa de estado

- Selecione um conjunto de autovalores desejados $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.
- Então a equação característica desejada será

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)\cdots(s-\mu_n) = 0$$
$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0$$

em que os α_i dependem dos μ_i, por exemplo, $\alpha_n = \mu_1\mu_2\cdots\mu_n$.

- Com $u = -Kx$, a equação característica do sistema é

$$\begin{aligned} 0 = |sI - A + BK| &= |sI - T^{-1}AT + T^{-1}BKT| \\ &= s^n + (a_1+\delta_1)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1}+\delta_{n-1})s + (a_n+\delta_n) \end{aligned}$$

em que os a_i são os coeficientes de $|sI - A|$ e os δ_i são os coeficientes de

$$KT = \begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad K = \begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix} T^{-1}$$

Igualando os coeficientes de ambas equações características, tem-se

$$a_1 + \delta_1 = \alpha_1, \quad a_2 + \delta_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad a_n + \delta_n = \alpha_n$$

- Portanto, se o sistema for completamente controlável, os autovalores podem ser arbitrariamente alocados no plano complexo s.

```
>> A = [7 5 10; 1 -1 0; -7 -4 -9];
>> B = [-1; 0; 1];
>> C = [-1 0 0];
>> D = 0;
>> % Cria a planta sysc no espaço de estado
>> sysc = ss(A,B,C,D);
>> % Matriz de Controlabilidade
>> M = [B A*B A^2*B];
>> % Equivalentemente
>> M = ctrb(sysc)
-1     3    -4
0    -1     4
1    -2     1
>> % Para construir a matriz W, é necessário os coeficientes de |s*I - A|
>> H = tf(sysc)
Transfer function:
s^2 + 1.221e-15 s - 1
---------------------
s^3 + 3 s^2 + 4 s + 2
>> % Os coeficientes do polinômio característico são:
>> a1 = 3; a2 = 4; a3 = 2;
>> W = [4 3 1; 3 1 0; 1 0 0]; % Matriz W
>> A transformação de similaridade será dada por
>> T = M*W
1     0    -1
1    -1     0
-1     1     1
```

Projeto de controladores no espaço de estado

Realimentação completa de estado

```
>> % O sistema na forma canônica controlável é dado por
>> Ac = T\A*T
     0     1     0
     0     0     1
    -2    -4    -3
>> Bc = T\B
     0
     0
     1
>> Cc = C*T
    -1     0     1
>> Dc = D;
>> % Suponha que se deseje autovalores em: -2+i, -2-i, -3
>> % Assim, o polinômio característico desejado é
>> poly([-2+i, -2-i, -3])
     1     7    17    15
>> % ou seja:
>> alpha1 = 7; alpha2 = 17; alpha3 = 15;
>> % Agora pode-se determinar os coeficientes como segue:
>> delta1 = alpha1 - a1; delta2 = alpha2 - a2; delta3 = alpha3 - a3;
>> % O ganho de realimentação completa de estado é dado por
>> K = [delta3 delta2 delta1]/T
    26    17    30
>> % Que fornece, como desejado, os autovalores em malha fechado:
>> eig(A-B*K)
  -3.0000 + 0.0000i  -2.0000 - 1.0000i  -2.0000 + 1.0000i
```

- Nem todos os estados podem estar disponíveis, assim é necessário estimá-los.
- A equação do estimador por “predição” é dada por

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \qquad \bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

  em que $\bar{x}(t)$ é a estimação do estado $x(t)$.
- Assume-se conhecido A, B e $u(\tau)$ para $\tau \in [0, t)$.
- O erro de estimação é dado por $\tilde{x}(t) = \bar{x}(t) - x(t)$. Assim:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{\bar{x}}(t) - \dot{x}(t)\\ \dot{\tilde{x}}(t) &= A\bar{x}(t) + Bu(t) - Ax(t) - Bu(t)\\ &= A(\bar{x}(t) - x(t)) = A\tilde{x}(t)\end{aligned}$$

- Assim, o erro de estimação é $\tilde{x}(t) = e^{At}\tilde{x}(0)$, com $\tilde{x}(0)$ o erro inicial.
- Se a matriz A for Hurwitz, i.e. estável, então $\tilde{x}(t) \to 0$.
- O erro de estimação depende apenas de A, não podendo ser controlado.

- O estimador de ordem completa de Luenberger é dado por

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + Bu + L(y - C\bar{x}) \\ &= (A - LC)\bar{x} + Bu + Ly\end{aligned}$$

  em que $\bar{x}$ é o estado estimado e $\bar{y} = C\bar{x}$ é a saída estimada.

- Para esse estimador, a equação do erro $\tilde{x}(t) = \bar{x}(t) - x(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{\bar{x}}(t) - \dot{x}(t) \\ &= A\bar{x} + Bu + L(y - C\bar{x}) - Ax - Bu \\ &= (A - LC)\tilde{x}(t)\end{aligned}$$

- Assim, o erro a qualquer instante é dado por

$$\tilde{x}(t) = e^{(A-LC)t}\tilde{x}(0)$$

- A equação característica do erro é dada por $\det(sI - A + LC) = 0$

- Se o sistema for completamente observável, é possível escolher L de forma a alocar arbitrariamente os autovalores de $(A - LC)$.

Projeto de controladores no espaço de estado

Observador de Luenberger

- Se o sistema for completamente observável, existe uma matriz L tal que

$$\det(sI - A + LC) = \alpha_o(s) \quad \text{“polinômio desejado”}$$

- Fórmula de Ackermann:

$$L = \alpha_o(A)\mathcal{O}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}^T$$

em que $\mathcal{O}$ é a matriz de observabilidade.

- O problema de alocação de polos para o observador é dual ao do controlador, já que a equação característica é dada por

$$|sI - A + LC| = |sI - A^T + C^TL^T| = |sI - A^T + C^TK| \quad \text{com } K = L^T$$

- Portanto, determinar L que aloque os polos de $A - LC$ é equivalente a determinar K que aloque os polos de $A^T - C^TK$.

- Essa equação característica representa o seguinte problema de controle

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A^Tx + C^Tu\\ u &= -Kx\end{aligned}$$

- Portanto, existe uma matriz K que aloca arbitrariamente $\lambda_i(A^T - C^TK)$ sse o par (A^T, C^T) for controlável, i.e., se $\left[\, C^T \;\; A^TC^T \;\; (A^T)^{n-1}C^T \,\right]$ tiver posto cheio.

Projeto de controladores no espaço de estado

Observador de Luenberger

- Exemplo: Seja a planta $G(s) = 1/s^2$, com a representação de estado dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = 0$$

- O sistema é observável, já que sua matriz de observabilidade é inversível:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Suponha que o polinômio desejado para o observador seja

$$\alpha_o = s^2 + 2s + 2$$

que fornece polos em $s = -1 \pm j$, com $\zeta = \sqrt{2}/2$ e $\omega_n = \sqrt{2}$.

- A equação para alocar os polos do observador é

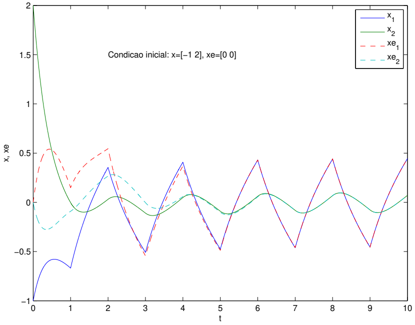
$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = s^2 + 2s + 2 \quad \Longrightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

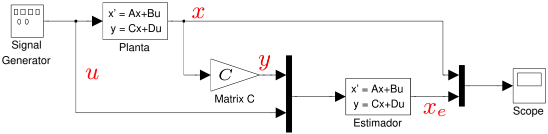
- A equação do observador é dada por

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1(t) &= -2\bar{x}_2(t) + u(t) + 2y(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) &= \bar{x}_1(t) - 2\bar{x}_2(t) + 2y(t) \end{aligned}$$

- Algoritmo em Matlab.

```
>> A = [-1 1;1 -2]; B = [1; 0]; C = [0 1]; D=0;
>> planta = ss(A,B,C,D);
>> pole(planta)
ans =
-2.6180
-0.3820
>> % Polos desejados para o estimador
>> polosdesejados = [-1+i -1-i];
>> % Ganho usando a fórmula de Ackermann
>> L = acker(A',C',polosdesejados); L = L';
>> eig(A-L*C)
ans =
-1.0000 + 1.0000i
-1.0000 - 1.0000i
>> % O estimador possui duas entradas: u(t) e y(t)
>> Ae = A-L*C;
>> Be = [L B];
>> Ce = eye(2);  % Saida com os dois estados estimados
>> De = zeros(2,2);
```





- No projeto do controlador por realimentação completa de estado, assume-se que todos os estados estão disponíveis, ou seja

$$u = -Kx$$

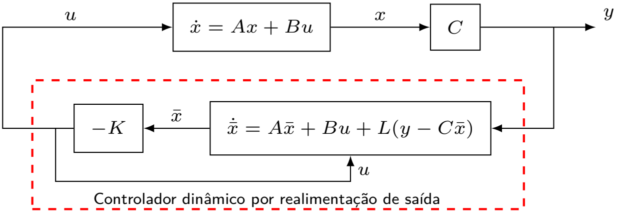
- Caso x não esteja disponível, pode-se usar o observador de Luenberger:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + L(y - C\bar{x}) = (A - LC)\bar{x} + Bu + Ly$$

- Usando $\bar{x}$ no lugar de x, a lei de controle passa a ser:

$$u = -K\bar{x}$$

- A estrutura final de controle está apresentada na figura abaixo.



- O princípio da separação afirma que o projeto do controlador e do estimador podem ser independentes, pois a estabilidade permanecerá garantida.

Projeto de controladores no espaço de estado

Princípio da separação

- Para provar o princípio da separação, substitui-se a lei $u = -K\bar{x}$ no sistema, obtendo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = Ax - BK\bar{x} = Ax - BK(x + \tilde{x})\\ &= (A - BK)x - BK\tilde{x}\end{aligned}$$

  em que $\tilde{x}$ é o erro de estimação, dado por $\tilde{x} = \bar{x} - x$.

- Usando a equação do estimador, a dinâmica do erro de estimação é dada por

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$

- Nesse caso, o sistema aumentado em malha fechada passa a ser

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A - LC & 0\\ -BK & A - BK\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}(t)\\ x(t)\end{bmatrix}$$

- O polinômio característico desse sistema é dado por

$$\det(sI - A + LC)\,\det(sI - A + BK) = \alpha_o(s)\alpha_c(s)$$

- Os polos do estimador são geralmente alocados de forma a serem de 3 a 6 vezes mais rápidos do que os polos do controlador.

- É possível obter a função de transferência do controlador $D(s)$ entre $U(s)$ e $Y(s)$.
- Para isso, substitui-se $u = -K\bar{x}$ na equação do observador:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + L(y - C\bar{x}) \quad \xRightarrow{u=-K\bar{x}} \quad \begin{cases} \dot{\bar{x}} = (A - BK - LC)\bar{x} + Ly \\ u = -K\bar{x} \end{cases}$$

- Aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$D(s) = -K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$$

- Note que a ordem do controlador $D(s)$ é a mesma do observador.
- Exemplo: Para o sistema composto pelo duplo integrador, K e L foram dados por:

$$K = \begin{bmatrix} 0.40 & 0.08 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}^T$$

- Assim, a função de transferência do controlador $D(s)$ é dada por

$$\begin{aligned} D(s) &= \begin{bmatrix} 0.40 & 0.08 \end{bmatrix} \left(sI - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.40 & 0.08 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{0.96(s + 1/6)}{s^2 + 2.4s + 2.88} \end{aligned}$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Projeto de servomecanismo

- Considere o sistema abaixo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- Defina a lei de controle por $u(t) = u_{ss} - K(x - x_{ss})$, em que u_{ss} e x_{ss} são os valores finais desejados em regime estacionário.
- É necessário determinar esses valores de forma que o sistema tenha erro nulo a uma entrada constante. Em regime permanente, tem-se

$$0 = Ax_{ss} + Bu_{ss}$$
$$y_{ss} = Cx_{ss} + Du_{ss}$$

- É preciso resolver essa equação de forma a satisfazer

$$y_{ss} = r_{ss} \qquad \text{para qualquer} \qquad r_{ss} = r$$

- Fazendo $x_{ss} = N_x r_{ss}$ e $u_{ss} = N_u r_{ss}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

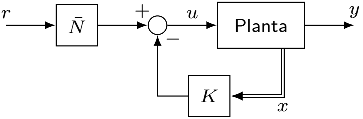
- Assumindo invertibilidade do sistema, pode-se calcular N_x e N_u, obtendo

$$u = N_u r - K(x - N_x r) = -Kx + (N_u + KN_x)r = -Kx + \bar{N}r$$

Projeto de controladores no espaço de estado
Projeto de servomecanismo

- Usando essa lei de controle o modelo de estado passa a ser

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = Ax + B(-Kx + \bar{N}r) \\ &= (A - BK)x + B\bar{N}r = \bar{A}x + \bar{B}r \\ y &= (C - DK)x + D\bar{N}r\end{aligned}$$



com o ganho K escolhido de forma que $\bar{A} = (A - BK)$ seja Hurwitz.

- Exemplo: Considere o sistema mecânico abaixo

$$\ddot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = u(t)$$

que na forma de estado (com $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$) pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + [0]u$$

- Esse sistema claramente não segue um degrau.

- Para calcular K e $\bar{N}$, usando o método proposto, assumindo-se $\omega_n = 1$, é preciso resolver

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} N_x \\ \hline N_u \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0_{2\times 1} \\ \hline 1 \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{c} N_x \\ \hline N_u \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

- O ganho K pode ser um ganho estabilizante qualquer. Por exemplo, o ganho $K_1 = 0$ e $K_2 = 2$ fornece raízes duplas em $s = -1$.

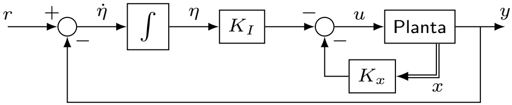
- Para o nosso exemplo, tem-se

$$\bar{N} = N_u + KN_x = 1, \qquad \bar{B} = B\bar{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \bar{A} = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

- A função de transferência do sistema em malha fechada é

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

- Claramente o erro estacionário é nulo para uma entrada constante.



- A equação que governa o servomecanismo acima é dada por

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \dot{\eta} = r - y = r - Cx$$
$$y = Cx \qquad u = -K_I\eta - K_x x$$

- O sistema aumentado passa a ser

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

- Em regime permanente, com $r(t) = r(\infty) = r$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\eta}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \eta(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

- Com $x_e(t) = x(t) - x(\infty)$, $\eta_e(t) = \eta(t) - \eta(\infty)$ e $u_e(t) = u(t) - u(\infty)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\eta}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \eta_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t)$$

- Definindo a lei de controle

$$u = -\begin{bmatrix} K_x & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix}$$

tem-se

$$u_e(t) = u(t) - u(\infty) = -K \begin{bmatrix} x_e \\ \eta_e \end{bmatrix}$$

- O problema agora se resume em encontrar um ganho K que estabilize o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\eta}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \eta_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t)$$

- Pode-se mostrar que um ganho K estabilizante existe sempre que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = n + 1$$

- Dessa forma, os sinais $x_e(t)$, $\eta_e(t)$ e $u_e(t)$ convergem para zero com $t \to \infty$.
- "Provando" assim que $\dot{\eta}(t) = \dot{\eta}_e(t) \to 0$ e consequentemente $y(t) \to r$.

- Note que o sistema em malha fechada, com $z = \begin{bmatrix} x & \eta \end{bmatrix}^T$, passa a ser

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A - BK_x & -BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} z$$

- Exemplo: Considere o sistema mecânico abaixo

$$\ddot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = u(t), \qquad \omega_n = 1$$

Assumindo a forma canônica controlável, o sistema aumentado fica sendo

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_{x_1} & K_{x_2} & K_I \end{bmatrix}$$

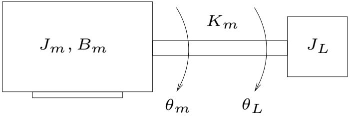
- É preciso projetar K de forma que $\bar{A} - \bar{B}K$ seja Hurwitz, ou seja, estável.

- Escolhendo o polinômio desejado $\alpha_d = (s+1)^3$, o ganho será $K = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

- A função de transferência em malha fechada fica sendo

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{(s+1)^3} \qquad \Leftarrow \qquad \text{erro estacionário nulo ao degrau}$$

- Exemplo: Suponha que se deseje projetar um servomecanismo para o sistema motor-carga de tal forma que a rotação do eixo θ_m siga uma referência desejada r.



- Assumindo que o eixo do motor é rígido e não se deforma, $\theta_m = \theta_L$, e assim a equação de movimento é dada por:

$$J\ddot{\theta}_m + B_m\dot{\theta}_m = T_m, \qquad \text{com} \quad J = J_m + J_L$$

- Definindo os estados $x_1 = \theta_m$ e $x_2 = \dot{\theta}_m$, a entrada $u(t) = T_m$ e assumindo os valores numéricos $J = B_m = 1$, a representação no espaço de estado é dada por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Projeto de servomecanismo com ação integral

- Como se deseja rastrear a rotação do eixo θ_m a saída $y(t)$ deve ser $y(t) = \theta_m$, que no espaço de estado, implica na matriz C dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- A condição para que o problema de servomecanismo tenha solução é dada por:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = n + 1 = 3 \qquad \text{“posto cheio”}$$

- Agora basta projetar K de forma que $\bar{A} - \bar{B}K$ seja estável, com $\bar{A}$, $\bar{B}$ e K dados por

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} K_{x_1} & K_{x_2} & K_I \end{bmatrix}$$

- Para o polinômio desejado $\alpha_d = (s+1)^3$, o ganho (Ackermann) é $K = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

- Note que o sistema em malha fechada, com $z = \begin{bmatrix} x & \eta \end{bmatrix}^T$, passa a ser

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} A - BK_x & -BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} z \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{(s+1)^3}$$

- O projeto do ganho K, através da alocação de polos, pode ser utilizado na tentativa de se obter um determinado desempenho.

- Porém, não é possível garantir que o desempenho desejado será obtido.

- Exemplo: Seja a planta $G(s)$ dada por

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

com a seguinte representação no espaço de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

- Suponha que se deseje o seguinte desempenho:
  - Sobressinal máximo $M_p = 15\%$;
  - Tempo de acomodação (a 2%) $t_s = 4$ segundos;
  - Erro estacionário nulo à entrada degrau.

- Para assegurar rastreamento ao degrau, será necessário utilizar o projeto de servomecanismo com ação integral.

Projeto de controladores no espaço de estado

Desempenho

- Os polos que fornecem esse desempenho, $M_p = 15\%$ e $t_s = 4$[s], são dados por

  $$s_{1,2} = -1.0150 \pm 1.6805\mathrm{j}$$

  raízes do polinômio característico

  $$s^2 + 2.03s + 3.854 = 0$$

- O sistema aumentado fica sendo

  $$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Como o sistema aumentado tem ordem 3, devido ao integrador, é necessário especificar a localização do terceiro polo.

- O ideal é alocar o polo do integrador longe dos polos dominantes, por exemplo, em $s = -100$.

- A matriz de ganho K fica sendo:

  $$K = \begin{bmatrix} 102 & 207 & -385 \end{bmatrix}$$

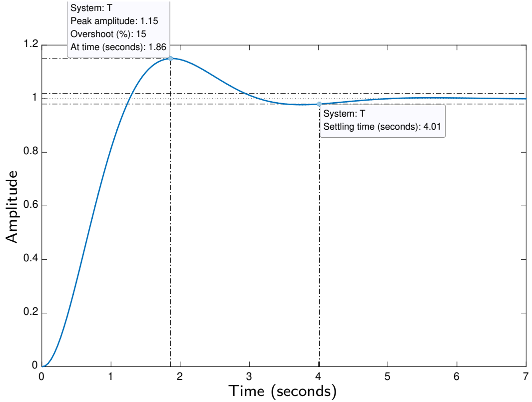
Projeto de controladores no espaço de estado

Desempenho

- Com esse ganho K, o sistema em malha fechada $T(s)$ fica sendo

$$T(s) = \frac{385.42}{(s+100)(s^2+2.03s+3.854)}$$

- A resposta ao degrau está apresentada na figura abaixo.



- Claramente, o desempenho desejado foi satisfeito.

Projeto de controladores no espaço de estado

Desempenho

- Exemplo: Suponha agora que a planta $G(s)$ seja dada por

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2}, \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

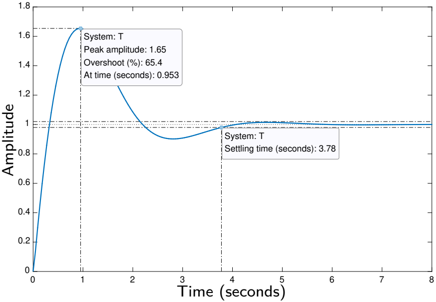
- Mantendo-se o mesmo critério de desempenho do exemplo anterior, os polos desejados permanecem os mesmos.

- O ganho K é dado por

$$K = \begin{bmatrix} 102 & -178 & -385 \end{bmatrix}$$

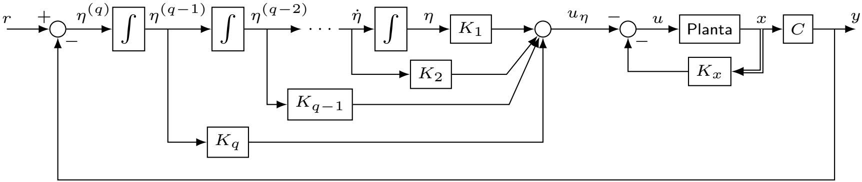
- A malha fechada fica sendo

$$T(s) = \frac{385.42(s+1)}{(s+100)(s^2+2.03s+3.854)}$$



- Claramente, o desempenho desejado não foi plenamente atendido

- No servomecanismo, é possível incluir uma cadeia de q integradores em série.



- A equação que governa esse sistema é dada por

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \eta^{(q)} = r - y$$
$$y = Cx \qquad u = -u_\eta - K_x x$$

- Para representar os integradores, basta definir o estado $z \in \mathbb{R}^q$ como segue:

$$z_1 = \eta, \qquad z_2 = \dot{\eta}, \qquad \dots \qquad z_{q-1} = \eta^{(q-2)}, \qquad z_q = \eta^{(q-1)}$$

- Assim, tem-se

$$\dot{z}_1 = z_2 \qquad \dot{z}_2 = z_3, \qquad \cdots$$
$$\dot{z}_{q-1} = z_q \qquad \dot{z}_q = \eta^{(q)} = r - y$$

- A saída u_η da cadeia de q integradores é dada por

$$\begin{aligned} u_\eta &= K_1\eta + K_2\dot{\eta} + \cdots + K_{q-1}\eta^{q-2} + K_q\eta^{q-1} \\ &= K_1 z_1 + K_2 z_2 + \cdots + K_{q-1} z_{q-1} + K_q z_q \\ &= K_I z \end{aligned}$$

com

$$K_I = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \cdots & K_q \end{bmatrix}$$

- A representação no espaço de estado para a cadeia de integradores fica sendo:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_\eta z + B_\eta(r - y) \\ u_\eta &= K_I z \end{aligned}$$

com o estado z e as matrizes $A_\eta \in \mathbb{R}^{q\times q}$ e $B_\eta \in \mathbb{R}^q$ dadas por

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{q-1} \\ z_q \end{bmatrix}, \qquad A_\eta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- As equações que governam esse sistema passam a ser:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ \dot{z} &= A_\eta z + B_\eta(r - Cx)\end{aligned}$$

com as entradas dadas por

$$\begin{aligned}u &= -u_\eta - K_x x\\ u_\eta &= K_I z\end{aligned}$$

- Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & 0\\ -B_\eta C & A_\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}u + \begin{bmatrix}0\\ B_\eta\end{bmatrix}r$$

com a lei de controle dada por

$$u = -\begin{bmatrix}K_x & K_I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix} = -K\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}$$

- Note que as matrizes têm as seguintes dimensões:

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad C \in \mathbb{R}^{1\times n}, \quad A_\eta \in \mathbb{R}^{q\times q}, \quad B_\eta \in \mathbb{R}^{q\times 1}$$

- Agora basta projetar K de forma que $\bar{A} - \bar{B}K$ seja estável, com $\bar{A}$, $\bar{B}$ e K dados por

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_\eta C & A_\eta \end{bmatrix}, \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} K_x & K_I \end{bmatrix}$$

em que a lei de controle é dada por

$$u = -\begin{bmatrix} K_x & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

- Note que o sistema em malha fechada, com $q = \begin{bmatrix} x & z \end{bmatrix}^T$, passa a ser

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} A - BK_x & -BK_I \\ -B_\eta C & A_\eta \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ B_\eta \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} q$$

- A função de transferência da cadeia de q integradores é dada por

$$U_\eta(s) = K_I (sI - A_\eta)^{-1} B_\eta \left[R(s) - Y(s) \right]$$

- Exemplo: Deseja-se que $G(s)$ siga uma parábola sem erro estacionário:

$$G(s) = \frac{1}{s-5}$$

- Isso claramente pode ser alcançado adicionando-se três integradores em série.

- Uma representação no espaço de estado é dada pelas matrizes:

$$A = 5, \qquad B = 1, \qquad C = 1, \qquad D = 0$$

- As matrizes do modelo de estado da cadeia de $q = 3$ integradores são

$$A_\eta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Agora, basta projetar $K = \left[\begin{smallmatrix} K_x & K_I \end{smallmatrix}\right]$ tal que $\bar{A} - \bar{B}K$ seja estável, com:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_\eta C & A_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Escolhendo-se os 4 polos de malha fechada em $s = -1$, a matrix K é dada por:

$$K = \left[\begin{array}{c|c} K_x & K_I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} 9 & -1 & -4 & -6 \end{array}\right]$$

- A função de transferência da cadeia de q integradores é dada por

$$\frac{U_\eta(s)}{R(s) - Y(s)} = K_I(sI - A_\eta)^{-1}B_\eta = \frac{-6s^2 - 4s - 1}{s^3}$$

- O sistema em malha fechada, com $q = \begin{bmatrix} x & z \end{bmatrix}^T$, passa a ser

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \begin{bmatrix} A - BK_x & -BK_I \\ -B_\eta C & A_\eta \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ B_\eta \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} q \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{6s^2 + 4s + 1}{(s+1)^4}$$

- O erro de rastreamento é dado por

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{s^3(s+4)}{(s+1)^4}$$

que claramente fornece um erro estacionário nulo a uma entrada tipo parábola.