ES728 – Controle Avançado de Sistemas

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

- De forma análoga ao caso contínuo, um sistema de m equações de diferenças de ordem n pode ser reescrito como um sistema de $m \times n$ equações de primeira ordem.

- Exemplo: Considere a equação de diferenças

$$q(k+2) + 5q(k) + 3w(k+1) = u_1(k)$$
$$w(k+2) + 2w(k+1) + 3q(k+1) = -u_2(k)$$

com condições iniciais $w(0) = w_0$, $w(1) = w_1$, $q(0) = q_0$ e $q(1) = q_1$.

- Primeiramente, define-se um novo conjunto de variáveis de estado $x(k)$ por

$$x_1(k) = q(k), \qquad x_2(k) = q(k+1), \qquad x_3(k) = w(k), \qquad x_4(k) = w(k+1)$$

- Note que o vetor $x(k+1)$ é dado por

$$x_1(k+1) = q(k+1) = x_2(k), \qquad x_2(k+1) = q(k+2)$$
$$x_3(k+1) = w(k+1) = x_4(k), \qquad x_4(k+1) = w(k+2)$$

- Substituindo o novo estado $x(k)$ na equação acima, tem-se

$$x_2(k+1) = -5x_1(k) - 3x_4(k) + u_1(k)$$
$$x_4(k+1) = -3x_2(k) - 2x_4(k) - u_2(k)$$

- O sistema, na nova variável $x(k)$, passa a ser

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_2(k) \\
x_2(k+1) &= -5x_1(k) - 3x_4(k) + u_1(k) \\
x_3(k+1) &= x_4(k) \\
x_4(k+1) &= -3x_2(k) - 2x_4(k) - u_2(k)
\end{aligned}
$$

- Esse sistema pode ainda ser reescrito na seguinte forma matricial

$$
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}
$$

- Assim, foi obtido o *modelo no espaço de estado*

$$
x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)
$$

com as matrizes A e B dadas acima e condições iniciais

$$
x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & w_0 & w_1 \end{bmatrix}^T
$$

Análise no espaço de estado

Solução homogênea: caso discreto

- Considere o sistema discreto

$$x(k+1) = Ax(k), \quad x(0) = x_0$$

- A solução homogênea, obtida diretamente por recursão, é dada por

$$x(k) = A^k x_0, \qquad k \geq 0$$

que claramente satisfaz o sistema, já que

$$x(k+1) = A^{k+1}x_0 = AA^k x_0 = Ax(k)$$

- A solução (Exercício) para $x(k_0) = x_0$, num tempo k_0 qualquer é dada por

$$x(k) = \Phi(k, k_0)x_0, \qquad k \geq k_0, \qquad \Phi(k, k_0) = A^{k-k_0}$$

em que $\Phi(k, k_0)$ é conhecida como **matriz de transição de estado** (discreta). Essa a matriz se reduz a A^k se $k_0 = 0$.

- Essa matriz possui claramente as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \Phi(k,k) &= I, & k &\geq k_0 \\ \Phi(k+1, k_0) &= A\Phi(k, k_0), & k &\geq k_0 \\ \Phi(k, k_0) &= \Phi(k, k_1)\Phi(k_1, k_0), & k &\geq k_1 \geq k_0 \end{aligned}$$

- A matriz $\Phi(k, k_0)$ pode não ser inversível, já que a matriz A pode ser singular.

Análise no espaço de estado

Solução homogênea: caso discreto

- Considere o sistema discreto

$$x(k+1) = Ax(k), \quad x(0) = x_0$$

- Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$, tem-se

$$zX(z) - zx_0 = AX(z) \quad \Longleftrightarrow \quad X(z) = (zI - A)^{-1} z x_0$$

cuja transformada inversa fornece

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[(zI - A)^{-1} z\right] x_0, \qquad k \geq 0$$

- Comparando com a solução homogêna

$$x(k) = A^k x_0, \qquad k \geq 0$$

percebe-se que

$$A^k \mu(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[(zI - A)^{-1} z\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{Z}\left[A^k \mu(k)\right] = (zI - A)^{-1} z$$

- Perceba a similaridade com o caso escalar

$$\mathcal{Z}[a^k \mu(k)] = \frac{z}{z-a} = (z-a)^{-1} z$$

Análise no espaço de estado

Solução forçada: caso discreto

- Considere o sistema discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \qquad k \geq 0$$

- A solução desse sistema é dada por

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1} Bu(l), \qquad k \geq 0$$

- Pode-se facilmente provar por indução:
  1. Para $k = 0$, a solução claramente satisfaz a condição inicial;
  2. Considere que a solução é válida para um k qualquer. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A^{k+1}x(0) + \sum_{l=0}^{k} A^{k-l} Bu(l) = AA^k x(0) + \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l} Bu(l) + Bu(k) \\ &= A\left[A^k x(0) + \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l-1} Bu(l)\right] + Bu(k) = Ax(k) + Bu(k) \end{aligned}$$

- Definindo a saída do sistema por

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

tem-se (parte homogênea + parte forçada):

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) = CA^k x(0) + \sum_{l=0}^{k-1} CA^{k-l-1} Bu(l) + Du(k), \qquad k \geq 0$$

- Para obter a resposta ao impulso $h(k)$, basta fazer $u(k) = \delta(k)$ na equação

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{l=0}^{k-1} CA^{k-l-1} Bu(l) + Du(k)$$

com condições iniciais nulas $x(0) = 0$.

- Assim, a resposta ao impulso é dada por

$$h(k) = \begin{cases} D & \text{, se } k = 0 \\ CA^{k-1}B & \text{, se } k \geq 1 \end{cases}$$

que pode ainda ser reescrita como

$$h(k) = CA^{k-1}B\mu(k-1) + D\delta(k)$$

- Os parâmetros de Markov do modelo no espaço de estado

$$CA^n B \qquad \text{para } n \geq 0$$

são amplamente utilizados na área de identificação de sistemas dinâmicos.

Análise no espaço de estado

Resposta ao impulso e função de transferência: caso discreto

- A função de transferência $H(z)$ é a transformada $\mathcal{Z}$ da resposta ao impulso

$$h(k) = CA^{k-1}B\mu(k-1) + D\delta(k)$$

- Assim, tem-se

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(k)] = C(zI - A)^{-1}B + D$$

  em que foi usado o fato que

$$\mathcal{Z}\left[A^{k-1}\mu(k-1)\right] = (zI - A)^{-1}$$

- Esse mesmo resultado pode ainda ser obtido aplicando-se a transformada $\mathcal{Z}$ em

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

  com condições iniciais nulas, ou seja

$$\begin{aligned} (zI - A)X(z) &= BU(z) \\ Y(z) &= CX(z) + DU(z) \end{aligned}$$

  que resulta na função de transferência $H(z)$ dada por

$$Y(z) = H(z)U(z), \qquad \text{com} \qquad H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

- A matriz de transição de estado A^k pode ser calculada pelos seguintes métodos:

  1. $A^k = \mathcal{Z}^{-1}\left[(zI - A)^{-1}z\right]$. Essa expressão foi derivada anteriormente.

  2. $A^k = \Sigma\Lambda^k\Sigma^{-1}$, usando a forma diagonal $A = \Sigma\Lambda\Sigma^{-1}$.

  3. $A^k = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(k)A^j$, usando o método polinomial (polos distintos).

     Os coeficientes $\alpha_j(k)$ são obtidos do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(k) \\ \alpha_1(k) \\ \alpha_2(k) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \\ \lambda_3^k \\ \vdots \\ \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

- Exemplo: Calcule A^k para a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$.

1. Usando a forma diagonal: $A^k = \Sigma \Lambda^k \Sigma^{-1}$

$$A^k = \Sigma \Lambda^k \Sigma^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-3)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(-3)^k + 3(-1)^k & -(-3)^k + (-1)^k \\ 3(-3)^k - 3(-1)^k & -(-1)^k + 3(-3)^k \end{bmatrix}$$

Calculando, por exemplo, para $k = 10$, tem-se

$$A^{10} = \begin{bmatrix} -29523 & -29524 \\ 88572 & 88573 \end{bmatrix}$$

2. Usando a transformada $\mathcal{Z}$: $A^k \mu(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left[(zI - A)^{-1} z \right]$

A transformada inversa de

$$z(zI - A)^{-1} = \frac{1}{z^2 + 4z + 3} \begin{bmatrix} z(z+4) & z \\ -3z & z^2 \end{bmatrix}$$

é dada por

$$A^k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(-3)^k + 3(-1)^k & -(-3)^k + (-1)^k \\ 3(-3)^k - 3(-1)^k & -(-1)^k + 3(-3)^k \end{bmatrix}$$

Continução do exemplo: Cômputo de A^k para a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$.

3. Usando o método polinomial: $A^k = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(k) A^j$

   Os coeficientes $\alpha_j(k)$ são obtidos do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k \\ (-3)^k \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2}\left(3(-1)^k - (-3)^k\right) \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2}\left((-1)^k - (-3)^k\right) \end{aligned}$$

   Portanto, a solução é dada por

$$\begin{aligned} A^k &= \alpha_0(k) I + \alpha_1(k) A \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -(-3)^k + 3(-1)^k & -(-3)^k + (-1)^k \\ 3(-3)^k - 3(-1)^k & -(-1)^k + 3(-3)^k \end{bmatrix}, \qquad k \geq 0 \end{aligned}$$

   que é exatamente a mesma solução obtida pelos métodos anteriores.

Análise no espaço de estado

Transformação de similaridade (Caso Discreto)

- Considere o modelo no espaço de estado

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

- Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$, obtém-se

$$X(z) = (zI - A)^{-1} BU(z) \quad \text{e} \quad Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

- Substituindo $X(z)$ em $Y(z)$, tem-se a função de transferência

$$Y(z) = \left\{ C(zI - A)^{-1} B + D \right\} U(z)$$

- Para mostrar que essa função de transferência possui inúmeras representações no espaço de estado, defina uma nova variável $q(k) = Tx(k)$ com T inversível. Então:

$$\begin{aligned} q(k+1) &= Tx(k+1) = T(Ax(k) + Bu(k)) \\ &= TAT^{-1} q(k) + TBu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) = CT^{-1} q(k) + Du(k) \end{aligned}$$

- Na nova variável de estado q, o sistema é dado por

$$\begin{aligned} q(k+1) &= \hat{A} q(k) + \hat{B} u(k) \\ y(k) &= \hat{C} q(k) + \hat{D} u(k) \end{aligned}$$

com $\hat{A} = TAT^{-1}, \hat{B} = TB, \hat{C} = CT^{-1}, \hat{D} = D$.

Análise no espaço de estado

Transformação de similaridade (Caso Discreto)

- Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$, obtém-se

$$Q(z) = (zI - \hat{A})^{-1}\hat{B}U(z)$$
$$Y(z) = \hat{C}Q(z) + \hat{D}U(z)$$

assim

$$Y(z) = \left\{\hat{C}(zI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D}\right\}U(z)$$

- Substituindo $\hat{A} = TAT^{-1}, \hat{B} = TB, \hat{C} = CT^{-1}, \hat{D} = D$, tem-se

$$\begin{aligned} Y(z) &= \left\{CT^{-1}(zI - TAT^{-1})^{-1}TB + D\right\}U(z) \\ &= \left\{CT^{-1}T(zI - A)^{-1}T^{-1}TB + D\right\}U(z) \\ &= \left\{C(zI - A)^{-1}B + D\right\}U(z) \end{aligned}$$

- Portanto, exatamente como no caso contínuo, a função de transferência é invariante com relação à transformação de similaridade.

- Conclui-se novamente que o mesmo sistema pode ser representado de inúmeras formas, que estarão relacionadas entre si através de alguma matriz de similaridade T.

Análise no espaço de estado

Transformação de similaridade

- Exemplo: Considere a seguinte representação no espaço de estado discreto:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = 1$$

- Sua função de transferência $H(z)$ é dada por

$$H(z) = C\left(zI - A\right)^{-1} B + D = \frac{z}{z+1}$$

- Agora, aplicando a transformação de similaridade

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Obtém-se as matrizes $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$ e $\hat{D} = D$, dadas por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{D} = 1$$

- Calculando a função de transferência desse sistema discreto, obtém-se

$$H(z) = \hat{C}\left(zI - \hat{A}\right)^{-1} \hat{B} + \hat{D} = \frac{z}{z+1}$$

- O caso discreto é análogo ao caso contínuo.
- Considere o sistema a tempo discreto dado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

  cuja função de transferência é dada por

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

- Agora, note que $H(z)$ pode ser reescrita como

$$H(z) = \frac{C\,\mathrm{adj}(zI - A)B}{|zI - A|} + D$$

- Novamente, os polos de $H(z)$ são os autovalores da matriz A, as raízes do polinômio característico $\Lambda(\lambda) = |\lambda I - A|$.
- Assim, o sistema será assintoticamente estável se e somente se os autovalores λ_i da matriz A em magnitude forem menor do que um, ou seja, $|\lambda_i(A)| < 1$.

- Seja a função de transferência discreta

$$H(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} =: \frac{b(z)}{a(z)}$$

- Para colocar $H(z)$ na forma controlável, reescreve-se $Y(z)$ como

$$Y(z) = Q(z)b(z), \quad \text{com} \quad Q(z) = U(z)/a(z)$$

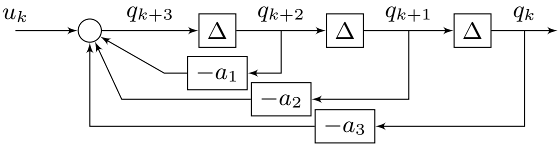
- O método será apresentado a seguir usando o caso $n = 3$:

$$H(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}$$

- Como $a(z)Q(z) = U(z)$, tem-se $(z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3)Q(z) = U(z)$, que no tempo é

$$q(k+3) + a_1 q(k+2) + a_2 q(k+1) + a_3 q(k) = u(k)$$

cuja representação por diagrama de blocos é



Análise no espaço de estado

Forma canônica controlável: caso discreto

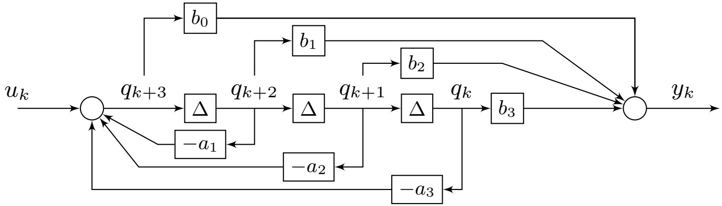
- Para a saída $Y(z) = b(z)Q(z)$, tem-se

$$Y(z) = (b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3)Q(z)$$

que no tempo é

$$y(k) = b_0 q(k+3) + b_1 q(k+2) + b_2 q(k+1) + b_3 q(k)$$

- Assim, o diagrama final é dado por



- Para representar esse sistema na forma de estado, definem-se as variáveis de estado:

$$x_1(k) = q(k+2), \qquad x_2(k) = q(k+1), \qquad x_3(k) = q(k)$$

- Assim, a equação na forma de estado é dada por

$$x_3(k+1) = x_2(k), \qquad x_1(k+1) = u(k) - a_1 x_1(k) - a_2 x_2(k) - a_3 x_3(k)$$
$$x_2(k+1) = x_1(k)$$

Análise no espaço de estado

Forma canônica controlável: caso discreto

- Definindo o vetor de estado como

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) & x_3(k) \end{bmatrix}^T$$

A equação no espaço de estado fica sendo

$$x(k+1) = A_c x(k) + B_c u(k)$$

com

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- A equação de saída pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} y(k) &= b_0 x_1(k+1) + b_1 x_1(k) + b_2 x_2(k) + b_3 x_3(k) \\ &= (b_1 - a_1 b_0) x_1(k) + (b_2 - a_2 b_0) x_2(k) + (b_3 - a_3 b_0) x_3(k) + b_0 u(k) \end{aligned}$$

Na forma matricial, tem-se

$$y(k) = C_c x(k) + D_c u(k)$$

com

$$C_c = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 & b_2 - a_2 b_0 & b_3 - a_3 b_0 \end{bmatrix}, \qquad D_c = [b_0]$$

- Seja a função de transferência

$$H(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} := \frac{b(z)}{a(z)}$$

- Considere o caso $n = 3$. Usando a relação

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{b(z)}{a(z)}U(z)$$

tem-se $a(z)Y(z) = b(z)U(z)$, ou seja,

$$z^3Y(z) + a_1z^2Y(z) + a_2zY(z) + a_3Y(z) = b_0z^3U(z) + b_1z^2U(z) + b_2zU(z) + b_3U(z)$$

- Essa equação pode ainda ser reescrita como

$$b_3U(z) - a_3Y(z) = \underbrace{z^3Y(z) - b_0z^3U(z) + a_1z^2Y(z) - b_1z^2U(z) + a_2zY(z) - b_2zU(z)}_{P_1(z)}$$

- Multiplicando o termo $P_1(z)$ por z^{-1}, tem-se

$$z^{-1}P_1(z) = \underbrace{z^2Y(z) - b_0z^2U(z) + a_1zY(z) - b_1zU(z)}_{P_2(z)} + a_2Y(z) - b_2U(z)$$

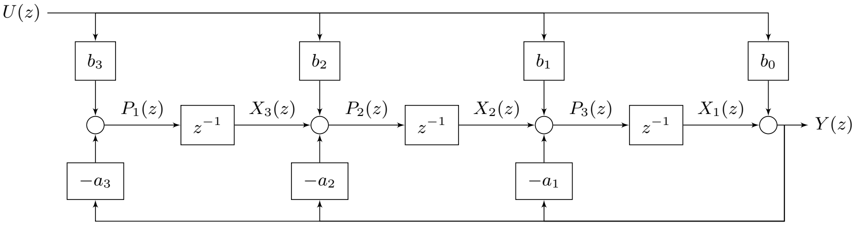
- Multiplicando agora o termo $P_2(z)$ por z^{-1}, tem-se

$$z^{-1}P_2(z) = \underbrace{zY(z) - b_0 zU(z)}_{P_3(z)} + a_1 Y(z) - b_1 U(z)$$

- Multiplicando o termo $P_3(z)$ por z^{-1}, obtém-se finalmente

$$z^{-1}P_3(z) = Y(z) - b_0 U(z) \qquad \Longrightarrow \qquad Y(z) = b_0 U(z) + z^{-1}P_3(z)$$

- O diagrama de blocos é apresentado abaixo.



- Definindo os estados x_1, x_2 e x_3 como indicado no diagrama de blocos, tem-se

$$y(k) = x_1(k) + b_0 u(k)$$

$$x_1(k+1) = x_2(k) + b_1 u(k) - a_1 y(k) = -a_1 x_1(k) + x_2(k) + (b_1 - b_0 a_1) u(k)$$

$$x_2(k+1) = x_3(k) + b_2 u(k) - a_2 y(k) = -a_2 x_1(k) + x_3(k) + (b_2 - b_0 a_2) u(k)$$

$$x_3(k+1) = b_3 u(k) - a_3 y(k) = -a_3 x_1(k) + (b_3 - b_0 a_3) u(k)$$

- Na forma matricial, tem-se

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_o x(k) + B_o u(k) \\ y(k) &= C_o x(k) + D_o u(k) \end{aligned}$$

com

$$A_0 = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_3 - a_3 b_0 \end{bmatrix}, \quad C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_o = [b_0]$$

Análise no espaço de estado

Equivalente discreto: segurador de ordem zero

- Considere a equação anterior: $x_p(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_o}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$
- Usando o intervalo de amostragem $t_0 = kT$ e $t = (k+1)T$, tem-se

$$x_p(kT+T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

- O segurador de ordem zero tem a seguinte hipótese

$$u(\tau) = u(kT), \qquad kT \leq \tau < (k+1)T$$

- Aplicando a seguinte mudança de variável $\eta = (k+1)T - \tau$, obtêm-se

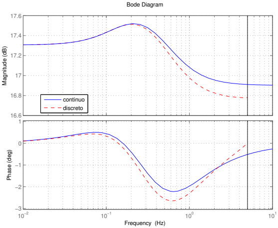
$$\begin{aligned} x_p(kT+T) &= e^{AT}x(kT) + \int_{T}^{0} e^{A\eta}\,(-d\eta)Bu(kT) \\ &= e^{AT}x(kT) + \int_{0}^{T} e^{A\eta}\,d\eta Bu(kT) \\ &= \hat{A}x(kT) + \hat{B}u(kT) \end{aligned}$$

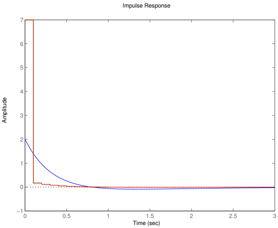
  com $\hat{A} = e^{AT}$ e $\hat{B} = \int_0^T e^{A\eta}\,d\eta B$.
- A equação discreta no espaço de estado é dada por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \hat{A}x(k) + \hat{B}u(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

Análise no espaço de estado

Equivalente discreto: SOZ



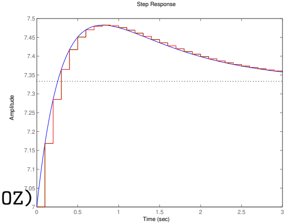


- A matriz $\hat{A}$ é dada por

$$\hat{A} = e^{AT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^k}{k!}$$

- A matriz $\hat{B}$ é dada por

$$\hat{B} = \int_0^T e^{A\eta}\, d\eta B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^{(k+1)}}{(k+1)!} B$$



- Algoritmo em Matlab:

```
>> A = [0 1; -3 -4]; B = [0 ; 1]; C = [1 2]; D = 7;
>> sysc = ss(A,B,C,D); % Sistema contínuo
>> T = 1e-1;
>> sysd1 = c2d(sysc,T,’zoh’); % Sistema discreto (SOZ)
>> % Calculando Ad e Bd usando a fórmula acima
>> Ad = expm(A*T);    % Função que calcula a exponencial de uma matriz
>> % Cálculo de Bd usando a série
>> Bd = zeros(2,1); for i=0:50,Bd=Bd+(A*T)^i/factorial(i+1)*T*B; end
>> sysd2 = ss(Ad,Bd,C,D,T);
>> step(sysc,sysd1,sysd2,3)       % Resposta ao degrau unitário
>> impulse(sysc,sysd1,sysd2,3)    % Resposta ao impulso unitário
>> bode(sysc,sysd1,’r--’), legend(’continuo’,’discreto’)
```

$$H(s) = \frac{7s^2+30s+22}{s^2+4s+3}, \qquad H(z) = \frac{7z^2-11.35z+4.532}{z^2-1.646z+0.6703}$$

Análise no espaço de estado

Equivalentes discretos

- O equivalente discreto de uma função de transferência contínua pode ser determinado usando-se um dos métodos apresentados na tabela abaixo.

Método	Aproximação
Euler direto	$s \leftarrow \frac{z-1}{T}$
Euler reverso	$s \leftarrow \frac{z-1}{Tz}$
Tustin	$s \leftarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$

- Considere o sistema dinâmico contínuo descrito pelo seguinte modelo de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

cuja transformada de Laplace fornece

$$sX = AX + BU$$
$$Y = CX + DU$$

- Método Euler reverso: usando a aproximação apresentada na tabela acima, tem-se

$$\frac{z-1}{Tz}X = AX + BU$$

- A relação $\frac{z-1}{Tz}X = AX + BU$ no domínio do tempo, fornece

$$x(k+1) - x(k) = TAx(k+1) + TBu(k+1)$$

- Definindo uma nova variável $w(k+1)$, que contem os termos em $k+1$, tem-se

$$w(k+1) = x(k)$$

com

$$w(k+1) = x(k+1) - TAx(k+1) - TBu(k+1)$$

- Resolvendo a equação acima em $x(k+1)$, tem-se

$$x(k+1) = (I - TA)^{-1}w(k+1) + (I - TA)^{-1}TBu(k+1)$$

- Usando a relação $w(k+1) = x(k)$, obtem-se

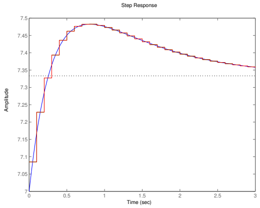
$$w(k+1) = (I - TA)^{-1}w(k) + (I - TA)^{-1}TBu(k)$$

com a equação de saída dada por

$$Y(k) = C(I - TA)^{-1}w(k) + \left[D + C(I - TA)^{-1}BT\right]u(k)$$

- Seguindo procedimentos análogos, tem-se:

	Euler direto	Euler reverso	Tustin
$\hat{A}$	$I + AT$	$(I - AT)^{-1}$	$(I + \frac{AT}{2})(I - \frac{AT}{2})^{-1}$
$\hat{B}$	BT	$(I - AT)^{-1}BT$	$(I - \frac{AT}{2})^{-1}B\sqrt{T}$
$\hat{C}$	C	$C(I - AT)^{-1}$	$\sqrt{T}C(I - \frac{AT}{2})^{-1}$
$\hat{D}$	D	$D + C(I - AT)^{-1}BT$	$D + C(I - \frac{AT}{2})^{-1}BT/2$



- Algoritmo em Matlab:

```
>> A = [0 1; -3 -4]; B = [0 ; 1]; C = [1 2]; D = 7;
>> sysc = ss(A,B,C,D); % Sistema contínuo
>> % Sistema discreto método de Tustin
>> T = 1e-1;  sysd3 = c2d(sysc,T,'tustin');
>> % Usando-se a  fórmula acima
>> Ad = (eye(2)+A*T/2)/(eye(2)-A*T/2);
>> Bd = (eye(2) - A*T/2)\B*sqrt(T);
>> Cd = sqrt(T)*C/(eye(2) - A*T/2);
>> Dd = D + C*((eye(2) - A*T/2)\B)*T/2;
>> sysd4 = ss(Ad,Bd,Cd,Dd,T);
>> step(sysc,sysd3,sysd4,3)
>> bode(sysc,'k-',sysd3,'r--',sysd1,'b-.')
>> legend('Cont.','D-Tustin','D-ZOH')
```