ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

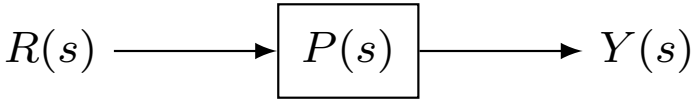
Nota ao leitor

- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4ª edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd Ed., Add.-Wesley, 1994.
- Material suplementar:
  - K. Ogata, *Discrete-time control systems*, 2nd Edition, P.-Hall, 1995.
  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8ª edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

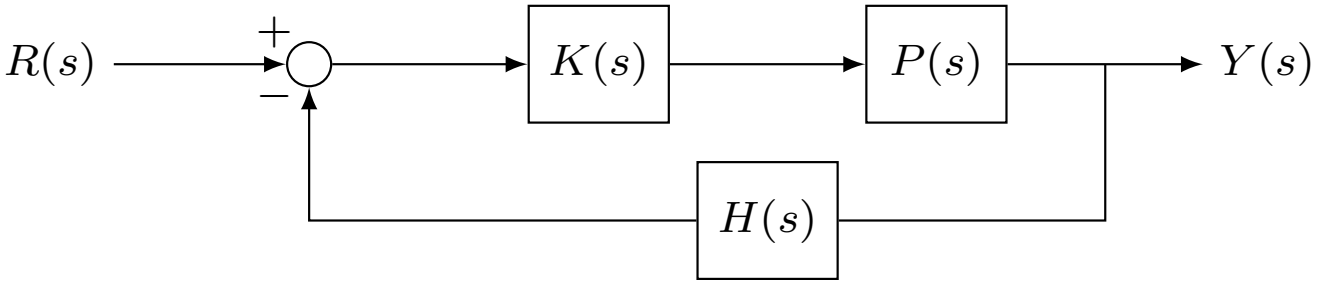
Lugar das raízes (Root Locus)

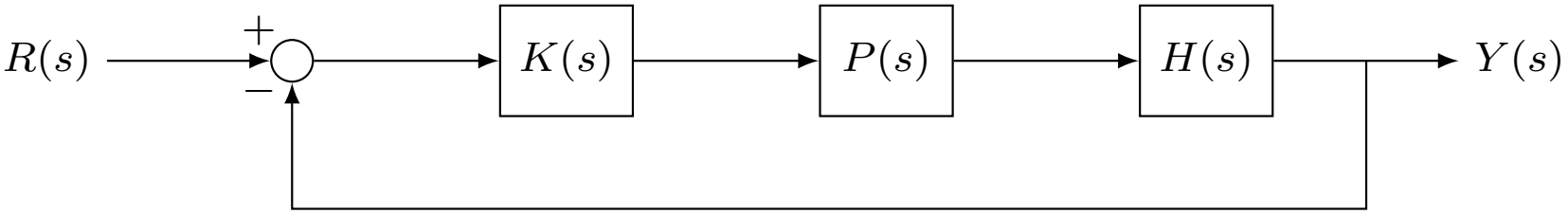
Conceitos básicos

- Sistemas físicos, mecânicos e elétricos, podem ser representados por uma função de transferência $P(s)$ em "malha aberta".



- Geralmente, deseja-se estabilidade e desempenho (respostas transitórias e permanentes) que não são possíveis no sistema em malha aberta.
- Portanto, faz-se necessário um projeto de controlador por realimentação (feedback).
- A figura abaixo apresenta diferentes diagramas de controle em malha fechada.





Lugar das raízes (Root Locus)

Conceitos básicos

- Todos esses diagramas possuem a mesma equação característica, dada por

$$1 + K(s)P(s)H(s) = 0$$
$$1 + K(s)F(s) = 0, \qquad F(s) = P(s)H(s)$$

- No entanto, as funções de transferência em malha fechada são diferentes.
- A forma mais simples do controlador é um ganho estático $K(s) = K$.
- Note que se um controlador $K(s)$ tiver a forma

$$K(s) = K\frac{s+b}{s+a}$$

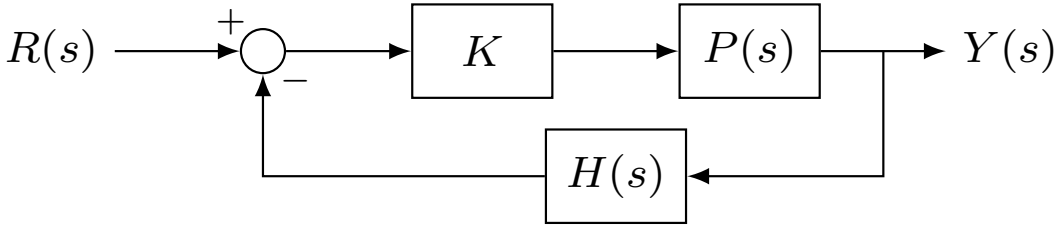
com a e b conhecidos, pode-se incluir o termo $\frac{(s+b)}{(s+a)}$ dentro de $F(s)$.

- A estabilidade e o desempenho do sistema em malha fechada dependem de seus polos, ou seja, das raízes da equação característica.
- Assim, é importante conhecer onde essas raízes (os polos) se localizam no plano complexo em função do ganho do controlador K.
- Essa é a motivação para o root locus (lugar das raízes).

Lugar das raízes (Root Locus)

Análise do lugar das raízes

- O root locus fornecerá para o sistema abaixo o gráfico dos polos em função de K.



- Em malha fechada, tem-se

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KP(s)}{1 + KP(s)H(s)}$$

- A equação característica que fornece a localização dos polos em malha fechada é:

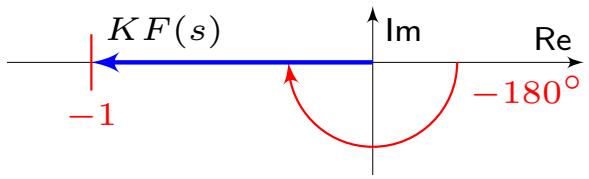
$$1 + KF(s) = 0, \qquad F(s) = P(s)H(s)$$

- Essa equação pode ser reescrita como

$$KF(s) = K\frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = -1$$

- Note que essa equação tem que satisfazer:

$$|KF(s)| = 1$$
$$\angle KF(s) = \pm 180^\circ(2n+1), \quad n = 0, 1, \ldots$$



Lugar das raízes (Root Locus)

Análise do lugar das raízes

- Para um dado $s = \bar{s}$, pode-se reescrever $F(\bar{s})$ como

$$\begin{aligned} F(\bar{s}) &= \frac{\bar{z}_1 e^{i\phi_1}\, \bar{z}_2 e^{i\phi_2} \cdots \bar{z}_m e^{i\phi_m}}{\bar{p}_1 e^{i\theta_1}\, \bar{p}_2 e^{i\theta_2} \cdots \bar{p}_n e^{i\theta_n}} \\ &= \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_m}{\bar{p}_1 \bar{p}_2 \cdots \bar{p}_n} \frac{e^{i(\phi_1+\phi_2+\cdots+\phi_m)}}{e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}} \\ &= \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_m}{\bar{p}_1 \bar{p}_2 \cdots \bar{p}_n} e^{i(\phi_1+\phi_2+\cdots+\phi_m-\theta_1-\theta_2-\cdots-\theta_n)} \end{aligned}$$

- Assim, $F(\bar{s})$ é dado por

$$F(\bar{s}) = |F(\bar{s})| e^{i\alpha}$$

com

$$|F(\bar{s})| = \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_m}{\bar{p}_1 \bar{p}_2 \cdots \bar{p}_n}$$

e

$$\alpha = \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_m - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)$$

calculado entre $[0, 360^\circ)$ no sentido anti-horário.

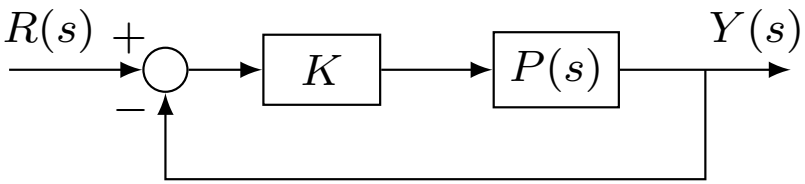
- Portanto, se o ponto de teste $\bar{s}$ pertence ao lugar das raízes, então:

$$|KF(\bar{s})| = K \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_m}{\bar{p}_1 \bar{p}_2 \cdots \bar{p}_n} = 1 \qquad \text{e} \qquad \alpha = \pm 180^\circ (2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Lugar das raízes (Root Locus)

Análise do lugar das raízes

- Exemplo: Considere o sistema abaixo com $P(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$.



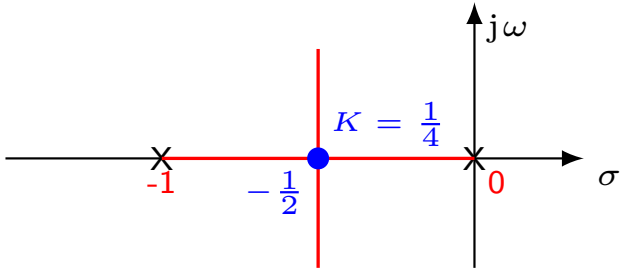
- Sua equação característica é

$$1 + KP(s) = 0$$

ou seja

$$1 + K\frac{1}{s(s+1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + s + K = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$$

- Para $0 \leq K \leq 1/4$ as raízes são reais:
  - Se $K = 0$, tem-se $s = 0$ e $s = -1$.
  - Se $K = 1/4$, tem-se $s_{1,2} = -1/2$.



- Para $K \geq 1/4$, tem-se $s_{1,2} = -1/2(1 \pm \mathrm{j}\sqrt{4K-1})$.

Lugar das raízes (Root Locus)

Análise do lugar das raízes

- Exemplo: Suponha que $F(s)$ seja dada por

$$F(s) = P(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

cujos polos estão localizados em $s = 0$, $s = -1$ e $s = -2$.

- A equação característica desse sistema é dada por

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

- A condição de ângulo fornece

$$\begin{aligned} \angle KF(s) &= \angle \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \\ &= -\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2) \\ &= \pm 180^\circ (2n+1) \end{aligned}$$

- E a condição de módulo (com $K > 0$) fornece

$$\frac{K}{|s||s+1||s+2|} = 1$$

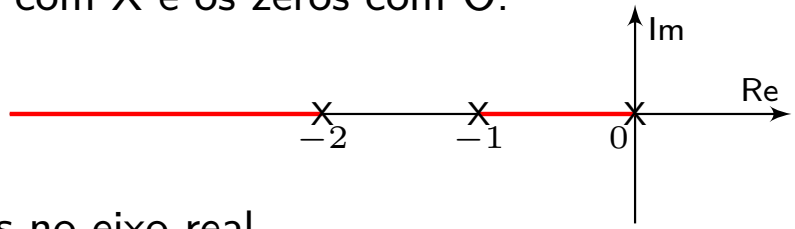
Lugar das raízes (Root Locus)

Análise do lugar das raízes

- A seguir serão apresentados os passos para fazer o esboço do root locus de:

$$F(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

1. Marque no plano s os polos com X e os zeros com O.



2. Determine o lugar das raízes no eixo real.
   - Seja o ponto de teste s no eixo real positivo ($s > 0$), então
   $$\angle s = \angle(s+1) = \angle(s+2) = 0^\circ$$
   e a condição de ângulo não pode ser satisfeita.
   - Para s entre -1 e 0, tem-se
   $$\angle s = -180^\circ, \quad \text{e} \quad \angle(s+1) = \angle(s+2) = 0^\circ$$
   Nesse caso, a condição de ângulo pode ser satisfeita nesse caso.
   - Para s entre -2 e -1, tem-se
   $$\angle s = -180^\circ, \quad \angle(s+1) = -180^\circ \quad \text{e} \quad \angle(s+2) = 0^\circ$$
   Portanto, a condição de ângulo não pode ser satisfeita.
   - Para $s < -2$, tem-se
   $$\angle s = -180^\circ, \quad \angle(s+1) = -180^\circ \quad \text{e} \quad \angle(s+2) = -180^\circ$$
   Assim, a condição de ângulo pode ser satisfeita.

3. Determine as assíntotas do lugar das raízes quando $|s| \to \infty$.

$$\lim_{|s|\to\infty} KF(s) = \lim_{|s|\to\infty} \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{|s|\to\infty} \frac{K}{s^3}$$

Para K/s^3, a condição de ângulo é $-3\angle s = \pm 180^\circ(2n+1)$

Assim, o ângulo das assíntotas é $\pm 60^\circ(2n+1)$, que fornece: 60°, -60°, 180°.

4. Se o ponto s estiver no eixo real afastado da origem, então

$$KF(s) \approx \frac{K}{(s+1)^3}$$

A condição de ângulo fornece

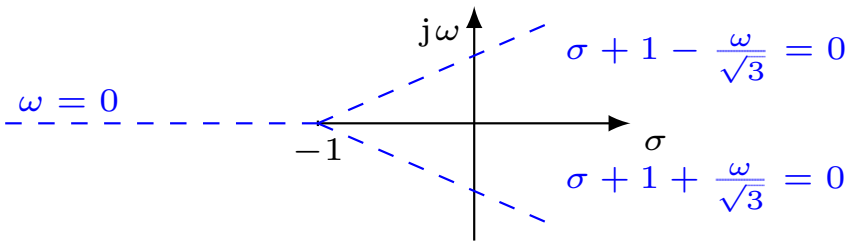
$$-3\angle(s+1) = \pm 180^\circ(2n+1) \qquad \Rightarrow \qquad \angle(s+1) = \pm 60^\circ(2n+1)$$

Fazendo $s = \sigma + \mathrm{j}\omega$, tem-se

$$\angle(\sigma + \mathrm{j}\omega + 1) = \pm 60^\circ(2n+1) \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+1}\right) = \pm 60(2n+1) = 60,\ -60,\ 180$$

ou seja

$$\frac{\omega}{\sigma+1} = \sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 0$$



Lugar das raízes (Root Locus)

Análise do lugar das raízes

5. Ponto de partida no eixo real. Reescreva a equação característica como

$$\Gamma(s) = 1 + KF(s) = 1 + K\frac{n(s)}{d(s)} = 0 \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{d(s)}{n(s)}$$

Agora, derivando a equação característica, tem-se

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma(s)}{\mathrm{d}s} = KF'(s) = K\frac{n'(s)d(s) - d'(s)n(s)}{d^2(s)} = 0$$

Assim:

$$n'(s)d(s) - d'(s)n(s) = 0$$

Porém, note que

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s} = -\frac{d'(s)n(s) - n'(s)d(s)}{n^2(s)} = 0 \quad \Rightarrow \quad n'(s)d(s) - d'(s)n(s) = 0$$

Portanto, $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}$ pode ser usado para se determinar as raízes de $\frac{\mathrm{d}\Gamma(s)}{\mathrm{d}s}$.

Perceba agora que no ponto de partida $s = s_1$, no eixo real, a equação característica $\Gamma(s)$ deve conter raízes múltiplas reais de ordem $r > 1$, então $\Gamma(s)$ tem a forma:

$$\Gamma(s) = (s - s_1)^r(s - s_2)\cdots(s - s_n) \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{d}\Gamma(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=s_1} = 0$$

Assim, o ponto de partida $s = s_1$ pode ser determinado calculando-se as raízes de

$$\left.\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}\right|_{s=s_1} = 0 \quad \text{com} \quad K = -d(s)/n(s)$$

Lugar das raízes (Root Locus)

Análise do lugar das raízes

Para o nosso exemplo

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0 \quad \rightarrow \quad K = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s} = 0 \quad \rightarrow \quad -3s^2 - 6s - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad s = \begin{cases} -0.4226 \\ -1.5774 \end{cases}$$

Como não existe root locus entre $(-2, -1)$, o ponto de partida é em $s = -0.4226$.

6. Cruzamento com o eixo imaginário. Usando o critério de Routh

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

$$\begin{array}{lcc} s^3: & 1 & 2 \\ s^2: & 3 & K \\ s^1: & (6-K)/3 & \\ s^0: & K & \end{array}$$

Portanto, as raízes estarão no eixo imaginário se $K = 6$.
Usando o polinômio auxiliar, com $K = 6$, tem-se

$$3s^2 + K = 3s^2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm \mathrm{j}\sqrt{2}$$

Portanto $\omega = \pm\sqrt{2}$ em $K = 6$.

Observação: Pode-se também fazer $s = \mathrm{j}\omega$ na equação característica

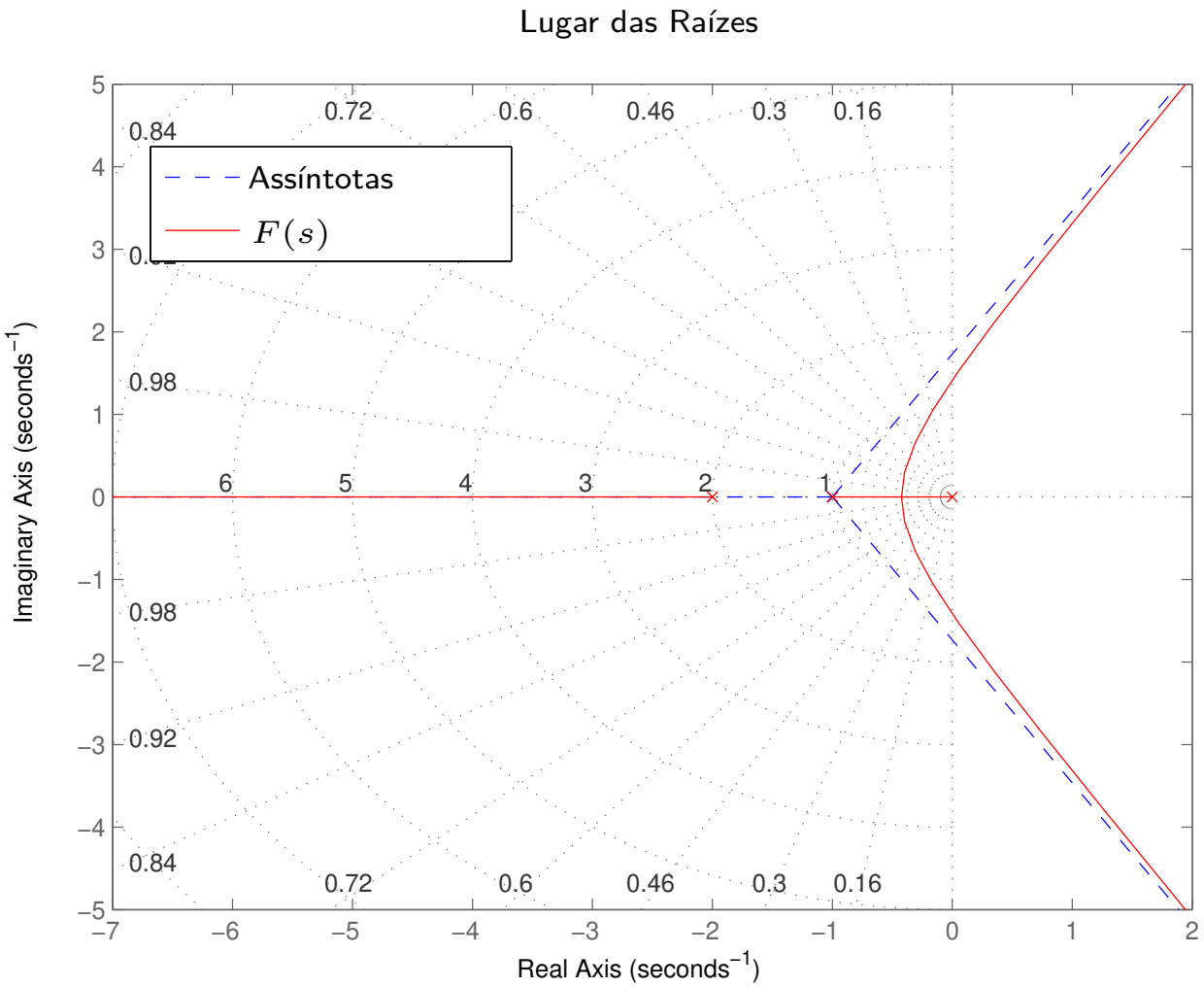
$$(\mathrm{j}\omega)^3 + 3(\mathrm{j}\omega)^2 + 2(\mathrm{j}\omega) + K = 0 \quad \rightarrow \quad (K - 3\omega^2) + \mathrm{j}(2\omega - \omega^3) = 0$$

Portanto, $K - 3\omega^2 = 0$ e $2\omega - \omega^3 = 0$, ou seja, $\omega = \pm\sqrt{2}, K = 6$ ou $\omega = 0, K = 0$.

Lugar das raízes (Root Locus)

Análise do lugar das raízes

- A figura abaixo apresenta o lugar das raízes de $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$.



- Observação: No Matlab, esse gráfico é obtido com o comando **rlocus(F)**.

Lugar das raízes (Root Locus)

Análise do lugar das raízes

- Exemplo: Para $K = 1$ e $P(s) = \dfrac{1}{s(s+c)}$, esboce o root locus com relação a $c > 0$.
- A equação característica é dada por

$$1 + P(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + cs + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + c\frac{s}{s^2+1} = 0$$

ou seja

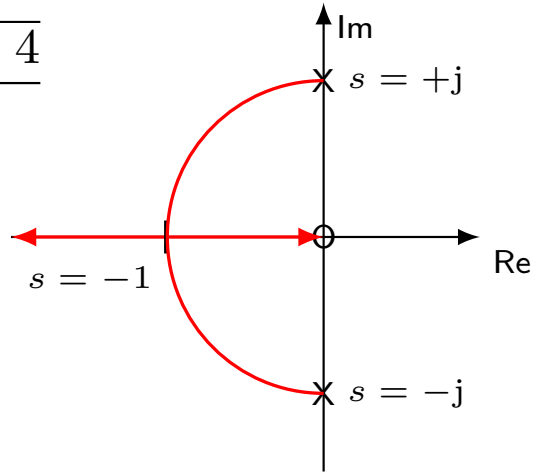
$$1 + c\,F(s) = 0, \qquad F(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

- Note que $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)}$ tem zeros em $s = 0$ e $s = \infty$ e polos em $s = \pm\mathrm{j}$.
- As raízes da equação característica são

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \frac{\sqrt{c^2-4}}{2}$$

Portanto:

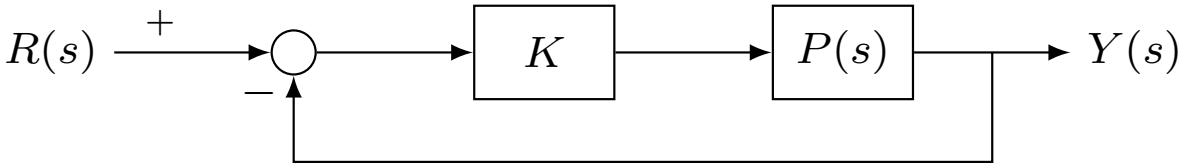
- para $c = 0$, tem-se $s_{1,2} = \pm\mathrm{j}$;
- para $c = 2$, tem-se $s_{1,2} = -1$;
- para $c \gg 0$, tem-se $s \to 0$ e $s \to -c$.



Lugar das raízes (Root Locus)

Análise do lugar das raízes

- É possível fazer o root locus negativo (ou seja, para $K < 0$) no diagrama abaixo.



- Basta notar que o root locus de $P(s)$ para valores negativos de K é equivalente ao root locus positivo (para $K > 0$) da planta $-P(s)$, ou seja:

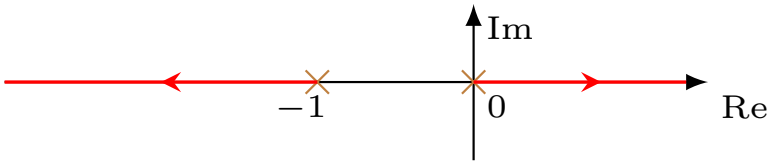
$$1 + KP(s) = 0, \text{ para } K < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + K\bar{P}(s) = 0, \text{ para } K > 0 \text{ e } \bar{P} = -P$$

- Exemplo: Suponha que se deseje fazer o root locus negativo de $P(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$.

- Assim, a equação característica com $K > 0$ para a planta $-P(s)$ é dada por

$$1 + K\frac{-1}{s(s+1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + s - K = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+4K}}{2}$$

- Fornecendo o root locus apresentado na figura abaixo.



Lugar das raízes (Root Locus)

Regras para fazer o gráfico do Root Locus

- A equação característica $\Gamma(s) := d(s) + Kn(s) = 0$ é dada por

$$1 + K\frac{n(s)}{d(s)} = 1 + K\frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} = 1 + K\frac{(s - z_1)\cdots(s - z_m)}{(s - p_1)\cdots(s - p_n)} = 0$$

- Note que $-a_1 = \sum p_i$ e $-b_1 = \sum z_i$.
- Os passos para fazer o esboço do root locus são:
  1. Marque os polos com X e os zeros com O.
  2. Desenhe o root locus no eixo real.
  3. Desenhe as assíntotas, centradas em α, com ângulos ϕ_l, em que:
     - $n - m$ é o número de assíntotas;
     - $\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{-a_1 + b_1}{n-m}$;
     - $\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ(l-1)}{n-m}$, $l = 1, 2, \ldots, n - m$.
  4. Determine os pontos s_i de partida do eixo real ou de chegada no eixo real usando

$$\left.\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}\right|_{s=s_i} = 0 \quad \text{com} \quad K = -d(s)/n(s)$$

Lugar das raízes (Root Locus)

Regras para fazer o gráfico do Root Locus

5. Calcule os ângulos θ_p de partida dos polos

$$q\,\theta_p = \sum \phi_i - \sum \theta_i - 180^\circ - 360^\circ l$$

em que

- q é a multiplicidade do polo;
- l é um inteiro tal que o ângulo esteja entre -180° e 180°;
- $\sum \theta_i$ é a soma dos ângulos dos polos remanescentes;
- $\sum \phi_i$ é a soma dos ângulos de todos os zeros.

6. Calcule os ângulos ϕ_z de chegada nos zeros

$$q\,\phi_z = \sum \theta_i - \sum \phi_i + 180^\circ + 360^\circ l$$

em que

- q é a multiplicidade do zero;
- l é um inteiro tal que o ângulo esteja entre -180° e 180°;
- $\sum \theta_i$ é a soma dos ângulos de todos os polos;
- $\sum \phi_i$ é a soma dos ângulos dos zeros remanescentes.

7. Calcule os pontos onde o root locus cruza o eixo imaginário usando:
   - o critério de Routh;
   - ou resolvendo a equação característica para $s = \mathrm{j}\omega$.

Lugar das raízes (Root Locus)

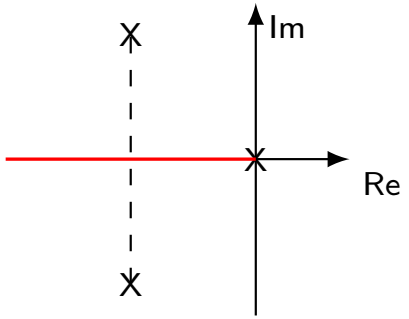
Regras para fazer o gráfico do Root Locus

Exemplo: Seja a planta dada por

$$P(s) = \frac{1}{s((s+4)^2+16)}$$

cujos polos estão em $s = 0$ e $s_{1,2} = -4 \pm 4\mathrm{j}$.

1. Root Locus no eixo real.
   - O ângulo dos polos (zeros) complexos se cancelam.
   - Portanto, para um ponto de teste $s_0 \geq 0$, no eixo real, o ângulo é $0°$.
   - Para $s_0 < 0$, o ângulo é $+180°$, que satisfaz a condição de ângulo.



2. Determinar as assíntotas para valores grandes de $K \to \infty$.
   - Note que $1 + KP(s) = 0 \quad \to \quad P(s) = -\frac{1}{K}$.
   - Assim $K \to \infty$ implica que $P(s) \to 0$.
   - Isso pode ocorrer de duas formas:

Lugar das raízes (Root Locus)

Regras para fazer o gráfico do Root Locus

2.1 Primeiro, como $P(s) = n(s)/d(s)$, tem-se que $P(s) \to 0$ implica que $n(s) \to 0$. Portanto, para $K \gg 1$ as raízes de $1 + KP(s)$ tenderão aos zeros de $P(s)$.

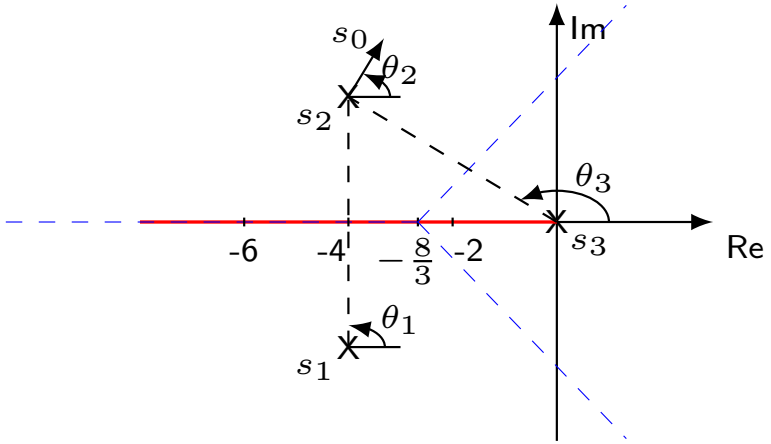
2.2 Segundo, note que

$$1 + K\frac{n(s)}{d(s)} = 0 \quad \to \quad 1 + K\frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} = 0$$

Assumindo $n > m$, tem-se que para valores grandes de s, as potências de ordem maiores em s predominam, permitindo fazer a seguinte aproximação:

$$1 + K\frac{1}{(s-\alpha)^{n-m}} = 0$$

Basta agora determinar as assíntotas, centradas em α com ângulos ϕ_l, em que $n - m$ é o número de assíntotas; $\alpha = \frac{-a_1+b_1}{n-m}$; e $\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ(l-1)}{n-m}$.
Para o nosso exemplo, tem-se $n - m = 3$, $\alpha = -8/3 = -2.67$ e $\phi_l = 60^\circ, -60^\circ, 180^\circ$.

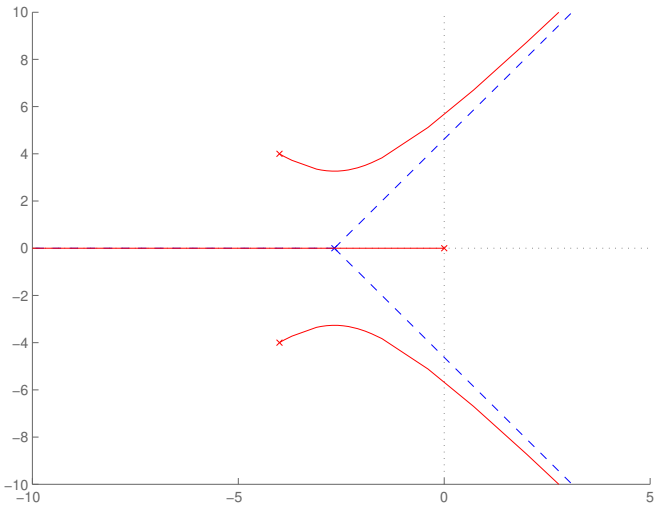


Lugar das raízes (Root Locus)

Regras para fazer o gráfico do Root Locus

3. Ângulos de chegada e de partida.
   Escolhe-se um ponto de teste próximo do polo s_2 de tal forma que os ângulos não variem. Assim
   $$-90^\circ - \theta_2 - 135^\circ = 180^\circ + 360^\circ l$$
   em que l é selecionado de forma a fornecer $-180^\circ < \theta_2 < 180^\circ$.
   Com $l = -1$, tem-se $-\theta_2 = 90^\circ + 135^\circ + 180^\circ - 360^\circ$, ou seja $\theta_2 = -45^\circ$.

4. Ponto de cruzamento com o eixo imaginário
   $$1 + \frac{K}{s((s+4)^2+16)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 8s^2 + 32s + K = 0$$
   Fazendo $s = \mathrm{j}\omega$, tem-se
   $$(\mathrm{j}\omega)^3 + 8(\mathrm{j}\omega)^2 + 32\mathrm{j}\omega + K = 0$$
   $$-\mathrm{j}\omega^3 - 8\omega^2 + 32\mathrm{j}\omega + K = 0$$
   Portanto
   $$-8\omega^2 + K = 0 \quad \rightarrow \quad K = 8\omega^2 = 256$$
   $$-\omega^3 + 32\omega = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = 0, \ \underline{\omega = \sqrt{32}}$$



Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador estático

- O objetivo do projeto é selecionar um ganho estático K a partir do root locus.
- A equação característica $1 + KP(s) = 0$ fornece as condições:

$$\begin{aligned} |KP(s)| &= 1 \\ \angle KP(s) &= \pm 180^\circ (2n+1), \qquad n = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

- Portanto, para um específico ponto s_0 no root locus, o ganho é dado por

$$K = \frac{1}{|P(s_0)|}$$

- Exemplo: Suponha que a planta $P(s)$ seja dada por

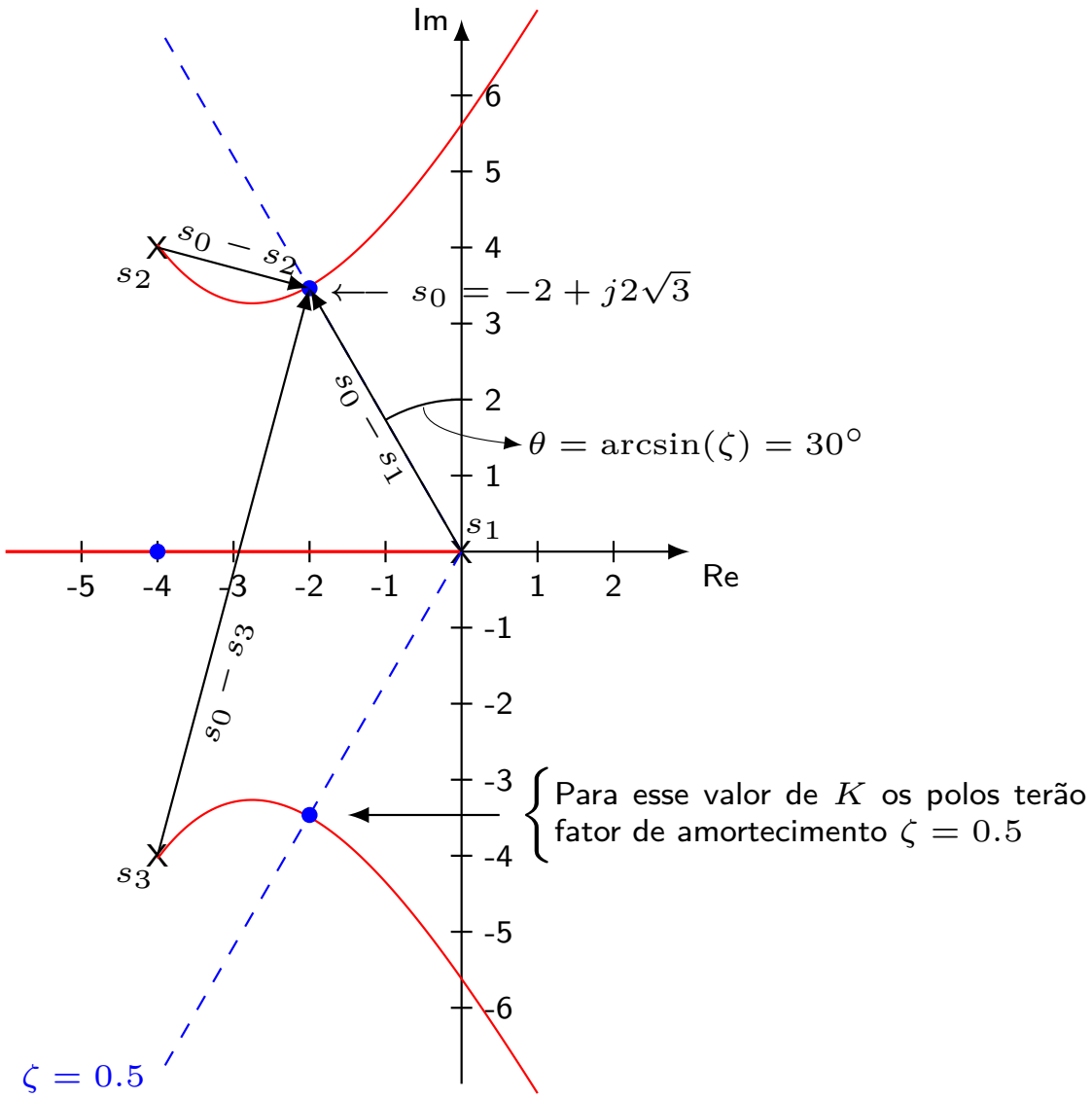
$$P(s) = \frac{1}{s((s+4)^2 + 16)}$$

  cujos polos estão localizados em $s = 0$ e $s_{1,2} = -4 \pm 4j$.

- O objetivo do projeto é determinar o valor do ganho K de forma que os polos dominantes do sistema em malha fechada tenham fator de amortecimento $\zeta = 0.5$.
- O gráfico do root locus, que foi anteriormente derivado e que será utilizado para o projeto, está apresentado na próxima página.

Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador estático



Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador estático

- O valor do ganho no ponto desejado s_0 será dado por $K = \dfrac{1}{|P(s_0)|}$
- Algebricamente, tem-se $P(s_0) = \dfrac{1}{s_0(s_0 - s_2)(s_0 - s_3)}$
- Portanto, $K = \dfrac{1}{|P(s_0)|} = |s_0||s_0 - s_2||s_0 - s_3|$
- Assim, pode-se calcular o ganho K necessário para alocar as raízes no ponto $s = s_0$, medindo o comprimento dos respectivos vetores e multiplicando-os.
- Usando uma figura com escala, tem-se:

$$|s_0| \approx 4.0, \qquad |s_0 - s_2| \approx 2.1, \qquad |s_0 - s_3| \approx 7.6$$

- Portanto o ganho é estimado como sendo $K = 4.0 \times 2.1 \times 7.6 \approx 64$.
- Note que o sistema é do tipo 1 e terá assim uma constante de velocidade:

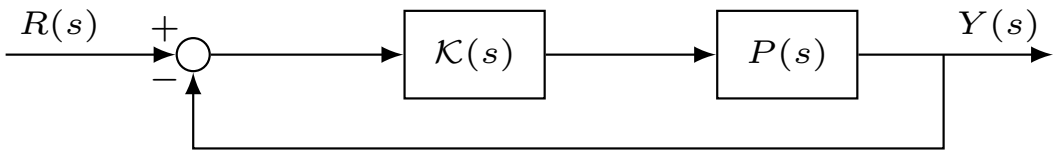
$$K_v = \lim_{s \to 0} sKP(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s64}{s((s+4)^2 + 16)} = \frac{64}{32} = 2$$

- Se for desejado um K_v maior, ou ainda que o erro estacionário seja zero, esse compensador estático K não será suficiente.

Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico

- O objetivo é projetar usando o root-locus o compensador dinâmico $\mathcal{K}(s)$.



- O compensador $\mathcal{K}(s) = K\dfrac{s+z}{s+p}$ é chamado de:
  1. compensador em avanço de fase se $z < p$ (zero se encontra à direita do polo);
  2. compensador em atraso de fase se $z > p$ (zero se encontra à esquerda do polo).
- A terminologia avanço/atraso deve-se ao fato que, para $s = +\mathrm{j}\omega$, a fase de

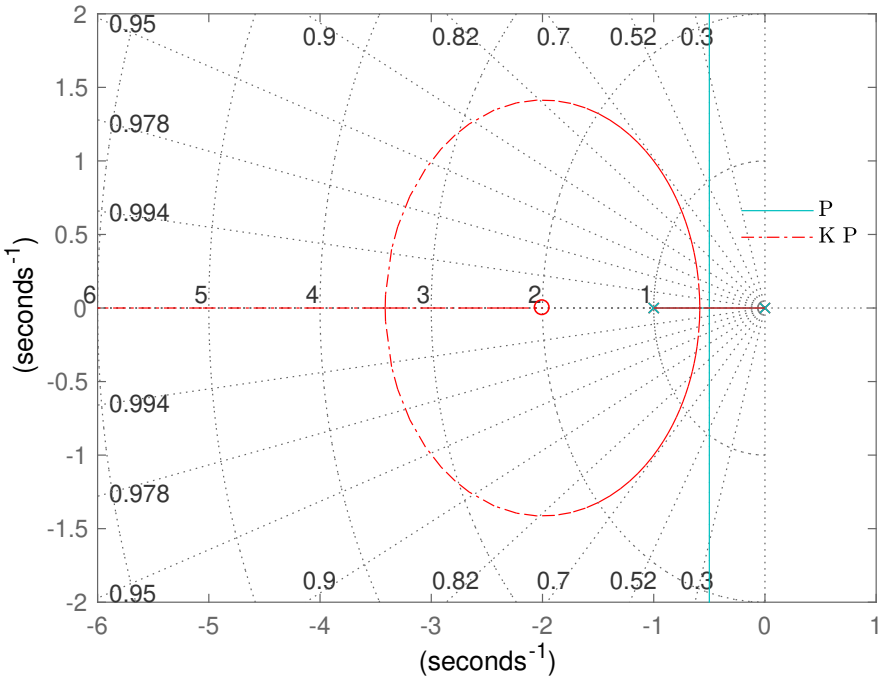
$$\mathcal{K}(s) = K\frac{s+z}{s+p} \quad \text{é} \quad \phi = \operatorname{arctan2}(\omega, z) - \operatorname{arctan2}(\omega, p)$$

- Portanto, se $z < p$, então ϕ é positivo, o que indica um avanço de fase.
- Uma outra notação possível é dada por $\mathcal{K}(s) = K\alpha\dfrac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K\dfrac{s+1/T}{s+1/(\alpha T)}$
- Note a relação entre z, p, e α dada por: $z = 1/T$, $p = 1/(\alpha T)$ e $z = \alpha p$.
- Para o compensador estável (em que $p > 0$):
  1. se $\alpha < 1$, tem-se uma compensação por avanço de fase;
  2. se $\alpha > 1$, tem-se uma compensação por atraso de fase.

Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: avanço de fase

- A seguir é apresentado o efeito de uma compensação em avanço de fase.
- Suponha que a planta seja dada por $P(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ e que o compensador projetado tenha sido $\mathcal{K}(s) = K(s+2)$.
- A figura abaixo apresenta o root locus do sistema com e sem compensação.



- Percebe-se que com esse compensador é possível obter $\zeta \geq 0.5$ com $\omega_n \geq 2$.

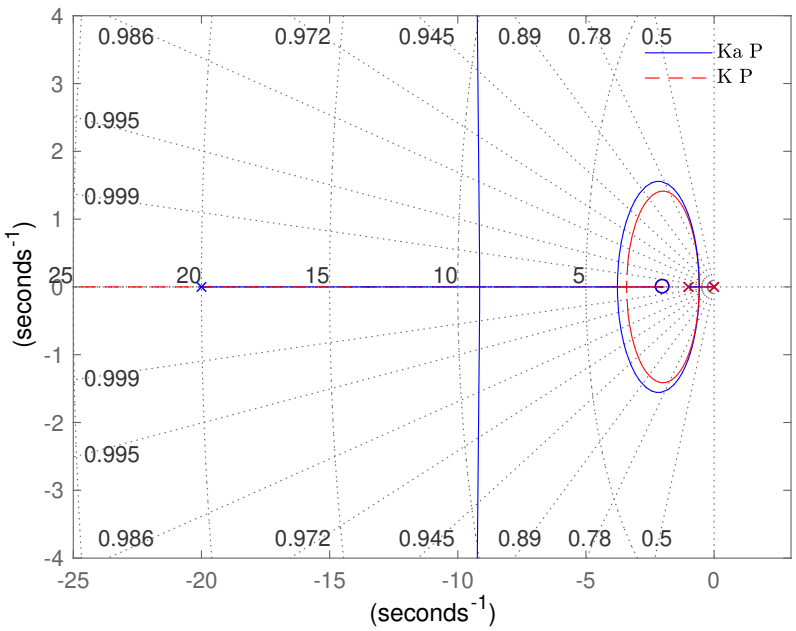
Projeto de controladores usando o lugar das raízes

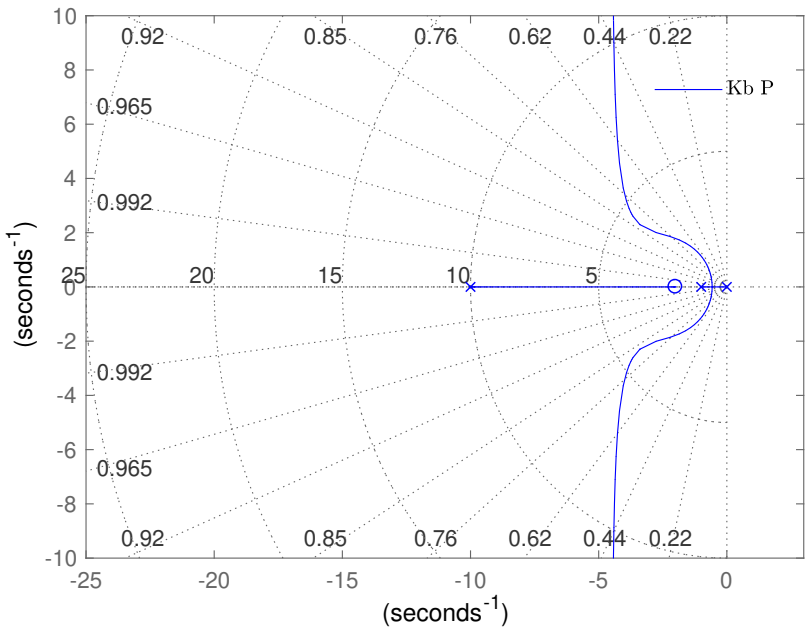
Compensador dinâmico: avanço de fase

- Fisicamente é impossível ter um derivador puro $\mathcal{K}(s) = K(s+2)$.
- Uma opção é alterar $\mathcal{K}(s)$ para os seguintes compensadores em avanço de fase:

a) $\mathcal{K}_a(s) = K\dfrac{(s+2)}{(s+20)}$

b) $\mathcal{K}_b(s) = K\dfrac{(s+2)}{(s+10)}$

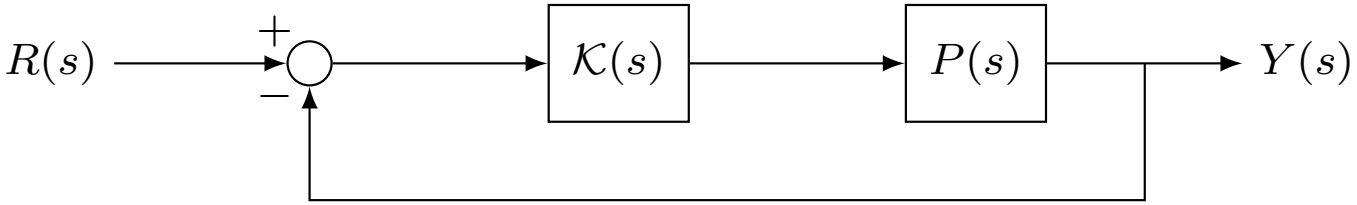




Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: avanço de fase

- Exemplo: Considere o diagrama de controle abaixo em que $P(s) = \dfrac{4}{s(s+2)}$.



- Considerando um ganho estático $\mathcal{K}(s) = 1$, o sistema em malha fechada é dado por

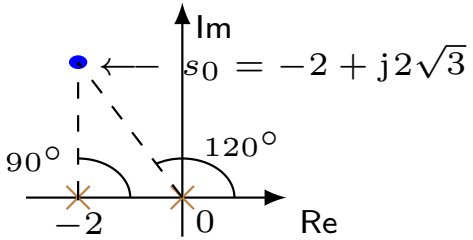
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4} = \frac{4}{(s + 1 + \mathrm{j}\sqrt{3})(s + 1 - \mathrm{j}\sqrt{3})}$$

cujos polos, localizados em $s = -1 \pm \mathrm{j}\sqrt{3}$, fornecem $\zeta = 0.5$ e $\omega_n = 2$ rad/s.

- Suponha agora, que se deseje modificar os polos de malha fechada usando um compensador por avanço de fase de forma a obter $\omega_n = 4$ rad/s e $\zeta = 0.5$.

- Para $\omega_n = 4$ e $\zeta = 0.5$, os polos estão em

$$s_0 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = -2 \pm \mathrm{j}2\sqrt{3}$$



- Observações: Os comandos **freqresp()** e **evalfr()** podem ser utilizados para se calcular $H(s_0)$. Já o ângulo, pode ser obtido com os comandos **phase()** e **angle()**.

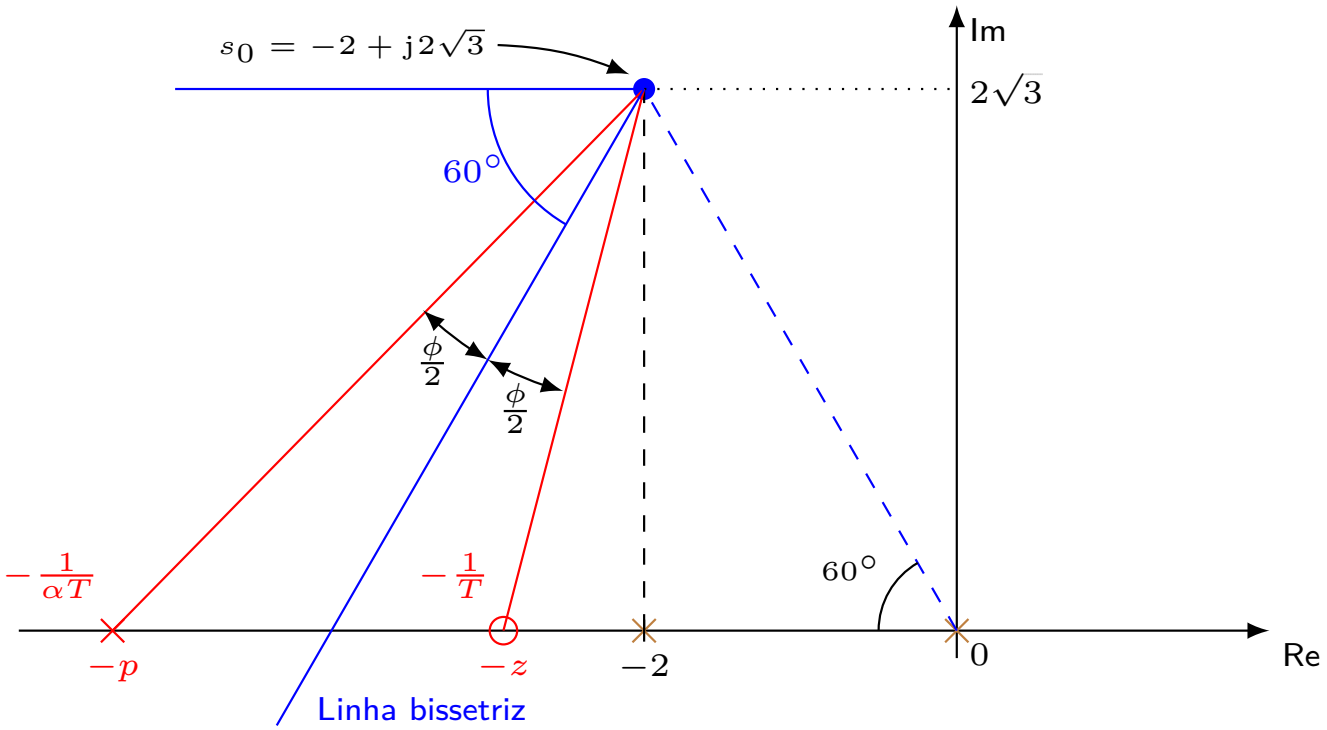
Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: avanço de fase

- No ponto $s = s_0$, o ângulo de $P(s)$ é dado por

$$\angle P(s)|_{s=-2+\mathrm{j}2\sqrt{3}} = -90^\circ - 120^\circ = -210^\circ$$

- Portanto, é necessário acrescentar um avanço de $\phi = 30^\circ$ para se obter -180°.
- Há várias opções possíveis para a escolha do polo (e do zero) do compensador.



- Usando a linha bissetriz, tem-se que $z = 2.928$ e $p = 5.464$ são obtidos de

$$(-2) - (-z) = 2\sqrt{3}\tan(15^\circ) \qquad \text{e} \qquad (-2) - (-p) = 2\sqrt{3}\tan(45^\circ)$$

Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: avanço de fase

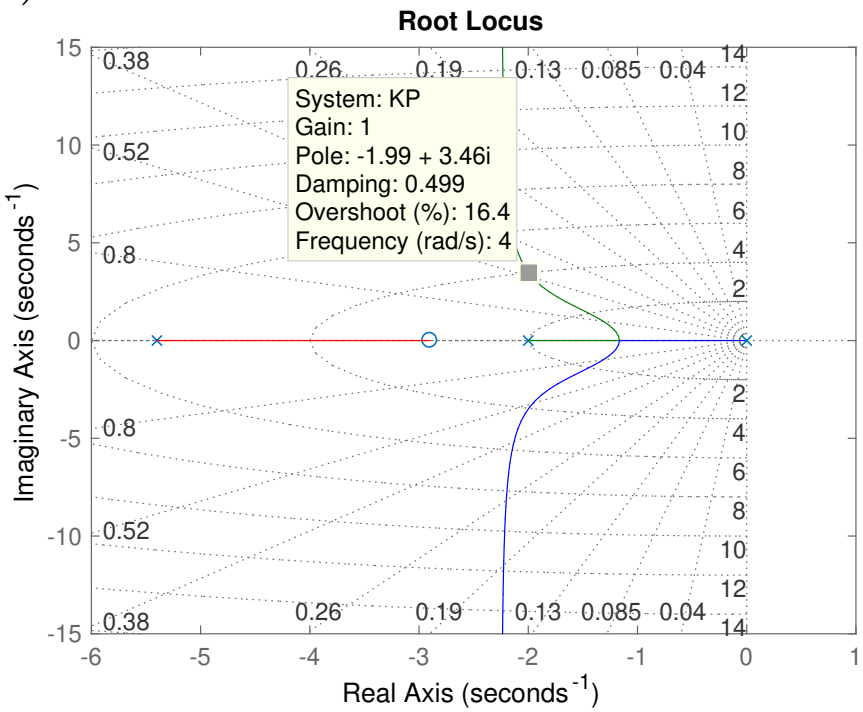
- Isso coloca o zero do compensador em $s = -2.9$ e polo em $s = -5.4$.
- O controlador fica sendo $\mathcal{K}(s) = K\dfrac{(s+2.9)}{(s+5.4)}$.
- Função de transferência do ramo direto:

$$\mathcal{K}(s)P(s) = \frac{4K(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)}$$

- Ganho K é obtido da condição de módulo

$$\left|\frac{4K(s+2.9)}{s(s+2)(s+5.4)}\right|_{s=-2+\mathrm{j}2\sqrt{3}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad K = 4.68$$



- Observação: Note que esse controlador pode ser descrito na forma equivalente:

$$\mathcal{K}(s) = K\frac{s+1/T}{s+1/(\alpha T)}$$

em que

$$1/T = 2.9 \quad \rightarrow \quad T = 0.345, \quad \text{e} \quad \alpha T = 1/5.4 = 0.185 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0.537$$

Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: avanço de fase

- Exemplo: Encontre um compensador por avanço de fase para a planta

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

  tal que em malha fechada, tenha-se $\zeta = 0.5$ e $\omega_n = 2$ rad/s.

- Para esses valores de ζ e ω_n, tem-se $s_0 = -1 + \mathrm{j}\sqrt{3}$.

- Para esse ponto, o ângulo é dado por:

$$\begin{aligned}\angle P(s)\Big|_{s=s_0} &= [-\angle s - \angle(s+1)]_{s=s_0} = -\angle(-1+\mathrm{j}\sqrt{3}) - \angle(\mathrm{j}\sqrt{3}) \\ &= -120^\circ - 90^\circ = -210^\circ\end{aligned}$$

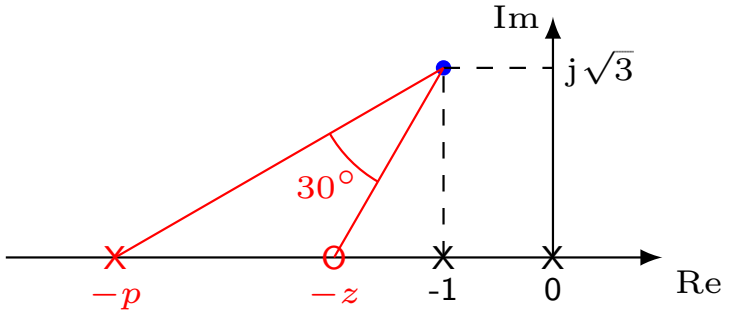
- Assim, será necessário adicionar 30°, ou seja, $\angle\mathcal{K}(s_0) = 30^\circ$.

- Como $\mathcal{K}(s) = K\dfrac{s+z}{s+p}$, tem-se que $\phi - \theta = 30^\circ$, em que ϕ é o ângulo gerado pelo zero em $s = -z$ e θ é o ângulo gerado pelo polo em $s = -p$.

- Assim: $\angle K(s) = [\angle(s+z) - \angle(s+p)]_{s=-1+\mathrm{j}\sqrt{3}} = 30^\circ$.

Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: avanço de fase



- Se o zero do compensador for escolhido arbitrariamente como sendo $z = 2$, então o polo do compensador p deverá satisfazer:

$$\angle(z - 1 + \mathrm{j}\sqrt{3}) - \angle(p - 1 + \mathrm{j}\sqrt{3}) = 30^\circ \quad \Rightarrow \quad 60^\circ - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{p-1}\right) = 30^\circ$$

- Portanto: $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{p-1}\right) = 30^\circ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} = (p-1)\sqrt{3}/3 \quad \Rightarrow \quad p = 4$

- A condição de ganho fornece: $\left| K\dfrac{(s+2)}{(s+4)}\dfrac{1}{s(s+1)} \right|_{s=-1+\mathrm{j}\sqrt{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad K = 6$

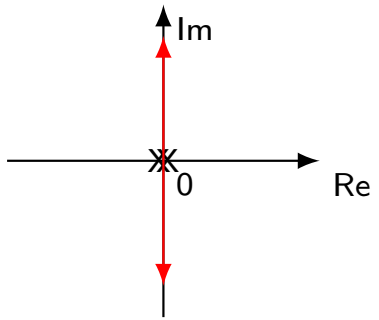
- O compensador é dado por $\mathcal{K}(s) = 6\dfrac{(s+2)}{(s+4)} = 3\dfrac{(0.5s+1)}{(0.25s+1)}$

- Observação: O maior ganho estático é obtido escolhendo-se z, o zero de $K(s)$, de forma a fornecer totalmente o ângulo requerido. Isso implica que $p \to \infty$.

Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: avanço de fase

- Exemplo: Suponha que a planta seja dada por $P(s) = \dfrac{1}{s^2}$.



- As especificações de desempenho desejadas são:

$$t_s \leq 4\text{s a } 2\% \quad \text{e} \quad M_p \leq 35\%$$

- Portanto:

$$\zeta^2 \geq \frac{\ln(M_p)^2}{\pi^2 + \ln(M_p)^2} \quad \Rightarrow \quad \zeta \geq 0,32$$

$$t_s \leq 4s \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 4 \quad \Rightarrow \quad \zeta\omega_n \geq 1$$

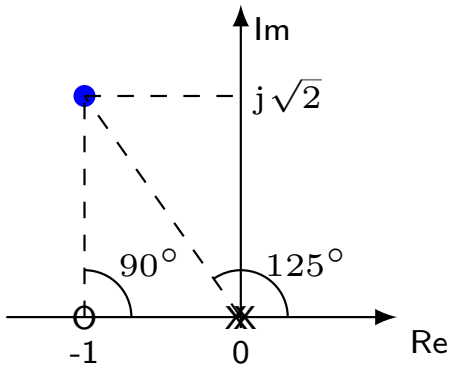
- Uma opção é escolher os polos dominantes em $s_0 = -1 \pm \mathrm{j}\sqrt{2}$, que fornece:

$$\zeta = \sqrt{3}/3 \approx 0.577 \quad \text{e} \quad \omega_n = \sqrt{3} \approx 1.733$$

- Nesse ponto s_0, o ângulo de $P(s)$ é dado por

$$\angle P(s)\big|_{s=-1+\mathrm{j}\sqrt{2}} = -2 \times 125^\circ = -250^\circ$$

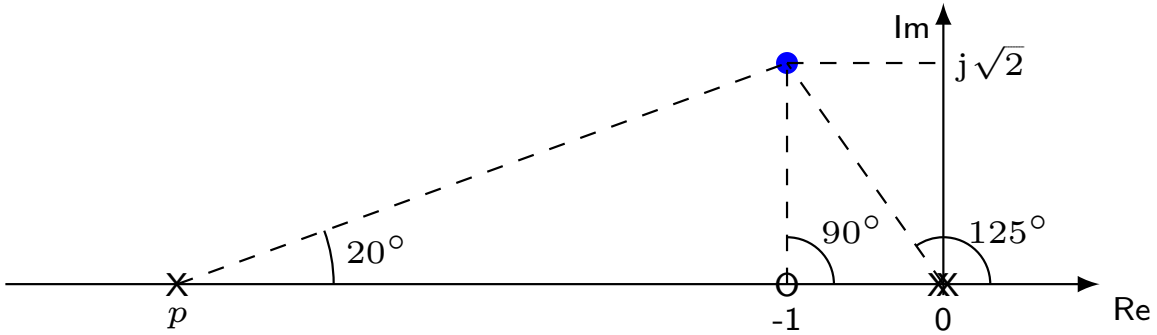
- Uma escolha simples para alocar o zero de $K(s)$ é diretamente abaixo de s_0, fazendo $z = 1$, o que fornecerá $+90^\circ$.



Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: avanço de fase

- Como $P(s)$, em $s = s_0$, fornece $-250°$, o compensador $K(s)$ deve adicionar $70°$.
- Como o zero em $z = 1$ já adiciona $+90°$, o polo deverá adicionar $-20°$.



- Denotando por x a distancia entre o ponto -1 e o ponto p, tem-se

$$\tan 20° = \frac{\sqrt{2}}{x} \quad \rightarrow \quad x = 3.9 \quad \rightarrow \quad p = -4.9$$

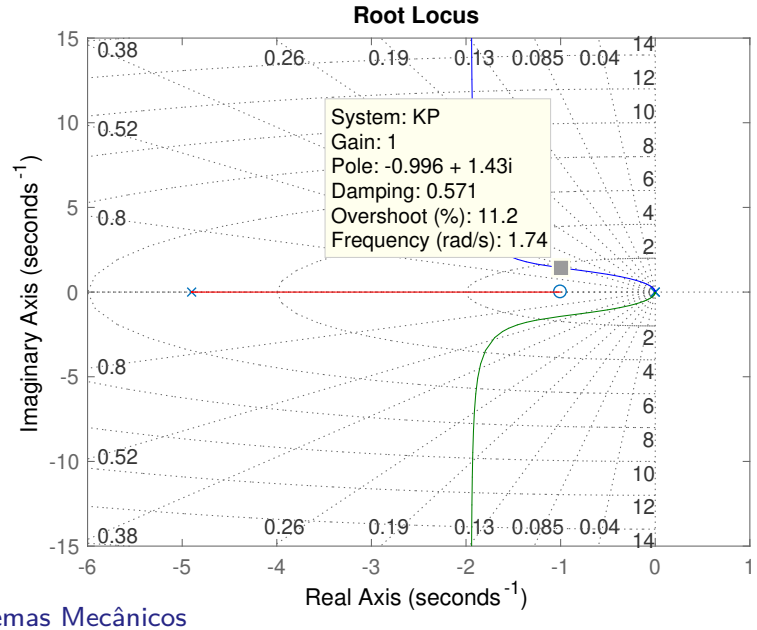
- Assim, o compensador fica sendo:

$$\mathcal{K}(s) = K\frac{(s+1)}{(s+4.9)}$$

- A condição de módulo fornece

$$\left| K\frac{(s+1)}{s^2(s+4.9)} \right|_{s=-1+\mathrm{j}\sqrt{2}} = 1$$

$$\rightarrow \qquad K = 8.8$$



Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: atraso de fase

- A seguir é apresentado o efeito de uma compensação por atraso de fase:

$$\mathcal{K}(s) = \frac{s+z}{s+p}, \qquad z > p$$

- Esse compensador é geralmente utilizado para aumentar K_v.
- Exemplo: Suponha que o compensador por avanço de fase dado por $\mathcal{K}_1(s) = 31\dfrac{(s+2)}{(s+20)}$ tenha sido projetado para a planta $P(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$.
- Esse compensador fornece um polo s_0 com $\zeta = 0.705$ e $\omega_n = 1.835$ rad/s.
- Usando esse compensador $\mathcal{K}_1$, a constante de velocidade é dada por

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,\mathcal{K}_1(s)P(s) = \lim_{s\to 0} s\,31\frac{(s+2)}{(s+20)}\frac{1}{s(s+1)} = \frac{31}{10} = 3.1$$

- Agora, adicionando o compensador por atraso de fase, dado por

$$\mathcal{K}_2(s) = \frac{(s+0.01)}{(s+0.001)} \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{K}(s) = \mathcal{K}_1(s)\mathcal{K}_2(s)$$

  tem-se $K_v = 31$, causando uma redução de 10 vezes no erro estacionário.
- Note que tanto a condição de modulo como a de ângulo são respeitadas, já que para um ponto de teste $s_0 \gg 0$, tem-se $|\mathcal{K}_2(s_0)| \approx 1$ e $\angle\mathcal{K}_2(s_0) \approx 0$.

Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: PID

- Exemplo: Para a planta $P(s) = 1/(s(s+1))$ e polo desejado $s_0 = -1 + \mathrm{j}\sqrt{3}$, projete um controlador PID dada por

$$K(s) = \frac{K_I + K_P s + K_D s^2}{s} = \frac{K_I(1 + \bar{K}_p s + \bar{K}_D s^2)}{s}$$

com $K_P = K_I \bar{K}_P$ e $K_D = K_I \bar{K}_D$.

- Impondo que o numerador seja o produto de dois zeros reais, tem-se

$$1 + \bar{K}_p s + \bar{K}_D s^2 = (T_1 s + 1)(T_2 s + 1), \quad \text{com} \quad \bar{K}_p = T_1 + T_2, \quad \bar{K}_D = T_1 T_2$$

- Para que o sistema em malha fechada, considerando a planta $P(s)$, tenha um polo complexo em $s_0 = -1 + \mathrm{j}\sqrt{3}$, o controlador $K(s)$ precisa adicionar 30°:

$$\angle(T_1 s_0 + 1) + \angle(T_2 s_0 + 1) - \angle s_0 = 30^\circ$$

Equivalentemente

$$\angle(s_0 + 1/T_1) + \angle(s_0 + 1/T_2) - 120^\circ = 30^\circ$$

- Escolhendo $T_1 = T_2$, que fornece o maior ganho K_I, tem-se

$$2\,\angle(s_0 + 1/T_1) = 150^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle(s_0 + 1/T_1) = 75^\circ$$

Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico: PID

- Como $s_0 = -1 + \mathrm{j}\sqrt{3}$, a relação

$$\angle -1 + \mathrm{j}\sqrt{3} + 1/T_1 = 75^\circ$$

fornece:

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1/T_1 - 1}\right) = 75^\circ \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{\tan 75^\circ}{\tan 75^\circ + \sqrt{3}} = 0.6830$$

- Assim, os parâmetros $\bar{K}_P$ e $\bar{K}_D$ são dados por

$$\bar{K}_P = 2T_1 = 1.3660 \qquad \text{e} \qquad \bar{K}_D = T_1^2 = 0.4665$$

- O ganho K_I é obtido diretamente da equação de módulo, dada por:

$$\left| K_I \frac{(1 + \bar{K}_P s + \bar{K}_D s^2)}{s} \frac{1}{s(s+1)} \right|_{s=s_0} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad K_I = 4.6188$$

- Assim, $K_P = K_I \bar{K}_P = 6.31$, $K_D = K_I \bar{K}_D = 2.15$ e o controlador fica sendo:

$$K(s) = 6.3094 + \frac{4.6188}{s} + 2.1547\, s$$

- Observação: Note que o projeto usando o lugar das raízes pode ser usado para projetar qualquer tipo de controlador dinâmico $K(s)$.

Projeto de controladores usando o lugar das raízes

Compensador dinâmico

- Exemplo: Considere o polo em $s_0 = -1 + \mathrm{j}\sqrt{3}$ e a planta $P(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$
- Os seguintes controladores foram projetados:
  1. Escolhendo arbitrariamente $z = 1$, tem-se: $K(s) = 4\dfrac{s+1}{s+2}$

     que fornece $K(0) = 2$ e polos em malha fechada exatamente em $s = -1 \pm \mathrm{j}\sqrt{3}$.
  2. Escolhendo z usando a linha bissetriz, tem-se: $K(s) = 4.73\dfrac{s+1.46}{s+2.73}$

     que fornece $K(0) = 2.54$ e polos em malha fechada em $s = \{-1.73, -1 \pm \mathrm{j}\sqrt{3}\}$.
  3. Escolhendo arbitrariamente $z = 2$, tem-se: $K(s) = 6\dfrac{s+2}{s+4}$

     que fornece $K(0) = 3$ e polos em malha fechada em $s = \{-3, -1 \pm \mathrm{j}\sqrt{3}\}$.
  4. Escolhendo $z \to 4$, para obter o maior ganho estático, tem-se: $K(s) = 1200\dfrac{s+3.99}{s+1198}$

     que fornece $K(0) = 3.9967$ e polos em malha fechada em $s = \{-1197, -1 \pm \mathrm{j}\sqrt{3}\}$.
  5. Escolhendo um PID com $T_1 = T_2$, tem-se: $K(s) = 6.309 + 4.619/s + 2.155\,s$

     que fornece $K_I = 4.62$ e polos em malha fechada em $s = \{-1.15, -1 \pm \mathrm{j}\sqrt{3}\}$.

Projeto de controladores usando o método Ziegler-Nichols

- É um método heurístico, prático e simples, usado para projetar o compensar PID

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s)$$

- A análise é baseada na resposta ao degrau de um processo, aproximado por

$$G(s) = \frac{\alpha}{\tau s + 1} e^{-sT}$$

- Fazendo $K_I = K_D = 0$, aumenta-se o ganho K_P até atingir o ganho crítico K_c, em que a saída do processo apresenta uma oscilação sustentável de período P_c.
- Em seguida, pode-se calcular um controlador P, PI ou PID, através da tabela abaixo:

Controlador	K_P	T_I	T_D
P	0.5 K_c	-	-
PI	0.45 K_c	$P_c/1.2$	-
PID	0.6 K_c	$P_c/2$	$P_c/8$

- Com esses ganhos, o compensador PID é dado por

$$K(s) = 0.075 K_c P_c (s + 4/P_c)^2 / s$$

que terá um polo na origem e um zero duplo em $s = -4/P_c$.

- Sendo um método heurístico, os ganhos inicialmente obtidos devem ser reajustados.