ES728 – Controle Avançado de Sistemas

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

Visão Geral do Curso de Controle Avançado de Sistemas

- Modelagem no Espaço de Estado: Fundamentos da representação de sistemas. Representação e simulação numérica no espaço de estados.
- Análise no Espaço de Estado: Autovalores e autovetores, matriz de transição de estado, polos e estabilidade, e formas canônicas.
- Propriedades de Sinais e Sistemas: Normas, decomposição em valores singulares, análise de sinais e matrizes.
- Controlabilidade e Observabilidade: Capacidade de controlar e observar estados.
- Projeto de Controladores e Realimentação de Estado: Utiliza os modelos para criar controladores eficientes. Realimentação completa de estado, alocação de polos.
- Estimadores e Observadores de Estado: Desenvolvimento de técnicas para estimação de estados não mensuráveis.
- Introdução às Incertezas de Modelagem e Robustez: Explora as realidades de incerteza na modelagem e necessidade de controle robusto.
- Tópicos Avançados em Controle: Aborda técnicas avançadas, como projeto de servossistemas, projeto LQR, projeto $\mathcal{H}_2$.

Conceitos de modelagem de sistemas
Representação no espaço de estado

- Um sistema de m equações diferenciais de ordem n pode ser reescrito como um sistema de $m \times n$ equações de primeira ordem.
- Exemplo: Considere o seguinte sistema com $m = 2$ e $n = 2$, dado por

$$\begin{aligned}\ddot{q}(t) + 5q(t) + 3\dot{w}(t) &= u_1(t)\\ \ddot{w}(t) + 2\dot{w}(t) + 3\dot{q}(t) &= -u_2(t)\end{aligned}$$

- Primeiramente, define-se um novo conjunto de variáveis de estado $x(t)$ por

$$x_1(t) = q(t), \qquad x_2(t) = \dot{q}(t), \qquad x_3(t) = w(t), \qquad x_4(t) = \dot{w}(t)$$

- Note que a derivada do vetor $x(t)$ é

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \dot{q}(t) = x_2(t), &\qquad \dot{x}_2(t) &= \ddot{q}(t)\\ \dot{x}_3(t) &= \dot{w}(t) = x_4(t), &\qquad \dot{x}_4(t) &= \ddot{w}(t)\end{aligned}$$

- Substituindo o novo estado $x(t)$ na equação diferencial, tem-se

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= -5x_1(t) - 3x_4(t) + u_1(t)\\ \dot{x}_4(t) &= -3x_2(t) - 2x_4(t) - u_2(t)\end{aligned}$$

- O sistema, na nova variável $x(t)$, passa a ser

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -5x_1(t) - 3x_4(t) + u_1(t)\\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t)\\ \dot{x}_4(t) &= -3x_2(t) - 2x_4(t) - u_2(t)\end{aligned}$$

- Que pode ainda ser reescrito na seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -5 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

- Assim, obtém-se o *modelo no espaço de estado*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

  com as matrizes A e B obtidas da representação acima.

- A saída do sistema pode ser descrita como segue:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- No Matlab, esse modelo pode ser inserido usando-se o comando **H=ss(A,B,C,D)**.

- Exemplo: Para representar no espaço de estado a equação do circuito RLC

$$LC\ddot{v}_C(t) + RC\dot{v}_C(t) + v_C(t) = v_E(t)$$

basta definir as variáveis de estado como sendo

$$x_1 = v_C \qquad \text{e} \qquad x_2 = \dot{v}_C$$

- Derivando-se x_1 e x_2, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{v}_C = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{v}_C = \frac{1}{LC}v_E - \frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 \end{aligned}$$

- Definindo-se entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ por

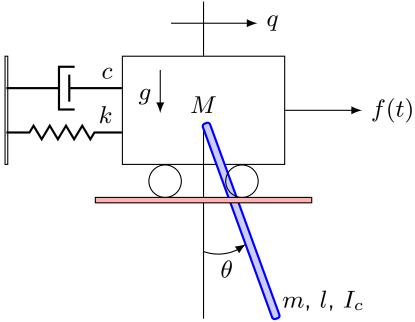
$$u = v_E(t) \qquad \text{e} \qquad y = v_C(t) = x_1(t)$$

chega-se à forma matricial no espaço de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/(LC) & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/(LC) \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Exemplo: Considere o sistema carro-pêndulo da figura abaixo.



- A equação de movimento linearizada é dada por

$$\hat{M}\ddot{q}(t) - \frac{3}{4}mg\theta(t) + kq(t) + c\dot{q}(t) = f(t)$$
$$\frac{2}{3}\hat{M}l\ddot{\theta}(t) + \bar{M}g\theta(t) - kq(t) - c\dot{q}(t) = -f(t)$$

com $\bar{M} = M + m$, $\hat{M} = M + m/4$ e $I_c = 1/12ml^2$.

- Escolhendo os estados como

$$x_1 = q, \qquad x_2 = \theta, \qquad x_3 = \dot{q}, \qquad x_4 = \dot{\theta}$$

e a entrada $u(t)$ como $u(t) = f(t)$, obtém-se

$$\dot{x}_1 = \dot{q} = x_3, \qquad \dot{x}_3 = \ddot{q} = -\frac{k}{\hat{M}}x_1 + \frac{3mg}{4\hat{M}}x_2 - \frac{c}{\hat{M}}x_3 + \frac{1}{\hat{M}}u(t)$$
$$\dot{x}_2 = \dot{\theta} = x_4, \qquad \dot{x}_4 = \ddot{\theta} = \frac{3k}{2\hat{M}l}x_1 - \frac{3\bar{M}g}{2\hat{M}l}x_2 + \frac{3c}{2\hat{M}l}x_3 - \frac{3}{2\hat{M}l}u(t)$$

- Na forma matricial, tem-se $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{\hat{M}} & \frac{3mg}{4\hat{M}} & -\frac{c}{\hat{M}} & 0 \\ \frac{3k}{2\hat{M}l} & -\frac{3\bar{M}g}{2\hat{M}l} & \frac{3c}{2\hat{M}l} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{\hat{M}l}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

- Suponha que a saída desejada seja o deslocamento $q(t)$ e a velocidade angular $\dot{\theta}(t)$. Então o vetor de saída $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ será dado por

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Representação no espaço de estado

- Considere o seguinte sistema mecânico de três graus de liberdade:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = 0$$

em que q é o vetor contendo o deslocamento das massas m_1, m_2 e m_3, dado por

$$q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T$$

- Para representar essa equação no espaço de estado, basta definir o estado x como

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

- Assim, a sua derivada é dada por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}C\dot{q} - M^{-1}Kq \end{bmatrix}$$

- Esse sistema pode ser equivalentemente escrito como

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

com a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

Simulação numérica

Integração numérica

- Para simular usando o Matlab o sistema de 2ª ordem

$$m\ddot{y}(t) = -ky(t) - c\dot{y}(t) + u(t)$$

é necessário representá-lo no espaço de estado $\dot{x} = Ax + Bu$, dado por

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

- Assim, cria-se um arquivo (sistema1glode.m) com a função na forma matricial:

```
function dx = sistema1glode(t,x)
  m = 1; c = 1; k = 1;
  u = sin(t);
  A = [ 0      1
       -k/m  -c/m];
  B = [0 1/m]';
  dx = A*x + B*u;
 end
```

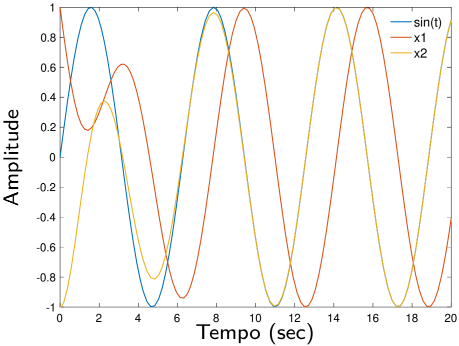
- Lembrando que o comando para integrar esse sistema é:

```
tspan = [0 20]; ci = [1 -1]'; % Tempo e Condição inicial
[t,x] = ode45(@sistema1glode,tspan,ci);
```

- O código para simular o sistema massa-mola-amortecedor, sujeito à excitação $u(t) = \sin(t)$ e condições iniciais $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = -1$, é dado por

```
...
[t,x] = ode45(@sistema1glode,tspan,ci);
plot(t,sin(t), t, x)
legend('sin(t)','x1','x2')
xlabel('Tempo (s)'), ylabel('Amplitude')
```

- A figura abaixo apresenta o deslocamento $x_1(t) = y(t)$ e a velocidade $x_2(t) = \dot{y}(t)$.



Simulação numérica

Integração numérica

- Uma alternativa é usar o comando **H=ss(A,B,C,D)** com o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

- Para isso, é preciso definir a saída do sistema: $y = Cx + Du$

- Suponha que se deseje o deslocamento da massa x_1 e o sinal $cx_2 - u$, ou seja

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ cx_2 - u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

- Assim, as matrizes C e D são dadas por

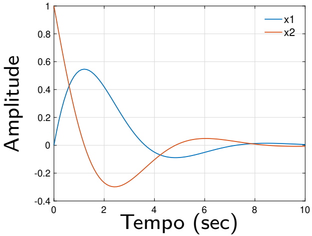
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

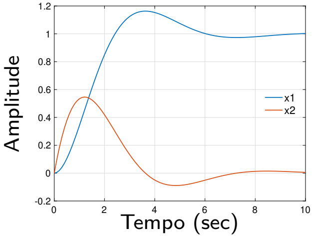
- Agora, a resposta ao impulso (de 0 a 6 segundos) é obtida como segue:

```
m = 1; c = 1; k = 1;
A = [0 1; -k/m -c/m]; B = [0 1/m]'; C = diag([1, c]); D = [0; -1];
H = ss(A,B,C,D);
[y,t,x] = impulse(H,10);
```

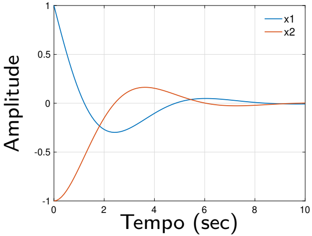
- Pode-se usar todos comandos já mencionados: impulse, step, initial, lsim, etc.

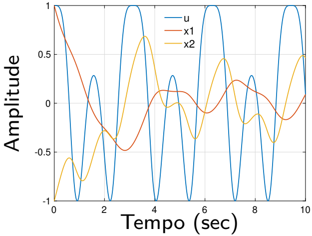
- As figuras abaixo apresentam, respectivamente, a resposta ao impulso e ao degrau.





- As figuras abaixo apresentam, respectivamente, a resposta à condição inicial $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}'$ e a resposta à entrada $u(t) = \cos(5\sin^2(t))$ e condição inicial x_0.

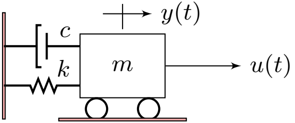


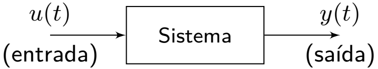


Simulação numérica

Integração numérica

- Considere o sistema de segunda ordem massa-mola-amortecedor abaixo.





- Sua equação de movimento é dada por

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

- Assuma que os parâmetro desse sistema mecânico sejam dados por

$$m = k = c = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_n = 1 \quad \text{e} \quad \zeta = 1/2$$

- Para a excitação exógena (entrada forçante) $u(t) = \sin(t)$ e condições iniciais $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = -1$, a solução analítica é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= 2e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2) - \cos(t) \\ \dot{y}(t) &= \sin(t) - e^{-t/2}\left(\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t/2) + \cos(\sqrt{3}t/2)\right) \end{aligned}$$

- A seguir é apresentado como simular numericamente esse sistema mecânico.

Simulação numérica

Integração numérica

- Para simular usando o Matlab o sistema de 2ª ordem

$$\ddot{y}(t) = -\frac{k}{m}y(t) - \frac{c}{m}\dot{y}(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

é necessário representá-lo como um sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = -\frac{k}{m}\overbrace{y}^{x_1} - \frac{c}{m}\overbrace{\dot{y}}^{x_2} + \frac{1}{m}u \end{aligned}$$

- Em seguida, cria-se um arquivo (sistema1glode.m) com a função a ser integrada:

```
function dx = sistema1glode(t,x)
  m = 1; c = 1; k = 1;
  u = sin(t);
  dx = zeros(2,1);
  dx(1) = x(2);
  dx(2) = -k/m*x(1)-c/m*x(2)+u/m;
 end
```

- Basta agora invocar, na linha de comando, o integrador usando a sintaxe:

```
tspan = [0 20]; % Simula de 0 a 20 segundos
ci = [1 -1]';  % Condição inicial
[t,x] = ode45(@sistema1glode,tspan,ci);
```

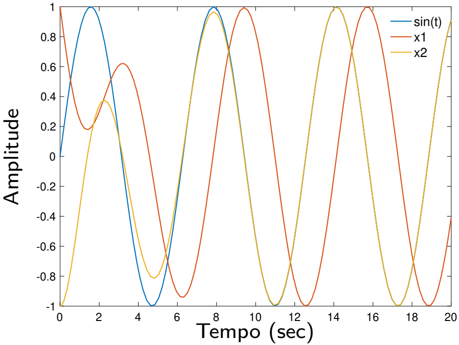
Simulação numérica

Integração numérica

- O código para simular o sistema massa-mola-amortecedor, sujeito à excitação $u(t) = \sin(t)$ e condições iniciais $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = -1$, é dado por

```
...
[t,x] = ode45(@sistema1glode,tspan,ci);
plot(t,sin(t), t, x)
legend('sin(t)','x1','x2')
xlabel('Tempo (s)'), ylabel('Amplitude')
```

- A figura abaixo apresenta o deslocamento $x_1(t) = y(t)$ e a velocidade $x_2(t) = \dot{y}(t)$.



Análise no espaço de estado

Transformação de similaridade

- Considere o modelo no espaço de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Aplicando a transformada de Laplace, obtém-se

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \quad \text{e} \quad Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

- Substituindo $X(s)$ em $Y(s)$, tem-se a função de transferência

$$Y(s) = \left\{ C\,(sI - A)^{-1}\,B + D \right\} U(s)$$

- Para mostrar que essa função de transferência possui inúmeras representações no espaço de estado, defina uma nova variável $q(t) = Tx(t)$ com T inversível. Então:

$$\dot{q} = T\dot{x} = T(Ax + Bu) = TAT^{-1}q + TBu$$
$$y = Cx + Du = CT^{-1}q + Du$$

- Na nova variável de estado q, o sistema é dada por

$$\dot{q}(t) = \hat{A}q(t) + \hat{B}u(t)$$
$$y(t) = \hat{C}q(t) + \hat{D}u(t)$$

com $\hat{A} = TAT^{-1}, \hat{B} = TB, \hat{C} = CT^{-1}, \hat{D} = D$.

Análise no espaço de estado

Transformação de similaridade

- Aplicando a transformada de Laplace, obtém-se

$$
\begin{aligned}
Q(s) &= (sI - \hat{A})^{-1}\hat{B}U(s) \\
Y(s) &= \hat{C}Q(s) + \hat{D}U(s)
\end{aligned}
$$

  assim

$$
Y(s) = \left\{ \hat{C}\left(sI - \hat{A}\right)^{-1}\hat{B} + \hat{D} \right\} U(s)
$$

- Substituindo $\hat{A} = TAT^{-1}, \hat{B} = TB, \hat{C} = CT^{-1}, \hat{D} = D$, tem-se

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \left\{ CT^{-1}\left(sI - TAT^{-1}\right)^{-1} TB + D \right\} U(s) \\
&= \left\{ CT^{-1}\left[T\left(sI - A\right)T^{-1}\right]^{-1} TB + D \right\} U(s) \\
&= \left\{ CT^{-1}T\left[(sI - A)\right]^{-1} T^{-1}TB + D \right\} U(s) = \left\{ C\left(sI - A\right)^{-1} B + D \right\} U(s)
\end{aligned}
$$

- Portanto, a função de transferência é invariante com relação à transformação de similaridade.

- Assim, o mesmo sistema pode ser representado de inúmeras formas, que estarão relacionadas entre si através de alguma matriz de similaridade T.

Análise no espaço de estado

Transformação de similaridade

- Exemplo: Considere a seguinte representação no espaço de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = 1$$

- Sua função de transferência $H(s)$ é dada por

$$H(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B + D = \frac{s}{s+1}$$

- Agora, aplicando a transformação de similaridade

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Obtém-se as matrizes $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$ e $\hat{D} = D$, dadas por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{D} = 1$$

- Calculando a função de transferência desse sistema, obtém-se

$$H(s) = \hat{C}\left(sI - \hat{A}\right)^{-1}\hat{B} + \hat{D} = \frac{s}{s+1}$$

Análise no espaço de estado

Solução homogênea

- Considere a seguinte equação diferencial no espaço de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

com a matriz de estado $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e o vetor de estado $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

- A solução homogênea dessa equação diferencial é dada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$$

em que a **matriz de transição de estado** $\Phi(t, t_0)$ possui a seguinte expansão:

$$\Phi(t, t_0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^\ell (t - t_0)^\ell}{\ell!}$$

- Para ver esse fato, considere que a solução $x(t)$ tem a seguinte expansão em série:

$$x(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} z_\ell (t - t_0)^\ell = z_0 + z_1(t - t_0) + z_2(t - t_0)^2 + z_3(t - t_0)^3 + \cdots$$

com $z_i(t)$ vetores $n \times 1$.

- Assim, em $t = t_0$, tem-se

$$x(t_0) = z_0 = x_0$$

Análise no espaço de estado

Solução homogênea

- Derivando-se a solução $x(t)$ em relação a t, tem-se

$$\dot{x}(t) = z_1 + 2z_2(t - t_0) + 3z_3(t - t_0)^2 + 4z_4(t - t_0)^3 + \cdots = Ax(t)$$

- Assim, em $t = t_0$, tem-se

$$z_1 = Ax_0$$

- Derivando-se novamente a solução $x(t)$ em relação a t, tem-se

$$\ddot{x}(t) = 2z_2 + 6z_3(t - t_0) + 12z_4(t - t_0)^2 + \cdots = A\dot{x}(t) = A^2x(t)$$

- Assim, em $t = t_0$, tem-se

$$z_2 = \frac{A^2}{2}x_0$$

- Derivando-se novamente a solução $x(t)$ em relação a t, tem-se

$$\dddot{x}(t) = 6z_3 + 24z_4(t - t_0) + \cdots = A\ddot{x}(t) = A^3x(t)$$

- Assim, em $t = t_0$, tem-se

$$z_3 = \frac{A^3}{6}x_0$$

- Prosseguindo com as derivadas subsequentes $(z_3, z_4, \ldots)$, percebe-se que

$$z_\ell = \frac{A^\ell}{\ell!} x_0$$

- Portanto, a solução da equação homogênea é dada por

$$x(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} z_\ell (t - t_0)^\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^\ell (t-t_0)^\ell}{\ell!} x_0$$

que pode ser reescita na simbologia mais usual,

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$$

- A matriz de transição de estado (ou matriz exponencial) $e^{A(t-t_0)}$ é dada por

$$e^{A(t-t_0)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^\ell (t-t_0)^\ell}{\ell!}$$

- Para um sistema linear invariante no tempo, pode-se assumir sem perda de generalidade que a condição inicial ocorre no tempo $t_0 = 0$. Assim, a matriz de transição de estado fica sendo e^{At}.

- Considere a equação
$$Ax = \lambda x$$
em que A é uma matriz quadrada $n \times n$ e x um vetor de dimensão $n \times 1$.

- O valor de λ, tal que essa equação venha a ter uma solução $x \neq 0$, é denominado de autovalor. A solução correspondente $x \neq 0$ é o autovetor.

- Essa equação pode ser reescrita como
$$Ax - \lambda x = (A - \lambda I)x = (\lambda I - A)x = 0$$

- Portanto, só haverá uma solução não trivial $x \neq 0$, se a matriz caraterística $\lambda I - A$ for singular, ou seja, se a seguinte equação característica for satisfeita:
$$|\lambda I - A| = 0$$

- Esse determinante, dado por
$$\Lambda(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$
é um polinômio escalar em λ, conhecido como polinômio caraterístico da matriz A.

Análise no espaço de estado

Problema de autovalor e autovetor

- O polinômio característico $\Lambda(\lambda) = |\lambda I - A|$ possui n raízes (autovalores) λ_i, consequentemente, haverá n correspondentes autovetores x_i.
- Sejam as n soluções $(x_i,\, \lambda_i)$, com $i = 1, \ldots, n$, do problema acima. Então:

$$\begin{gathered} Ax_1 = \lambda_1 x_1 \\ Ax_2 = \lambda_2 x_2 \\ \cdots \\ Ax_n = \lambda_n x_n \end{gathered}$$

- Esse sistema pode ser reescrito na forma matricial

$$A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- Definindo $\Sigma = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ e $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, tem-se

$$A\Sigma = \Sigma\Lambda$$

- Se a matriz Σ for não singular, então pode-se diagonalizar a matriz A, já que

$$\Lambda = \Sigma^{-1} A \Sigma$$

- Uma propriedade importante da matriz de transição de estado é

$$\frac{\mathrm{d}e^{At}}{\mathrm{d}t} = Ae^{At} = e^{At}A$$

- Assim, facilmente demonstra-se que $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$ de fato é uma solução:

$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}e^{A(t-t_0)}}{\mathrm{d}t}x_0 = Ae^{A(t-t_0)}x_0 = Ax(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{x}(t) = Ax(t)$$

- Uma outra propriedade importante da matriz de transição de estado é obtida como segue:

$$x(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}x(t_0), \qquad x(t_2) = e^{A(t_2-t_0)}x(t_0)$$

Como t_0 é arbitrário, fazendo-se $t_0 = t_1$, tem-se

$$x(t_2) = e^{A(t_2-t_1)}x(t_1) = e^{A(t_2-t_1)}e^{A(t_1-t_0)}x(t_0)$$

Portanto,

$$e^{A(t_2-t_0)} = e^{A(t_2-t_1)}e^{A(t_1-t_0)}$$

A matriz $e^{A(t_1-t_0)}$ faz a transição de $x(t_0)$ a $x_1(t_1)$ e $e^{A(t_2-t_1)}$ de $x(t_1)$ a $x(t_2)$.

- Se $t_2 = t_0$, então

$$I = e^{A(t_0-t_1)}e^{A(t_1-t_0)} = e^{-A(t_1-t_0)}e^{A(t_1-t_0)} \quad \Longrightarrow \quad \left[e^{A(t_1-t_0)}\right]^{-1} = e^{-A(t_1-t_0)}$$

- A matriz de transição de estado e^{At} pode ser calculada pelos seguintes métodos:

  1. $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$, em que $\mathcal{L}$ denota a transformada de Laplace.

     Para provar essa expressão, note que
     $$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}e^{At}}{\mathrm{d}t}\right] = \mathcal{L}\left[e^{At}A\right] = \mathcal{L}\left[e^{At}\right]A$$
     Por outro lado, da propriedade da transformada de Laplace da derivada, tem-se
     $$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}e^{At}}{\mathrm{d}t}\right] = s\mathcal{L}\left[e^{At}\right] - e^{At}\Big|_{t=0} = s\mathcal{L}\left[e^{At}\right] - I$$
     Igualando essas duas expressões, obtém-se finalmente
     $$\mathcal{L}\left[e^{At}\right]A = s\mathcal{L}\left[e^{At}\right] - I \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left[e^{At}\right](sI - A) = I$$
     $$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\left[e^{At}\right] = (sI - A)^{-1} \quad \Rightarrow \quad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

  2. $e^{At} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell(t)A^\ell$, usando o método polinomial (n polos distintos).

  3. $e^{At} = \Sigma e^{\Lambda t}\Sigma^{-1}$, usando a decomposição em autovalores e autovetores $A = \Sigma\Lambda\Sigma^{-1}$. Essa método é obtido diretamente da seguinte propriedade da matriz de transição de estado: se $|Y| \neq 0$ então $e^{YXY^{-1}} = Ye^{X}Y^{-1}$

Análise no espaço de estado

Matriz de transição de estado

Exemplo: Calcule e^{At} para a seguinte matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$.

1. *Usando a transformada de Laplace:* $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$

   - A matriz $(sI - A)$ é dada por

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$

   - Sua inversa $(sI - A)^{-1}$ é dada por

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} (s+4) & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

   - Aplicando a inversa da transformada de Laplace, obtém-se

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3(e^{-3t} - e^{-t}) & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

2. *Usando o método polinomial:* $e^{At} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell(t) A^\ell$

   Os coeficientes $\alpha_\ell(t)$ são obtidos do sistema $\sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell \lambda_i^\ell = e^{\lambda_i t}$, com $i = 1, \ldots, n$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

   A matriz acima é conhecida como matriz de Vandermonde.

   - O sistema de equações para o exemplo em questão é dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2}\left(3e^{-t} - e^{-3t}\right) \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right) \end{aligned}$$

   - Portanto, a solução fica sendo:

$$e^{At} = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3(e^{-3t} - e^{-t}) & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

3. *Usando a diagonalização:* $e^{At} = \Sigma e^{\Lambda t}\Sigma^{-1}$

- Note que os autovalores de A são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$
- Os respectivos autovetores são $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$
- Portanto a matriz de autovetores $\Sigma = [v_1 \ v_2]$ é dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e a matriz de autovalores Λ é dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

- Finalmente, obtém-se

$$\begin{aligned} e^{At} = \Sigma e^{\Lambda t}\Sigma^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3(e^{-3t} - e^{-t}) & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Exemplo: Calcule a solução homogênea do sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

para a condição inicial

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

- Do exemplo anterior, sabe-se que

$$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3(e^{-3t} - e^{-t}) & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

- Assim, o estado é dada por

$$x(t) = e^{At} x_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

e portanto a resposta homogênea fica sendo

$$y(t) = 0$$

Análise no espaço de estado

Solução forçada

- Seja a equação no espaço de estado dada por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

- Considere uma solução particular na forma

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}v(t), \quad \text{com } v(t) \text{ a ser determinado}$$

- Substituindo $x(t)$ na equação de estado, tem-se

$$Ae^{A(t-t_0)}v(t) + e^{A(t-t_0)}\dot{v}(t) = Ae^{A(t-t_0)}v(t) + Bu(t)$$

- Como $[e^{A(t-t_0)}]^{-1} = e^{-A(t-t_0)}$, obtém-se

$$\dot{v}(t) = e^{-A(t-t_0)}Bu(t)$$

- Considerando que $u(t) = 0$ para $t < t_0$ e integrando, obtém-se

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau-t_0)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

- Notando que $x(t_0) = x_0 = v(t_0)$, tem-se

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \geq t_0$$

- Note que a saída é dada por $y(t) = Cx(t) + Du(t)$

- Exemplo: Calcule a resposta $y(t)$ do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad D = 1,$$

para a entrada em degrau $u(t) = \mu(t)$ e condição inicial $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

- Do exemplo anterior, foi visto que a solução homogênea é nula para esse sistema.

- Assim, resta calcular a resposta forçada dada por

$$\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau = C\left(\int_0^t e^{A(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right)B$$
$$= C\begin{bmatrix} \frac{1}{6}\left(8 + e^{-3t} - 9e^{-t}\right) & \frac{1}{6}\left(2 + e^{-3t} - 3e^{-t}\right) \\ -1 - \frac{e^{-3t}}{2} + \frac{3e^{-t}}{2} & \frac{1}{2}e^{-3t}\left(-1 + e^{2t}\right) \end{bmatrix} B = e^{-3t} - 1$$

- Portanto, a saída $y(t)$ é dada por

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau + Du(t) = e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

- A resposta ao impulso $h(t)$ é obtida da fórmula anterior, com:

$$x_0 = 0, \quad t_0 = 0 \quad \text{e} \quad u(t) = \delta(t)$$

- Assim, usando o fato que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

obtém-se

$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t), \qquad t \geq 0$$

- Esse mesmo resultado pode ser obtido aplicando-se a transformada de Laplace em

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

com condições iniciais nulas, ou seja

$$\begin{aligned} (sI - A)X(s) &= BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

que fornece a função de transferência $H(s)$ dada por

$$Y(s) = H(s)U(s), \qquad H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- Tendo em vista que

$$Y(s) = H(s)U(s), \qquad H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Claramente, a resposta impulsiva $h(t)$ é dada por

$$h(t) = C\mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]B + D\delta(t) = Ce^{At}B + D\delta(t), \qquad t \geq 0$$

- A resposta completa do sistema $y(t)$ é a soma da resposta homogênea:

$$y_h = Ce^{A(t-t_0)}x_0$$

com a resposta forçada, dada pela convolução de $h(t)$ com $u(t)$:

$$y_f = h(t) * u(t) = \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau + Du(t)$$

- Vale a pena relembrar que: $\mathcal{L}[y(t) = h(t) * u(t)] \;\rightarrow\; Y(s) = H(s)U(s)$

- A figura abaixo apresenta o diagrama de blocos da relação entrada-saída.

$$\xrightarrow[U(s)]{u(t)} \boxed{\begin{array}{c} h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \\ H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \end{array}} \xrightarrow[Y(s)]{y(t)}$$

- Os polos estão diretamente associados com os autovalores da matriz A.
- Para ver esse fato, considere o modelo no espaço de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

- A função de transferência correspondente é dada por

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- Usando a fórmula da inversa de uma matriz $X^{-1} = \mathrm{adj}(X)/|X|$, tem-se

$$H(s) = \frac{C\,\mathrm{adj}(sI - A)B}{|sI - A|} + D$$

- Percebe-se, portanto, que os polos de $H(s)$ são as raízes do polinômio caraterístico $|sI - A|$, ou seja, os autovalores λ_i da matriz A.
- Portanto, o sistema será assintoticamente estável se a parte real dos autovalores $\lambda_i(A)$ for negativa, ou seja, $\mathrm{Re}[\lambda_i(A)] < 0$.

Análise no espaço de estado

Polos e estabilidade assintótica

- Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- A função de transferência é dada por

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{C\,\mathrm{adj}(sI - A)B}{|sI - A|} + D$$

- Os polos são as raízes do polinômio característico:

$$\det(sI - A) = 0$$

- Porém cancelamentos entre polos e zeros podem ocorrer.

```
>> % Comandos do Matlab
>> sysc = ss(A,B,C,D)
>> pole(sysc)
>> pzmap(sysc)
```

- Os zeros invariantes são os valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que a matriz:

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

perde posto.

```
>> % Comandos do Matlab
>> sysc = ss(A,B,C,D)
>> tzero(sysc)
>> pzmap(sysc)
```

- Considere o sistema de ordem n dado por

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_n u$$

- A função de transferência correspondente é dada por

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} =: \frac{b(s)}{a(s)}$$

- Note que $Y(s)$ pode ser reescrito como

$$Y(s) = b(s)Q(s), \quad \text{com} \quad Q(s) = \frac{1}{a(s)} U(s)$$

- Para construir o diagrama de blocos de $H(s)$, primeiramente representa-se o termo

$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{1}{a(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

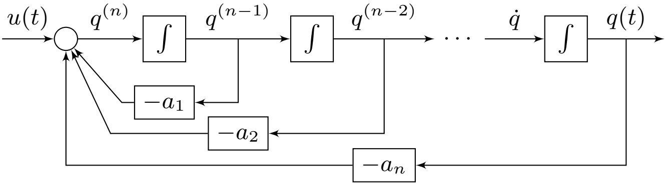
- Em seguida, representa-se o termo

$$Y(s) = b(s)Q(s) = \left(b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n\right) Q(s)$$

- A representação do termo $Q(s)/U(s)$, ou seja, da equação diferencial

$$q^{(n)}(t) + a_1 q^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n q(t) = u(t)$$

é claramente descrita pelo diagrama de blocos abaixo



- Agora, é necessário representar o termo $Y(s) = b(s)Q(s)$, dado por

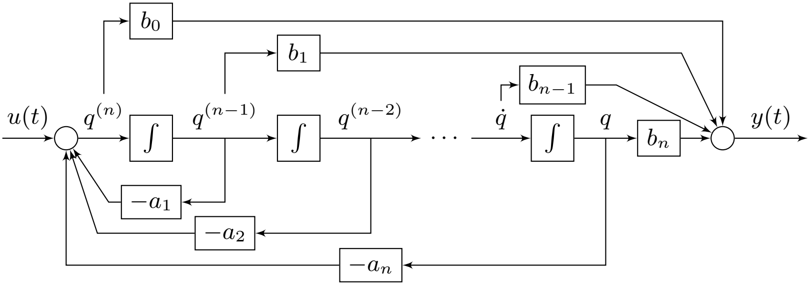
$$Y(s) = \left(b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n\right) Q(s)$$

que no tempo é

$$y(t) = b_0 q^{(n)} + b_1 q^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}\dot{q} + b_n q$$

- Note que os estados $q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)}, q^{(n)}$, necessários para construir a saída $y(t)$, já estão disponíveis no diagrama acima.

- O diagrama de blocos final é dado por



- Para levantar o modelo de estado do sistema na forma canônica controlável, deve-se associar um estado à saída de cada integrador, como segue:

$$\begin{aligned} x_1 &= q \\ x_2 &= \dot{q} \\ &\vdots \\ x_n &= q^{(n-1)} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= q^{(n)} = u - a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_n x_1 \end{aligned}$$

- A saída do sistema, nesse caso, é dada por

$$y(t) = b_n x_1 + b_{n-1} x_2 + \cdots + b_1 x_n + b_0 q^{(n)}$$

- Usando o termo $q^{(n)} = u - a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_n x_1$, tem-se

$$y(t) = (b_n - b_0 a_n) x_1 + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) x_2 + \cdots + (b_1 - b_0 a_1) x_n + b_0 u$$

- Na forma matricial, com $x(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - b_0 a_n & \cdots & b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} x(t) + [b_0] u(t)$$

ou seja

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t)$$
$$y(t) = C_c x(t) + D_c u(t)$$

- Note que os coeficientes do polinômio característico $a(s)$ estão na última linha da matriz A_c e que os elementos da matriz B_c são nulos, exceto o da última posição.

- Considere o sistema de ordem n dado por

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_n u$$

- A função de transferência correspondente é

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} =: \frac{b(s)}{a(s)}$$

- Pode-se mostrar que a sua representação na forma canônica observável é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - b_0 a_n \\ b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + [b_0] u(t)$$

- Seja a função de transferência

$$H(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} := \frac{b(s)}{a(s)}$$

- Considere o caso $n = 3$. Usando a relação

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{b(s)}{a(s)} U(s)$$

tem-se $a(s)Y(s) = b(s)U(s)$, ou seja,

$$s^3 Y(s) + a_1 s^2 Y(s) + a_2 s Y(s) + a_3 Y(s) = b_0 s^3 U(s) + b_1 s^2 U(s) + b_2 s U(s) + b_3 U(s)$$

- Essa equação pode ainda ser reescrita como

$$b_3 U(s) - a_3 Y(s) = \underbrace{s^3 Y(s) - b_0 s^3 U(s) + a_1 s^2 Y(s) - b_1 s^2 U(s) + a_2 s Y(s) - b_2 s U(s)}_{P_1(s)}$$

- Multiplicando o termo $P_1(s)$ por s^{-1}, tem-se

$$s^{-1} P_1(s) = \underbrace{s^2 Y(s) - b_0 s^2 U(s) + a_1 s Y(s) - b_1 s U(s)}_{P_2(s)} + a_2 Y(s) - b_2 U(s)$$

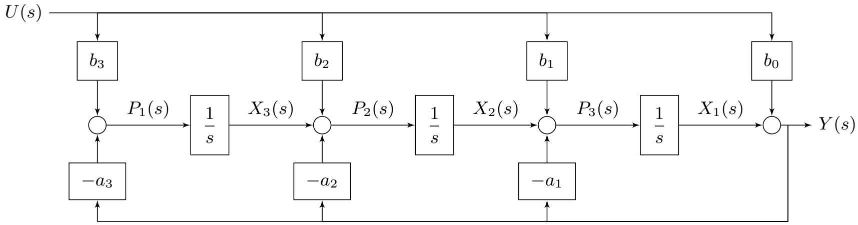
- Multiplicando agora o termo $P_2(s)$ por s^{-1}, tem-se

$$s^{-1}P_2(s) = \underbrace{sY(s) - b_0 sU(s)}_{P_3(s)} + a_1 Y(s) - b_1 U(s)$$

- Multiplicando o termo $P_3(s)$ por s^{-1}, obtém-se, finalmente,

$$s^{-1}P_3(s) = Y(s) - b_0 U(s) \qquad \Longrightarrow \qquad Y(s) = b_0 U(s) + s^{-1}P_3(s)$$

- O diagrama de blocos é apresentado abaixo.



Análise no espaço de estado

Forma canônica observável

- Definindo os estados x_1, x_2 e x_3 como indicado no diagrama de blocos, tem-se

$$
\begin{aligned}
y(t) &= x_1(t) + b_0 u(t) \\
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) + b_1 u(t) - a_1 y(t) = -a_1 x_1(t) + x_2(t) + (b_1 - b_0 a_1) u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t) + b_2 u(t) - a_2 y(t) = -a_2 x_1(t) + x_3(t) + (b_2 - b_0 a_2) u(t) \\
\dot{x}_3(t) &= b_3 u(t) - a_3 y(t) = -a_3 x_1(t) + (b_3 - b_0 a_3) u(t)
\end{aligned}
$$

- Na forma matricial, tem-se

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A_o x(t) + B_o u(t) \\
y(t) &= C_o x(t) + D_o u(t)
\end{aligned}
$$

com

$$
A_0 = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} b_1 - b_0 a_1 \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_3 - b_0 a_3 \end{bmatrix}, \quad C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_o = [b_0]
$$

Análise no espaço de estado

Forma canônica modal

- Considere a função de transferência

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

  com polos distintos.

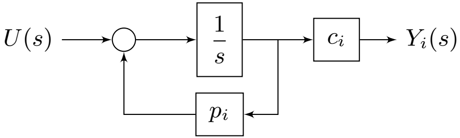
- Suponha que $H(s)$ tenha a seguinte decomposição em frações parciais:

$$H(s) = c_0 + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n}$$

- Note que cada fração parcial

$$H_i(s) = \frac{Y_i(s)}{U(s)} = \frac{c_i}{s - p_i}$$

  pode ser representada pelo seguinte diagrama de blocos:



- Fica claro que a função de transferência $H(s)$ será a soma (a conexão em paralelo) de cada um dos blocos $H_i(s)$.

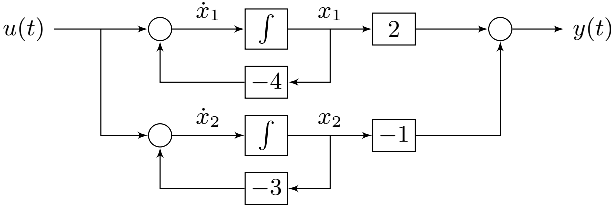
Análise no espaço de estado

Forma canônica modal

- Exemplo: Considere a função de transferência

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12} = \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+3}$$

- Sua representação na forma canônica modal é



- O modelo no espaço de estado desacoplado é obtido diretamente do diagrama:

$$\dot{x}_1 = u - 4x_1, \qquad \dot{x}_2 = u - 3x_2, \qquad y = 2x_1 - x_2$$

ou seja, as matrizes de estado (A, B, C, D) são dadas por

$$A_m = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_m = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_m = [0]$$

- A solução $x_i(t)$ é dada por: $x_i(t) = e^{p_i t} x_i(0) + \int_0^t e^{p_i(t-\tau)} u(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad t \geq 0.$

- Suponha que a função de transferência $H(s)$ tenha a decomposição:

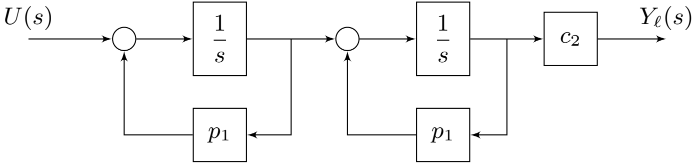
$$\begin{aligned} H(s) &= c_0 + \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{c_\ell}{(s-p_1)^\ell} + \frac{c_{\ell+1}}{s-p_{\ell+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s-p_n} \\ &= c_0 + H_1(s) + H_2(s) + \cdots + H_\ell(s) + H_{\ell+1}(s) + \cdots + H_n(s) \end{aligned}$$

  em que p_1 tem multiplicidade ℓ e os polos restantes são todos distintos.

- Para obter a representação de $H(s)$, basta notar que uma fração parcial na forma

$$H_\ell(s) = \frac{Y_\ell(s)}{U(s)} = \frac{c_\ell}{(s-p_1)^\ell}$$

  tem a representação abaixo (para o caso $\ell = 2$):

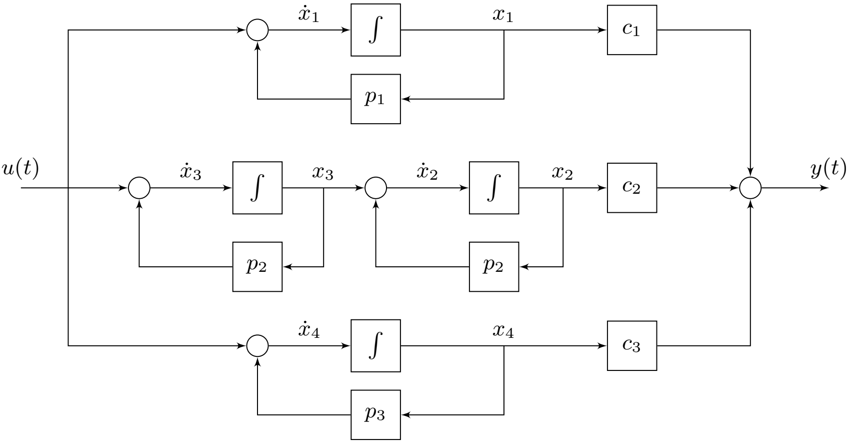


- A função de transferência $H(s)$ será então composta pela conexão em paralelo dos blocos $H_i(s)$, incluindo todas as possíveis multiplicidades.

- Exemplo: Suponha que a função de transferência $H(s)$ seja dada por

$$H(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{(s - p_2)^2} + \frac{c_3}{s - p_3}$$

- Sua representação na forma canônica de Jordan está apresentada abaixo.



- O modelo no espaço de estado é obtido diretamente do diagrama, como segue:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u + p_1 x_1\\ \dot{x}_2 &= x_3 + p_2 x_2\\ \dot{x}_3 &= u + p_2 x_3\\ \dot{x}_4 &= u + p_3 x_4\end{aligned}$$

- A saída $y(t)$ é dada por

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_4$$

- Portanto, as matrizes A_J, B_J, C_J e D_J, na forma de Jordan, são dadas por

$$A_J = \begin{bmatrix} \boxed{p_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & p_2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & p_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{p_3}\end{bmatrix}, \quad B_J = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad C_J = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 & c_3\end{bmatrix}, \quad D_J = [0]$$

- A matriz A_J tem três blocos de Jordan: o primeiro de dimensão 1×1, o segundo de dimensão 2×2 e o terceiro de dimensão 1×1.
- Quando existirem polos com multiplicidade, o mais próximo que se pode esperar de uma matriz A diagonal é a forma de Jordan, em que o elemento não nulo da diagonal superior terá valor 1.

- Na apresentação das formas canônicas, não foi considerado o fato que $H(s)$ pode conter cancelamentos de polos e zeros.

- Assumindo na expressão anterior que $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$, $p_1 = p_2 = 1$ e $p_3 = 3$, tem-se

$$H(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{3}{s-3} = \frac{4s^3 - 12s^2 + 8s}{s^4 - 6s^3 + 12s^2 - 10s + 3}$$

- O diagrama de blocos e a representação na forma canônica de Jordan foram apresentadas anteriormente.

- Porém, fatorando $H(s)$ como o produto de polos e zeros, tem-se equivalentemente

$$H(s) = \frac{4s(s-2)(s-1)}{(s-3)(s-1)^3} = \frac{4s(s-2)}{(s-3)(s-1)^2} = \frac{4s^2 - 8s}{s^3 - 5s^2 + 7s - 3}$$

- Percebe-se que ocorreu um cancelamento de polo e zero, reduzindo assim a ordem de $H(s)$ de quatro para três.

- Para essa função de transferência $H(s)$, agora de ordem três, uma representação na forma de Jordan pode ser dada por

$$A_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B_J = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Uma outra representação com A_J na forma de Jordan é dada por

$$A_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B_J = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad C_J = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

- A matriz da transformação de similaridade que relaciona essas duas representações é dada por

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$