ES728 – Controle Avançado de Sistemas

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

Propriedades de sinais e sistemas

Definição de normas

- O produto interno deve satisfazer as seguintes propriedades:
  1. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
  2. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$
  3. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
  4. $\langle x, x\rangle \geq 0, \qquad \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$
- Uma definição comum de produto interno para funções é dada por

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t$$

- Ortogonalidade: A função $x(t)$ é ortogonal a $y(t)$ se

$$\langle x(t), y(t)\rangle = 0$$

- Exemplo: Os coeficientes da serie de Fourier são ortogonais no intervalo $[-T/2, T/2]$ já que, para inteiros $n \neq m$ não nulos, tem-se

$$\left\langle e^{in2\pi t/T}, e^{im2\pi t/T}\right\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(n-m)2\pi t/T}\mathrm{d}t = \frac{T}{2i(n-m)\pi} e^{i(n-m)2\pi t/T}\Big|_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{T}{(n-m)\pi}\sin((n-m)\pi) = 0$$

Propriedades de sinais e sistemas

Definição de normas

- A norma deve satisfazer as seguintes propriedades:
  1. $\|x\| \geq 0, \qquad \|x\| = 0 \iff x = 0$
  2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
  3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular)
  4. $\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade de Schwarz)
  5. $\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \leq 2 \, \|x\| \, \|y\|$ (desigualdade de Cauchy-Schwarz)

- Teorema de Pitágoras: se x e y forem ortogonais, então

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

- Pode-se definir a seguinte norma (induzida pelo produto interno):

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

- Para funções, a norma induzida pelo produto interno é dada por

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

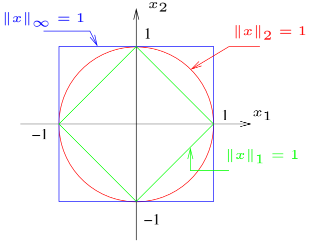
- É preciso definir apropriadamente normas para: funções, vetores, matrizes e sistemas.

Propriedades de sinais e sistemas

Normas para vetores

- Para ilustrar as diferentes normas, será usado o vetor

$$b^T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$



- Seja $p > 0$. A norma-p de um vetor $x \in \mathbb{C}^n$ é dada por

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}$$

- A norma-1 de um vetor $x \in \mathbb{C}^n$ é dada por

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i| \qquad (\|b\|_1 = 1 + 3 + 5 = 9)$$

- A norma-2 de um vetor $x \in \mathbb{C}^n$ (com x^H seu complexo conjugado) é dada por

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^H x} = \sqrt{\sum_i |x_i|^2} \qquad (\|b\|_2 = \sqrt{1 + 9 + 25} \approx 5.9)$$

- A norma-∞ de um vetor $x \in \mathbb{C}^n$ é dada por

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \qquad (\|x\|_\infty = |-5| = 5)$$

- Essas normas são ditas equivalentes pois satisfazem

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\, \|x\|_\infty\,, \qquad \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\, \|x\|_2$$

Propriedades de sinais e sistemas

Decomposição em valores singulares (SVD)

- Toda matriz (real) possui uma decomposição em valores singulares (SVD) dada por

$$A = USV^T$$

com S uma matrix (real) diagonal e U e V matrizes (reais) unitárias satisfazendo:

$$UU^T = I \qquad \text{e} \qquad V^TV = I \tag{1}$$

- Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, sua decomposição SVD é dada por $A = USV^T$ com

$$U = \begin{bmatrix} 0.8507 & -0.5257 \\ 0.5257 & 0.8507 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1.6180 & 0 \\ 0 & 0.6180 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0.5257 & -0.8507 \\ 0.8507 & 0.5257 \end{bmatrix}$$

- Para a matriz A, a matriz de autovalores Λ e a matriz de autovetores Σ são:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

portanto A não tem uma decomposição na forma modal já que Σ não é inversível.

- Pode-se mostrar que:

$$S_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)} = \sqrt{\lambda_i(AA^T)}$$

Propriedades de sinais e sistemas

Normas para matrizes

- Para os próximos exemplos, a seguinte matriz será utilizada

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Uma norma matricial, além de satisfazer as propriedades anteriores de norma, deve satisfazer a propriedade submultiplicativa:

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

- A norma matricial soma consiste na soma do valor absoluto dos elementos:

$$\|X\|_S = \textstyle\sum_{i,j} |x_{ij}| \qquad (\|A\|_S = 1 + 2 + 3 + 4 = 10)$$

- A norma matricial de Frobenius (norma Euclidiana) é dada por

$$\|X\|_F^2 = \textstyle\sum_{i,j} |x_{ij}|^2 = \operatorname{tr} X^H X \qquad (\|A\|_F = \sqrt{30} \approx 5.5)$$

- A norma máximo elemento é dada por

$$\|X\|_{\max} = \max_{i,j} |x_{ij}| \qquad (\|A\|_{\max} = 4)$$

essa não é uma norma matricial, pois não satisfaz a propriedade submultiplicativa

Propriedades de sinais e sistemas

Normas matriciais induzidas

- A norma-P matricial induzida pela norma-p vetorial é dada por

$$\|X\|_p := \max_{w \neq 0} \frac{\|Xw\|_p}{\|w\|_p}$$

- Essa definição pode ser equivalentemente escrita como

$$\|X\|_p = \max_{\|w\|_p \leq 1} \|Xw\|_p = \max_{\|w\|_p = 1} \|Xw\|_p$$

- A norma-1 induzida é dada por

$$\|X\|_1 = \max_j \textstyle\sum_i |x_{ij}| \quad \text{máximo da soma das colunas} \qquad (\|A\|_1 = 6)$$

- A norma-∞ induzida é dada por

$$\|X\|_\infty = \max_i \textstyle\sum_j |x_{ij}| \quad \text{máximo da soma das linhas} \qquad (\|A\|_\infty = 7)$$

- A norma espectral é dada por

$$\|X\|_2 = \overline{\sigma}(X) = \sqrt{\rho\left(X^H X\right)} \qquad (\|A\|_2 = \overline{\sigma}(A) \approx 5.1)$$

  em que o raio espectral $\rho(X) = \max_i |\lambda_i(X)|$ é a magnitude do maior autovalor da matriz X e $\overline{\sigma}(X)$ é o maior valor singular da matriz X.

- Pode-se mostrar que a norma matricial induzida satisfaz a propriedade multiplicativa.

Propriedades de sinais e sistemas

Normas vetoriais e matriciais no Matlab

$\|X\|_2 = \overline{\sigma}(X)$	norm(X,2) ou max(svd(X)) ou sqrt(max(eig(X'*X)))
$\|X\|_1$	norm(X,1)
$\|X\|_\infty$	norm(X,'inf')
$\|X\|_F$	norm(X,'fro')
$\|X\|_S$	sum(sum(abs(X)))
$\|X\|_{\max}$	max(max(abs(X)))
$\rho(X)$	max(abs(eig(X))) (raio espectral)
$\gamma(X) = \overline{\sigma}(X)/\underline{\sigma}(X)$	cond(X) (condicionamento da matriz X)

Propriedades de sinais e sistemas

Normas para sinais

- A norma-1 de um sinal $x(t) \in \mathbb{R}$ é a integral do seu valor absoluto:

$$\|x(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \mathrm{d}t$$

- A norma-2 do sinal $x(t) \in \mathbb{R}$ é dada por

$$\|x(t)\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 \mathrm{d}t \right)^{1/2}$$

- Exemplo: Seja $x(t) = e^{-t}\mu(t)$. Então

$$\|x(t)\|_1 = \int_0^{\infty} e^{-t} \mathrm{d}t = 1 \qquad \text{e} \qquad \|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{\infty} e^{-2t} \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

- A norma-∞ de um sinal $x(t) \in \mathbb{R}$ é o seu máximo valor absoluto:

$$\|x(t)\|_\infty = \sup_t |x(t)|$$

- Exemplo: Seja $x(t) = (1 - e^{-t})$ para $t \geq 0$ e $x(t) = 0$ para $t < 0$. Então

$$\|x(t)\|_\infty = \sup_t |1 - e^{-t}| = 1$$

- A norma-1 de um sinal $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é a dada por

$$\|x(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \textstyle\sum_i^n |x_i(t)| \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|_1 \, \mathrm{d}t$$

- A norma-2 de um sinal $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é dada por

$$\|x(t)\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^T x(t) \mathrm{d}t \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|_2^2 \, \mathrm{d}t \right)^{1/2}$$

- A norma-∞ de um sinal $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é dada por

$$\|x(t)\|_\infty = \sup_t \max_i |x_i(t)| = \sup_t \|x(t)\|_\infty$$

- Potência média. É a média sobre o tempo da potência instantânea:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)^2 \mathrm{d}t$$

- Se esse valor for finito, então define-se o valor rms do sinal como

$$\mathrm{pow}(x) = \mathrm{rms}(x) = \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)^2 \mathrm{d}t \right)^{1/2}$$

- O valor rms não é uma norma, já que um sinal $x(t) \neq 0$ pode ter valor $\mathrm{pow}(x) = 0$.

- Lema: Se $\|x(t)\|_2 < \infty$, então $x(t)$ é um sinal de potência com $\mathrm{pow}(x) = 0$.

- Prova: Assuma $\|x(t)\|_2 < \infty$. Então

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)^2 \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2T} \|x(t)\|_2^2$$

Como o lado direito tende a zero com $T \to \infty$, tem-se $\mathrm{pow}(x) = 0$.

- Considere o sistema linear, invariante no tempo e causal:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

Assim

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

com

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$$

- A norma-2 (ou $\mathcal{H}_2$) é dada por

$$\|H(s)\|_2^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\mathrm{j}\omega)|^2\, d\omega$$

- Pelo Teorema de Parseval, tem-se

$$\|H(s)\|_2 = \|h(t)\|_2$$

se $H(s)$ for estável.

- A norma-2 é finita *see* $H(s)$ for estritamente própria e não tiver polos em $\mathrm{j}\omega$.
- Observe que a área sob $|H(\mathrm{j}\omega)|$ precisa ser finita para que a norma-2 seja finita.
- Exemplo: Considere o sistema $H(s) = 1/(s+1)$. Então sua norma-2 é

$$\begin{aligned}
\|H(s)\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\mathrm{j}\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2+1} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{\omega\to\infty}[\tan^{-1}(\omega) - \tan^{-1}(-\omega)] \\
&= \frac{1}{2\pi}[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- Pode-se ainda calcular essa norma usando $h(t)$, como segue:

$$\|h(t)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-t}\right|^2 \mu(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

Propriedades de sinais e sistemas

Normas para sistemas (caso SISO)

- A norma-∞ (ou $\mathcal{H}_\infty$) é dada por

$$\|H(s)\|_\infty := \sup_\omega |H(\mathrm{j}\omega)|$$

- Para o exemplo anterior com $H(s) = 1/(s+1)$, a norma-∞ é dada por

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_\omega |H(\mathrm{j}\omega)| = \sup_\omega \sqrt{\frac{1}{\omega^2+1}} = 1$$

- A norma-∞ é finita *see* $H(s)$ for própria e não tiver polos no eixo imaginário.

- Claramente, a norma-∞ satisfaz

$$\|H(s)P(s)\|_\infty \leq \|H(s)\|_\infty \|P(s)\|_\infty$$

- É possível mostrar que a norma-∞, pode ser dada por

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{u(t)\neq 0} \|y(t)\|_2 \,/\, \|u(t)\|_2 = \sup_{\|u(t)\|_2 \leq 1} \|y(t)\|_2$$

- A norma-1 da resposta ao impulso é dada por

$$\|h(t)\|_1 = \sup_{\|u(t)\|_\infty \leq 1} \|y(t)\|_\infty$$

Propriedades de sinais e sistemas

Relação entrada-saída (caso SISO)

- Questão: se a amplitude da entrada for conhecida, qual será a amplitude da saída?
- Para uma entrada impulsiva $u(t) = \delta(t)$, tem-se

$$y(t) = h(t) * \delta(t) = h(t) \quad \rightarrow \quad Y(s) = H(s)$$

  e consequentemente

$$\|y(t)\|_2 = \|h(t)\|_2 = \|H(s)\|_2 \qquad \text{e} \qquad \|y(t)\|_\infty = \|h(t)\|_\infty$$

- Para uma entrada senoidal $u(t) = \sin(\bar{\omega} t)$ tem-se

$$y(t) = |H(\mathrm{j}\bar{\omega})| \sin(\bar{\omega} t + \phi)$$

  e consequentemente

$$\|y(t)\|_2 = \infty, \qquad \|y(t)\|_\infty = |H(\mathrm{j}\bar{\omega})|, \qquad \mathrm{pow}(y(t)) = \frac{\sqrt{2}}{2}|H(\mathrm{j}\bar{\omega})|$$

- A tabela abaixo apresenta a relação entrada-saída:

	$u(t) = \delta(t)$	$u(t) = \sin(\bar{\omega} t)$
$\|y(t)\|_2$	$\|H(s)\|_2$	∞
$\|y(t)\|_\infty$	$\|h(t)\|_\infty$	$\lvert H(\mathrm{j}\bar{\omega})\rvert$
$\mathrm{pow}(y(t))$	0	$\sqrt{1/2}\lvert H(\mathrm{j}\bar{\omega})\rvert$

- Suponha agora que $u(t)$ é um sinal qualquer tal que $\|u(t)\|_2 \leq 1$.

- A questão agora é: qual o menor limitante superior para a norma-2 da saída? Pode-se mostrar que o ganho do sistema norma-2/norma-2:

$$\|H(s)\|_\infty = \sup\{\|y(t)\|_2 \ | \ \|u(t)\|_2 \leq 1\}$$

- Exemplo: Considere o sistema $H(s) = 1/(s+1)$. Para $u(t) = \sin(t)e^{-t}\mu(t)$, tem-se que a saída é $y(t) = e^{-t}(1 - \cos(t))\mu(t)$. Portanto:

$$\|y(t)\|_2 \,/\, \|u(t)\|_2 = \frac{\sqrt{3/40}}{\sqrt{2/16}} = \sqrt{3/5} \ < \ \|H(s)\|_\infty = 1$$

- Para outras normas, tem-se diferentes ganhos do sistema:

	$\|u(t)\|_2$	$\|u(t)\|_\infty$	$\mathrm{pow}(u(t))$
$\|y(t)\|_2$	$\|H(s)\|_\infty$	∞	∞
$\|y(t)\|_\infty$	$\|H(s)\|_2$	$\|h(t)\|_1$	∞
$\mathrm{pow}(y(t))$	0	$\|H(s)\|_\infty$	$\|H(s)\|_\infty$

- Considere o sistema $G(s)$ com a representação $G(s) \triangleq (A, B, C, 0)$.
- Assuma que a matriz A é Hurwitz e defina a matriz L por
$$L = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} \mathrm{d}t$$
- Essa matriz L satisfaz a seguinte equação de Lyapunov
$$AL + LA^T + BB^T = 0$$
- A norma $\mathcal{H}_2$ é dada por
$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr} CLC^T}$$
- No Matlab, pode-se usar os comandos:

```
>> A = [0 1; -10 -2]; B = [0 1]'; C = [10 0];
>> L = lyap(A,B*B')
    0.0250   -0.0000
   -0.0000    0.2500
>> sqrt(trace(C*L*C'))    % Norma H_2
    1.5811
>> sysc = ss(A,B,C,0);
>> norm(sysc,2)   % Norma H_2
    1.5811
```

Propriedades de sinais e sistemas

Cômputo da norma $\mathcal{H}_\infty$ (caso MIMO)

- Defina a matriz Hamiltoniana por

$$\mathcal{H} := \begin{bmatrix} A & BB^T/\gamma^2 \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix}$$

- Pode se mostrar que $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ se e somente se a matriz Hamiltoniana $\mathcal{H}$ não tiver autovalores no eixo imaginário.

- Assim, a norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser calculada determinando-se o menor valor de γ tal que os autovalores de $\mathcal{H}$ ainda não estejam em $\mathrm{j}\omega$.

- Método da bissecção:
  1. Selecionar um limitante inferior γ_i e um limitante superior γ_s tais que $\gamma_i \leq \|G(s)\|_\infty \leq \gamma_s$;
  2. Se $(\gamma_s - \gamma_i)/\gamma_i \leq \mathrm{tol}$, pare pois $\|G(s)\|_\infty \approx (\gamma_s + \gamma_i)/2$. Caso contrário, prossiga;
  3. Faça $\gamma = (\gamma_s + \gamma_i)/2$;
  4. Verifique se $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ calculando os autovalores de $\mathcal{H}$;
  5. Se $\mathcal{H}$ tiver autovalores em $\mathrm{j}\omega$, faça $\gamma_i = \gamma$; caso contrário faça $\gamma_s = \gamma$.
  6. Volte ao passo 2.

- Note que: $\quad \|G(s)\|_\infty < \gamma \quad \iff \quad \left\|\gamma^{-1} G(s)\right\|_\infty < 1.$

Propriedades de sinais e sistemas

Exemplo numérico

- Considere o sistema (estável)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad y(t) = Cx(t)$$

com as matrizes de estado dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix}$$

- No domínio da frequência tem-se

$$Y(s) = G(s)U(s), \qquad G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

- O diagrama de Bode de $G(s)$, em magnitude, está apresentado abaixo.