ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

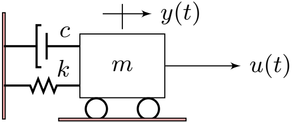
Nota ao leitor

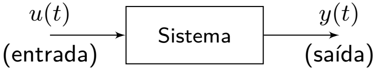
- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4^a edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd Ed., Add.-Wesley, 1994.
- Material suplementar:
  - K. Ogata, *Discrete-time control systems*, 2nd Edition, P.-Hall, 1995.
  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8^a edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

Simulação numérica

Integração numérica

- Considere o sistema de segunda ordem massa-mola-amortecedor abaixo.





- Sua equação de movimento é dada por

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

- Assuma que os parâmetro desse sistema mecânico sejam dados por

$$m = k = c = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega_n = 1 \quad \text{e} \quad \zeta = 1/2$$

- Para a excitação exógena (entrada forçante) $u(t) = \sin(t)$ e condições iniciais $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = -1$, a solução analítica é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= 2e^{-t/2}\cos(\sqrt{3}t/2) - \cos(t) \\ \dot{y}(t) &= \sin(t) - e^{-t/2}\left(\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t/2) + \cos(\sqrt{3}t/2)\right) \end{aligned}$$

- A seguir é apresentado como simular numericamente esse sistema mecânico.

Simulação numérica

Integração numérica

- Para simular usando o Matlab o sistema de 2ª ordem

$$\ddot{y}(t) = -\frac{k}{m}y(t) - \frac{c}{m}\dot{y}(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

é necessário representá-lo como um sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = -\frac{k}{m}\overset{x_1}{y} - \frac{c}{m}\overset{x_2}{\dot{y}} + \frac{1}{m}u \end{aligned}$$

- Em seguida, cria-se um arquivo (sistema1glode.m) com a função a ser integrada:

```
function dx = sistema1glode(t,x)
  m = 1; c = 1; k = 1;
  u = sin(t);
  dx = zeros(2,1);
  dx(1) = x(2);
  dx(2) = -k/m*x(1)-c/m*x(2)+u/m;
 end
```

- Basta agora invocar, na linha de comando, o integrador usando a sintaxe:

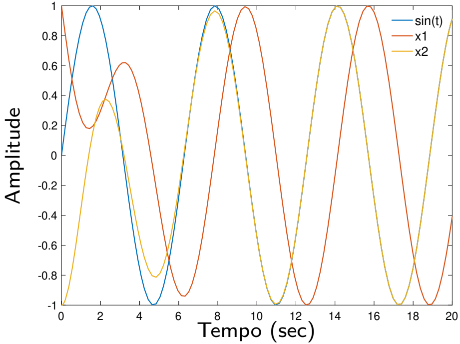
```
tspan = [0 20]; % Simula de 0 a 20 segundos
ci = [1 -1]';  % Condição inicial
[t,x] = ode45(@sistema1glode,tspan,ci);
```

Simulação numérica
Integração numérica

- O código para simular o sistema massa-mola-amortecedor, sujeito à excitação $u(t) = \sin(t)$ e condições iniciais $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = -1$, é dado por

```
...
[t,x] = ode45(@sistema1glode,tspan,ci);
plot(t,sin(t), t, x)
legend('sin(t)','x1','x2')
xlabel('Tempo (s)'), ylabel('Amplitude')
```

- A figura abaixo apresenta o deslocamento $x_1(t) = y(t)$ e a velocidade $x_2(t) = \dot{y}(t)$.



Simulação numérica
Método de integração de Euler (Forward)

- O método de integração de Euler para uma equação diferencial de 1ª ordem:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \qquad x(t_0) = x_0$$

pode ser derivado usando a aproximação por série de Taylor:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \left.\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \Delta_t, \qquad \Delta_t = t - t_0 \\ &= x(t_0) + f(x(t_0), t_0)\Delta_t \end{aligned}$$

- O processo iterativo de integração se dá através do cômputo de $x(t)$ para sucessivos instantes de tempo $t_0, t_1, t_2, \ldots,$ fornecendo:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + f(x(t_i), t_i)\Delta_t$$

com Δ_t o passo de integração, ou numa notação mais compacta:

$$x_{i+1} = x_i + f(x_i, t_i)\Delta_t$$

- Exemplo: Suponha que se deseje integrar a equação do circuito RC abaixo:

$$\tau\dot{v}(t) + v(t) = g(t), \quad v(0) = v_0, \qquad \tau = RC$$

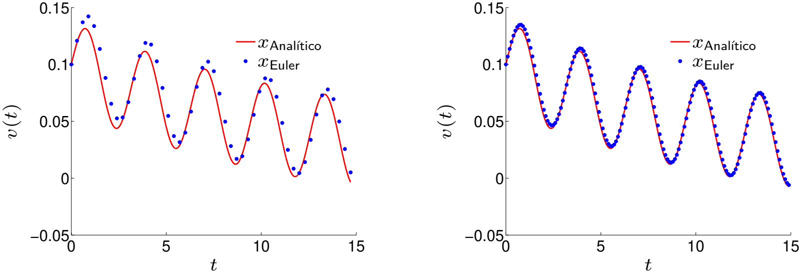
que pode ser reescrita como

$$\dot{v}(t) = f(v,t), \qquad \text{com } f(v,t) = -v(t)/\tau + g(t)/\tau$$

- Assim, o método de Euler fornece os seguintes passos:

$$v_{i+1} = v_i + f(v_i, t_i)\Delta_t = v_i(\tau - \Delta_t)/\tau + g(t_i)\Delta_t/\tau$$

- Gráficos de $v(t)$, calculados com $\Delta_t = 0.3$ (esquerda) e $\Delta_t = 0.1$ (direita), para $\tau = 13$, $g(t) = \cos(2t)$ e condição inicial $v_0 = 0.1$.



- Exemplo: Para um sistema de 2ª ordem:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 g(t), \quad y(0) = y_0, \;\; \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

é preciso reescrevê-lo como 1ª ordem com $x = y$ e $v = \dot{y}$:

$$\dot{x} = f_1(x, v, t), \qquad \text{com } f_1(x, v, t) = v$$
$$\dot{v} = f_2(x, v, t), \qquad \text{com } f_2(x, v, t) = -\omega_n^2 x - 2\zeta\omega_n v + \omega_n^2 g(t)$$

- Assim, o método de Euler fornece:

$$x_{i+1} = x_i + f_1(x_i, v_i, t_i)\Delta_t \qquad \text{e} \qquad v_{i+1} = v_i + f_2(x_i, v_i, t_i)\Delta_t$$

- Gráficos de $x(t)$, calculados com $\Delta_t = 0.03$ (esquerda) e $\Delta_t = 0.01$ (direita), para $\zeta = 0.3$, $\omega_n = 10$, $g(t) = \cos(2t)$ e condições iniciais $y_0 = -2$ e $\dot{y}_0 = -35$.