

# ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica  
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil  
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

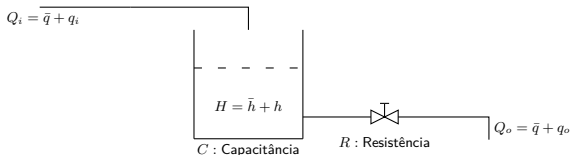
## Nota ao leitor

- ▶ Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - ▶ K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4<sup>a</sup> edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - ▶ G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
  - ▶ G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd Ed., Add.-Wesley, 1994.
- ▶ Material suplementar:
  - ▶ K. Ogata, *Discrete-time control systems*, 2nd Edition, P.-Hall, 1995.
  - ▶ R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8<sup>a</sup> edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - ▶ J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - ▶ B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

# Conceitos de modelagem de sistemas

## Sistema de nível de líquido

- ▶ Para o sistema abaixo,  $\bar{h}$  é a altura em regime permanente constante e  $h(t)$  sua variação. De forma similar,  $\bar{q}$  é a vazão em regime permanente constante e  $q_i(t)$  e  $q_o(t)$  são as variações nas vazões de entrada e de saída, respectivamente.



- ▶ A capacitância  $C$  [ $m^2$ ] é a variação no volume [ $m^3$ ] pela variação na altura [ $m$ ].
- ▶ Como o fluxo de entrada  $\bar{q} + q_i$  menos o fluxo de saída  $\bar{q} + q_o$  durante um intervalo de tempo  $dt$  é igual à quantidade adicional armazenada no reservatório, tem-se

$$CdH = (Q_i - Q_o)dt$$

- ▶ A resistência  $R$  na tubulação, em [ $s/m^2$ ], representa a variação na altura [ $m$ ] da coluna de água pela variação na vazão em volume [ $m^3/s$ ]. Essa relação é dada por:

$$Q_o = \frac{H^\beta}{R}, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad \begin{cases} \beta = 1 & \text{, para regime laminar} \\ \beta = 1/2 & \text{, para regime turbulento} \end{cases}$$

# Conceitos de modelagem de sistemas

## Sistema de nível de líquido

- ▶ Portanto, as equações que governam esse sistema são:

$$CdH = (Q_i - Q_o)dt \quad \text{e} \quad RQ_o = H^\beta$$

- ▶ Substituindo  $H = \bar{h} + h$  e  $Q_i = \bar{q} + q_i$ , obtém-se

$$Cd h = (\bar{q} + q_i - H^\beta / R)dt \quad \implies \quad RC \frac{dh}{dt} = R\bar{q} + Rq_i - H^\beta$$

- ▶ A função  $H^\beta$  linearizada no ponto  $\bar{H} = \bar{h}$  (regime permanente) é dada por

$$H^\beta \approx \bar{H}^\beta + \beta \bar{H}^{(\beta-1)}(H - \bar{H}) = \bar{h}^\beta + \beta \bar{h}^{(\beta-1)}h$$

que substituída na equação do tanque, fornece:

$$RC \frac{dh}{dt} = R\bar{q} + Rq_i - \bar{h}^\beta - \beta \bar{h}^{(\beta-1)}h$$

- ▶ Como em regime permanente  $\bar{h}^\beta = R\bar{q}$  (já que  $q_o = q_i = h = 0$ ), tem-se

$$RC \frac{dh}{dt} = Rq_i - \beta \bar{h}^{(\beta-1)}h \quad \implies \quad \tau \frac{dh}{dt} + \alpha h = Rq_i, \quad \begin{cases} \tau = RC \\ \alpha = \beta \bar{h}^{(\beta-1)} \end{cases}$$

- ▶ Substituindo a linearização de  $H^\beta$  na relação  $RQ_o = H^\beta$ , tem-se

$$R(\bar{q} + q_o) = \bar{h}^\beta + \beta \bar{h}^{(\beta-1)}h \quad \implies \quad Rq_o = \alpha h$$

# Conceitos de modelagem de sistemas

## Sistema de nível de líquido

- ▶ Foi visto que a dinâmica do sistema fluídico é dada pela seguinte equação diferencial:

$$\tau \frac{dh}{dt} + \alpha h = Rq_i, \quad \begin{cases} \beta = 1 & , \text{ para regime laminar} \\ \beta = 1/2 & , \text{ para regime turbulento} \end{cases}$$

- ▶ Para o caso turbulento, com  $\beta = 1/2$  e  $\alpha = \beta \bar{h}^{(\beta-1)} = 1/\sqrt{4\bar{h}}$ , tem-se

$$\tau \frac{dh}{dt} + \alpha h = Rq_i, \quad \text{com } \tau = RC \text{ a constante de tempo.}$$

Assim, a função de transferência entre  $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$  e  $Q_i(s) = \mathcal{L}[q_i(t)]$  é

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{\tau s + \alpha} \implies \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\alpha}{\tau s + \alpha}$$

- ▶ Para o caso laminar, com  $\beta = 1$  e  $\alpha = 1$ , tem-se

$$\tau \frac{dh}{dt} + h = Rq_i, \quad \tau = RC$$

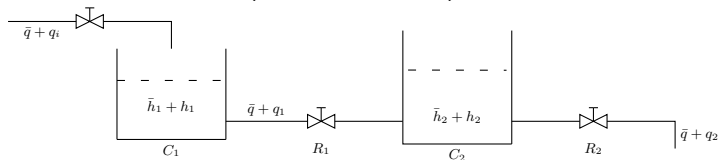
cuja função de transferência é dada por

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{\tau s + 1} \implies \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

# Conceitos de modelagem de sistemas

## Sistema de nível de líquido

- **Exemplo:** Considere o sistema (em regime laminar) contendo dois tanques.



- Para o primeiro tanque, a relação entre as vazões, fornece:

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q_i - q_1$$

Para o segundo tanque, tem-se:

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2$$

- As vazões que fluem pelas resistências  $R_1$  e  $R_2$  são dadas por

$$h_1 - h_2 = R_1 q_1 \quad \text{e} \quad h_2 = R_2 q_2$$

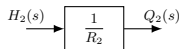
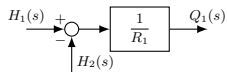
- Portanto, a função de transferência entre a entrada  $q_i$  e a saída  $q_2$  é dada por:

$$\frac{Q_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) s + 1}$$

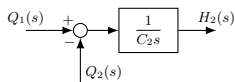
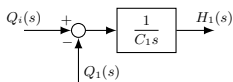
# Conceitos de modelagem de sistemas

## Sistema de nível de líquido

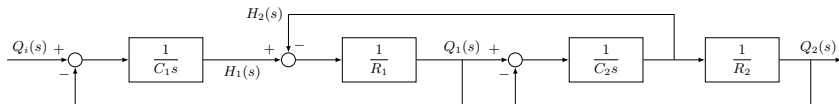
- ▶ Obtendo a função de transferência através dos diagramas de bloco dos subsistemas.
- ▶ Para as relações  $h_1 - h_2 = R_1 q_1$  e  $h_2 = R_2 q_2$ , tem-se respectivamente:



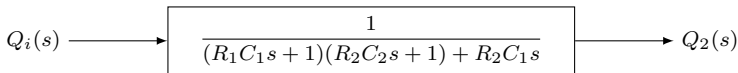
- ▶ As relações  $C_1 dh_1 = (q_i - q_1)dt$  e  $C_2 dh_2 = (q_1 - q_2)dt$  fornecem respectivamente:



- ▶ Conectando-se os diagramas de bloco, obtém-se:



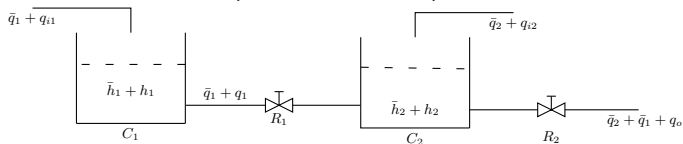
- ▶ Que após algumas simplificações, fornece a seguinte função de transferência:



# Conceitos de modelagem de sistemas

## Sistema de nível de líquido

- ▶ **Exemplo:** Considere o sistema (em regime laminar) contendo duas entradas.



- ▶ Para esse sistema, as equações são dadas por:

$$C_1 dh_1 = (q_{i1} - q_1) dt \qquad h_1 - h_2 = R_1 q_1$$

$$C_2 dh_2 = (q_1 + q_{i2} - q_o) dt \qquad h_2 = R_2 q_o$$

- ▶ Eliminando-se o estado intermediário  $q_1$  das equações acima, obtém-se:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{C_1} \left( q_{i1} - \frac{h_1 - h_2}{R_1} \right)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{C_2} \left( \frac{h_1 - h_2}{R_1} + q_{i2} - \frac{h_2}{R_2} \right)$$

- ▶ É possível mostrar (**exercício**) que essas equações fornecem a seguinte função de transferência:

$$Q_o(s) = \frac{Q_{i1}(s) + (C_1 R_1 s + 1) Q_{i2}(s)}{C_1 C_2 R_1 R_2 s^2 + (C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2) s + 1}$$