

ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

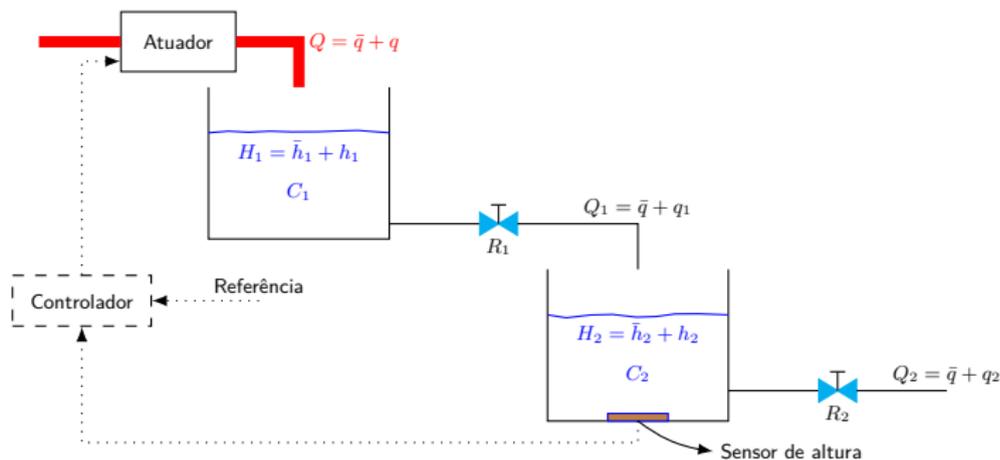
Nota ao leitor

- ▶ Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
 - ▶ K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4^a edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
 - ▶ G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
 - ▶ G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd Ed., Add.-Wesley, 1994.
- ▶ Material suplementar:
 - ▶ K. Ogata, *Discrete-time control systems*, 2nd Edition, P.-Hall, 1995.
 - ▶ R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8^a edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
 - ▶ J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
 - ▶ B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

Conceitos de modelagem de sistemas

Sensores e atuadores

- ▶ **Exemplo:** A figura abaixo apresenta um sistema de controle de nível de fluido, que pode ser dividido em 3 partes principais: planta, atuador e sensor.

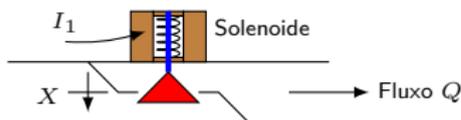


- ▶ A planta (o processo) é o conjunto composto pelos 2 tanques.
- ▶ No tanque 1, a vazão de entrada é $Q = \bar{q} + q$ e a vazão de saída, através da resistência R_1 , é $Q_1 = \bar{q} + q_1$, com \bar{q} a vazão em regime permanente.
- ▶ No tanque 2, a vazão de entrada é Q_1 e de saída, através da resistência R_2 , é $Q_2 = \bar{q} + q_2$.

Conceitos de modelagem de sistemas

Sensores e atuadores

- ▶ O atuador é composto por uma válvula solenoide que controla a quantidade de fluxo (a vazão Q) que alimenta o primeiro tanque.



- ▶ O solenoide desloca de uma distância X um êmbolo de massa m aplicando uma força magnética F , proporcional à corrente I_1 de comando:

$$F(X, I_1) = \frac{\delta I_1(t)^2}{(\epsilon + \gamma X(t))^2} \quad (\text{eq 1})$$

com δ , ϵ e γ constantes que dependem da propriedade do material.

- ▶ A equação que governa o êmbolo da válvula, acionado pelo solenoide, é dada por

$$m\ddot{X} + b\dot{X} + kX = F \quad (\text{eq 2})$$

com m , b e k , respectivamente, a massa, o amortecimento e a rigidez do sistema.

- ▶ A relação entre a vazão Q e o deslocamento do êmbolo X é dada por

$$Q(X) = Q_{\max} (1 - e^{-\phi X/X_{\max}}) \quad (\text{eq 3})$$

com Q_{\max} a vazão máxima, X_{\max} o deslocamento máximo e ϕ uma constante.

Conceitos de modelagem de sistemas

Sensores e atuadores

- ▶ A planta é composta dos 2 tanques. Para o primeiro tanque, a vazão de entrada é Q e de saída é Q_1 . Para o segundo tanque, a vazão de entrada é Q_1 e de saída é Q_2 .

- ▶ Para o tanque 1, cujo escoamento **turbulento** é dado por

$$H_1^\beta = Q_1 R_1, \quad \beta = 1/2, \quad H_1 = \bar{h}_1 + h_1,$$

com \bar{h}_1 a altura do tanque em regime permanente, tem-se

$$C_1 \frac{dH_1}{dt} = Q - Q_1 \quad \Longrightarrow \quad C_1 \frac{dH_1}{dt} + \frac{H_1^\beta}{R_1} = Q \quad (\text{eq 4})$$

- ▶ Para o tanque 2, cujo escoamento **laminar** é dado por

$$H_2 = Q_2 R_2, \quad H_2 = \bar{h}_2 + h_2,$$

com \bar{h}_2 a altura do tanque em regime permanente, tem-se

$$C_2 \frac{dH_2}{dt} = Q_1 - Q_2, \quad \Longrightarrow \quad C_2 \frac{dH_2}{dt} + \frac{H_2}{R_2} = \frac{H_1^\beta}{R_1} \quad (\text{eq 5})$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Sensores e atuadores

- ▶ A dinâmica **não linear** desse sistema, (eq 1)-(eq 5), é dada por

$$m\ddot{X} + b\dot{X} + kX = \frac{\delta I_1(t)^2}{(\epsilon + \gamma X(t))^2}$$

$$C_1\dot{H}_1 + H_1^\beta/R_1 = Q_{\max} (1 - e^{-\phi X/X_{\max}})$$

$$C_2\dot{H}_2 + H_2/R_2 = H_1^\beta/R_1$$

- ▶ Os parâmetros numéricos para esse sistema são:

$$m = 0.2 \text{ [Kg]}, \quad k = 5900 \text{ [N/m]}, \quad b = 30 \text{ [N.m/s]}$$

$$\delta = 2 \times 10^{-1}, \quad \epsilon = 25 \times 10^{-3}, \quad \gamma = 300, \quad \beta = 1/2$$

$$R_1 = 800 \text{ [s/m}^2\text{]}, \quad R_2 = 500 \text{ [s/m}^2\text{]}$$

$$C_1 = 7 \times 10^{-2} \text{ [m}^2\text{]}, \quad C_2 = 5 \times 10^{-2} \text{ [m}^2\text{]}$$

$$Q_{\max} = 4 \times 10^{-3} \text{ [m}^3\text{/s]}, \quad X_{\max} = 5 \times 10^{-3} \text{ [m]}, \quad \phi = 0.7$$

Ceitos de modelagem de sistemas

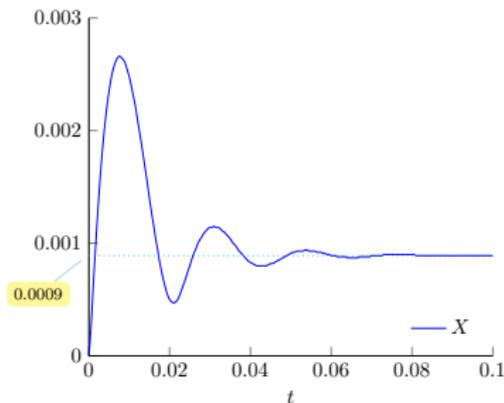
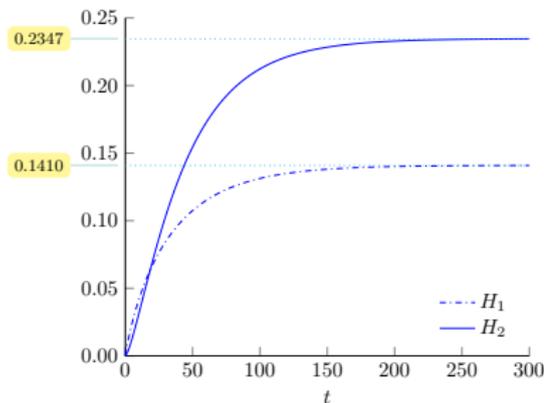
Sensores e atuadores

- ▶ O sistema não linear é simulado usando o pacote *ode suite* do matlab, usando a representação na forma de estado, com $x_1 = X$, $x_2 = \dot{X}$, $x_3 = H_1$ e $x_4 = H_2$.

- ▶ Um trecho do código teria a forma:

```
function dx = tanque_ao_lin(t,x)
...
dx1 = x(2);
dx2 = -b/m*x(2)-k/m*x(1)+delta*I1(t)^2/((epsilon+gamma*x(1))^2*m);
dx3 = -x(3)^beta/(C1*R1)+Qmax*(1-exp(-phi*x(1)/Xmax))/C1;
dx4 = -x(4)/(C2*R2)+x(3)^beta/(C2*R1);
```

- ▶ As figuras abaixo apresentam H_1 , H_2 e X para a entrada $I_1(t) = 1.5$ [A].



Conceitos de modelagem de sistemas

Sensores e atuadores

- ▶ Suponha agora que se deseje um **modelo linear**. Assim, é preciso escolher o ponto em que o sistema não linear será linearizado.
- ▶ O mais usual é linearizar a dinâmica não linear em torno de seu **regime permanente**.
- ▶ Assim, em regime permanente, as variáveis do sistema passam a ser constantes e serão denotadas por: \bar{v}_1 , \bar{x} , \bar{q} , \bar{h}_1 , \bar{h}_2 , \bar{p}_2 .
- ▶ A equação da força do solenoide em regime permanente é dada por

$$\bar{F} = \frac{\delta \bar{v}_1^2}{(\epsilon + \gamma \bar{x})^2}$$

- ▶ A equação da parte mecânica da válvula, em regime permanente, passa a ser

$$k\bar{x} = \bar{F} \quad \implies \quad \bar{x}(\epsilon + \gamma \bar{x})^2 = \delta \bar{v}_1^2 / k$$

- ▶ Assim, dada uma entrada em corrente \bar{v}_1 [A] constante, pode-se determinar o deslocamento correspondente do êmbolo \bar{x} [m] em regime permanente.
- ▶ Lembrando que $k = 5900$, $\delta = 0.2$, $\epsilon = 0.025$ e $\gamma = 300$, tem-se:

$$\bar{v}_1 = 1 \text{ [A]} \text{ produzirá um deslocamento } \bar{x} = 6.677 \times 10^{-4} \text{ [m]}$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Sensores e atuadores

- ▶ A equação da vazão em regime permanente, passa a ser

$$\bar{q} = Q(\bar{x}) = Q_{\max} \left(1 - e^{-\phi \bar{x} / X_{\max}} \right)$$

- ▶ Note que em regime permanente, as vazões são dadas por $Q = Q_1 = Q_2 = \bar{q}$.
- ▶ Lembrando que os parâmetros da válvula são:

$$Q_{\max} = 4 \times 10^{-3} \text{ [m}^3\text{/s]}, \quad X_{\max} = 5 \times 10^{-3} \text{ [m]} \quad \text{e} \quad \phi = 0.7$$

- ▶ Assim, uma corrente $\bar{i}_1 = 1 \text{ [A]}$, que gera um deslocamento $\bar{x} = 6.677 \times 10^{-4} \text{ [m]}$, produzirá uma **vazão em regime permanente de**

$$\bar{q} = 3.57 \times 10^{-4} \text{ [m}^3\text{/s]}$$

- ▶ Para o tanque 1, em que o regime é turbulento ($\beta = 1/2$) tem-se

$$\sqrt{\bar{h}_1} = \bar{q} R_1 \quad \iff \quad \bar{h}_1 = (\bar{q} R_1)^2$$

- ▶ Notando que $R_1 = 800 \text{ [s/m}^2\text{]}$, tem-se $\bar{h}_1 = 0.082 \text{ [m]}$.

- ▶ Para o tanque 2, em que o regime é laminar, com $R_2 = 500 \text{ [s/m}^2\text{]}$, tem-se

$$\bar{h}_2 = \bar{q} R_2 = 0.18 \text{ [m]}$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Sensores e atuadores

- ▶ De posse dos valores em regime permanente, é possível agora **linearizar as equações envolvidas** através da aproximação de 1ª ordem da série de Taylor num ponto \bar{x} :

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})$$

- ▶ Assim, a linearização da força $F = \frac{\delta I_1(t)^2}{(\epsilon + \gamma X(t))^2}$ em torno do equilíbrio, fornecerá

$$F \approx F(\bar{x}, \bar{i}_1) + \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{\substack{X=\bar{x} \\ I_1=\bar{i}_1}} (X - \bar{x}) + \left. \frac{\partial F}{\partial I_1} \right|_{\substack{X=\bar{x} \\ I_1=\bar{i}_1}} (I_1 - \bar{i}_1)$$

em que $X = \bar{x} + x$ com \bar{x} o regime permanente e x a variação em torno desse equilíbrio. De forma análoga, \bar{i}_1 é o equilíbrio e i_1 a variação em torno desse ponto.

- ▶ Calculando as derivadas, tem-se finalmente

$$F \approx \bar{F} + \lambda_1 x + \lambda_2 i_1, \quad \lambda_1 = -\frac{2\delta \gamma \bar{i}_1^2}{(\epsilon + \gamma \bar{x})^3}, \quad \lambda_2 = \frac{2\delta \bar{i}_1}{(\epsilon + \gamma \bar{x})^2}$$

- ▶ Assim, a equação da parte mecânica fica sendo:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + k(\bar{x} + x) = F, \quad k\bar{x} = \bar{F}$$

⇒

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \lambda_1 x + \lambda_2 i_1$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Sensores e atuadores

- ▶ A equação da vazão $Q = Q_{\max} \left(1 - e^{-\phi \frac{X}{X_{\max}}} \right)$ linearizada (exercício) fica sendo:

$$Q \approx \bar{q} + q, \quad q = \eta x, \quad \eta = Q_{\max} \frac{\phi}{X_{\max}} e^{-(\phi \bar{x}/X_{\max})}$$

- ▶ A equação do tanque 1, cujo escoamento é turbulento, foi calculada como sendo

$$\tau_1 \frac{dH_1}{dt} + \sqrt{H_1} = R_1 Q, \quad \tau_1 = R_1 C_1, \quad H_1 = \bar{h}_1 + h_1$$

- ▶ Lembrando que a linearização de $\sqrt{H_1}$ em torno de \bar{h}_1 fornece

$$\sqrt{H_1} \approx \sqrt{\bar{h}_1} + \mu h_1, \quad \mu = 1/(2\sqrt{\bar{h}_1})$$

e que $\sqrt{\bar{h}_1} = \bar{q}R_1$, obtém-se finalmente:

$$\tau_1 \dot{h}_1 + \mu h_1 = R_1 q \quad \rightarrow \quad \tau_1 \dot{h}_1 + \mu h_1 = R_1 \eta x$$

- ▶ A equação do tanque 2 foi calculada como sendo

$$C_2 \frac{dH_2}{dt} + \frac{H_2}{R_2} = \frac{\sqrt{H_1}}{R_1}, \quad H_2 = \bar{h}_2 + h_2$$

- ▶ Usando a linearização acima e notando que $\bar{h}_2 = \bar{q}R_2$, obtém-se

$$\tau_2 \dot{h}_2 + h_2 = \mu(R_2/R_1)h_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Sensores e atuadores

- ▶ O conjunto de equações linearizadas que governa esse sistema é dado por

$$\begin{aligned}m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= \lambda_1 x + \lambda_2 \dot{x}_1 \\ \tau_1 \dot{h}_1 + \mu h_1 &= \eta R_1 x \\ \tau_2 \dot{h}_2 + h_2 &= \mu(R_2/R_1)h_1\end{aligned}\tag{eq 6}$$

com

$$\tau_1 = R_1 C_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2, \quad \mu = \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1}}, \quad \eta = \frac{\phi Q_{\max}}{X_{\max}} e^{-(\phi \bar{x}/X_{\max})}$$

e

$$\lambda_1 = -\frac{2\delta \gamma \bar{v}_1^2}{(\epsilon + \gamma \bar{x})^3}, \quad \lambda_2 = \frac{2\delta \bar{v}_1}{(\epsilon + \gamma \bar{x})^2}$$

- ▶ As funções de transferências, relacionadas com (eq 6), são dadas por

$$\frac{X(s)}{I_1(s)} = \frac{\lambda_2}{ms^2 + bs + k - \lambda_1}, \quad \frac{H_1(s)}{X(s)} = \frac{\eta R_1}{\tau_1 s + \mu}, \quad \frac{H_2(s)}{H_1(s)} = \frac{\mu(R_2/R_1)}{\tau_2 s + 1}$$

- ▶ **Exercício:** Determine a função de transferência $H_2(s)/I_1(s)$.

Conceitos de modelagem de sistemas

Sensores e atuadores

- ▶ A função de transferência que relaciona a entrada i_1 com a saída h_2 é dada por

$$\frac{H_2(s)}{I_1(s)} = \frac{\eta\lambda_2\mu R_2}{a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= m\tau_1\tau_2, & a_4 &= (k - \lambda_1)\mu, & a_2 &= m\mu + b(\tau_1 + \mu\tau_2) + (k - \lambda_1)\tau_1\tau_2 \\ a_1 &= m(\tau_1 + \mu\tau_2) + b\tau_1\tau_2, & a_3 &= b\mu + (k - \lambda_1)(\tau_1 + \mu\tau_2) \end{aligned}$$

- ▶ A função de transferência entre i_1 e h_1 é obtida de $H_2(s)$ como segue:

$$H_1(s) = F(s)H_2(s) \quad \text{com} \quad F(s) = \frac{R_1}{R_2} \frac{(\tau_2s + 1)}{\mu}$$

- ▶ As condições iniciais para a simulação numérica desse sistema, são:

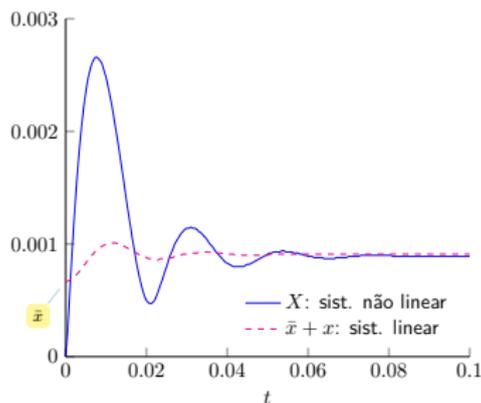
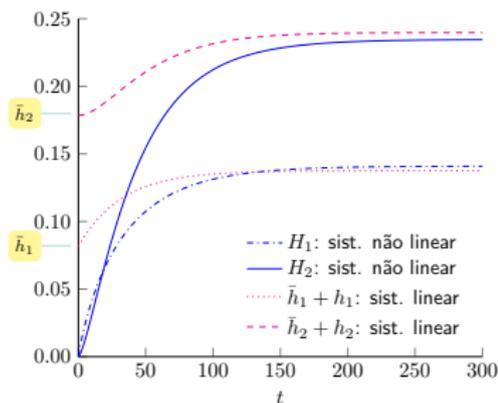
$$h_{10} = h_{20} = 0, \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0$$

- ▶ O sistema é linearizado em torno do regime permanente $\bar{i}_1 = 1$ [A].
- ▶ Todos os outros equilíbrios em regime, \bar{x} , \bar{h}_1 , etc, são obtidos diretamente de \bar{i}_1 .

Conceitos de modelagem de sistemas

Sensores e atuadores

- ▶ Para o sistema não linear, a entrada é $I_1(t) = 1.5$ [A]. Para o linear, a entrada é $i_1(t) = 0.5$ [A], já que o sistema foi linearizado em torno do regime $\bar{i}_1 = 1$ [A].
- ▶ Para simular o sistema linear (eq 6), pode-se usar $H_1(s)$ e $H_2(s)$, fornecidos anteriormente, ou pode-se usar o *ode suite*, com a equação na forma de estado.



- ▶ Usando (exercício) o teorema do valor final, tem-se

$$x(\infty) = \frac{\lambda_2 \bar{i}_1}{k - \lambda_1}, \quad h_1(\infty) = \frac{\eta R_1 \lambda_2 \bar{i}_1}{\mu(k - \lambda_1)}, \quad h_2(\infty) = \frac{\eta \lambda_2 R_2 \bar{i}_1}{k - \lambda_1}$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Sensores e atuadores

- ▶ O sensor mede a altura do líquido no segundo tanque, fornecendo uma corrente proporcional à pressão, que por sua vez é proporcional à altura.
- ▶ A pressão é dada por

$$P_2 = \rho g H_2$$

com $\rho = 10^3$ [Kg/m³] a densidade e $g = 9.81$ [m/s²] a gravidade.

- ▶ O sinal de saída fornecido pelo sensor deve ser “condicionado” para 4-20 [mA]:

$$I_2 = \alpha P_2 + \beta$$

em que $\alpha = (20 - \beta)/P_{\max}$ [mA/Pa], com $P_{\max} = 20$ [kPa] a maior pressão esperada e $\beta = 4$ [mA] a menor corrente desejável quando $P_2 = 0$.

- ▶ Substituindo a pressão P_2 na equação da corrente I_2 , tem-se

$$I_2 = \alpha \rho g H_2 + \beta$$

- ▶ Note que os sinais consistem de um regime permanente e uma parcela variante

$$I_2 = \bar{i}_2 + i_2, \quad P_2 = \bar{p}_2 + p_2 \quad \text{e} \quad H_2 = \bar{h}_2 + h_2$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Sensores e atuadores

- ▶ Da expressão $P_2 = \rho g H_2$, a pressão \bar{p}_2 em regime permanente fica sendo

$$\bar{p}_2 = \rho g \bar{h}_2$$

- ▶ Da equação que relaciona a corrente I_2 com a altura H_2 , dada por

$$I_2 = \alpha \rho g H_2 + \beta$$

obtém-se

$$\bar{i}_2 + i_2 = \alpha \rho g (\bar{h}_2 + h_2) + \beta$$

- ▶ Assim, em regime permanente, tem-se

$$\bar{i}_2 = \alpha \rho g \bar{h}_2 + \beta$$

- ▶ Substituindo essa expressão na equação anterior, obtém-se

$$i_2 = \alpha \rho g h_2$$

que relaciona a variação da corrente i_2 pela variação da altura h_2 .

- ▶ Para uma simulação numérica do sistema, pode-se escolher a saída como sendo tanto a altura h_2 como a corrente i_2 .