ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

Nota ao leitor

- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:

  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4^a edição, Pearson Education do Brasil, 2003.

  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.

  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd Ed., Add.-Wesley, 1994.

- Material suplementar:
  - K. Ogata, *Discrete-time control systems*, 2nd Edition, P.-Hall, 1995.

  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8^a edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.

  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.

  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

Conceitos de modelagem de sistemas

Representação no espaço de estado

- Um sistema de m equações diferenciais de ordem n pode ser reescrito como um sistema de $m \times n$ equações de primeira ordem.

- Exemplo: Considere o seguinte sistema com $m = 2$ e $n = 2$, dado por

$$\ddot{q}(t) + 5q(t) + 3\dot{w}(t) = u_1(t)$$
$$\ddot{w}(t) + 2\dot{w}(t) + 3\dot{q}(t) = -u_2(t)$$

- Primeiramente, define-se um novo conjunto de variáveis de estado $x(t)$ por

$$x_1(t) = q(t), \qquad x_2(t) = \dot{q}(t), \qquad x_3(t) = w(t), \qquad x_4(t) = \dot{w}(t)$$

- Note que a derivada do vetor $x(t)$ é

$$\dot{x}_1(t) = \dot{q}(t) = x_2(t), \qquad \dot{x}_2(t) = \ddot{q}(t)$$
$$\dot{x}_3(t) = \dot{w}(t) = x_4(t), \qquad \dot{x}_4(t) = \ddot{w}(t)$$

- Substituindo o novo estado $x(t)$ na equação diferencial, tem-se

$$\dot{x}_2(t) = -5x_1(t) - 3x_4(t) + u_1(t)$$
$$\dot{x}_4(t) = -3x_2(t) - 2x_4(t) - u_2(t)$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Representação no espaço de estado

- O sistema, na nova variável $x(t)$, passa a ser

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -5x_1(t) - 3x_4(t) + u_1(t) \\
\dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
\dot{x}_4(t) &= -3x_2(t) - 2x_4(t) - u_2(t)
\end{aligned}$$

- Que pode ainda ser reescrito na seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

- Assim, obtém-se o *modelo no espaço de estado*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

  com as matrizes A e B obtidas da representação acima.

- A saída do sistema pode ser descrita como segue:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- No Matlab, esse modelo pode ser inserido usando-se o comando **H=ss(A,B,C,D)**.

- Exemplo: Para representar no espaço de estado a equação do circuito RLC

$$LC\ddot{v}_C(t) + RC\dot{v}_C(t) + v_C(t) = v_E(t)$$

basta definir as variáveis de estado como sendo

$$x_1 = v_C \qquad \text{e} \qquad x_2 = \dot{v}_C$$

- Derivando-se x_1 e x_2, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{v}_C = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{v}_C = \frac{1}{LC}v_E - \frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 \end{aligned}$$

- Definindo-se entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ por

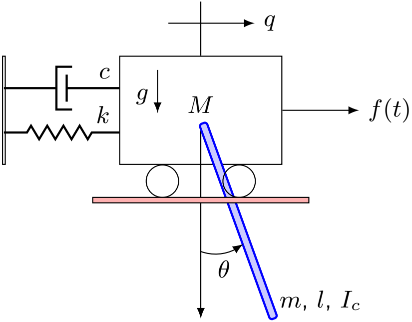
$$u = v_E(t) \qquad \text{e} \qquad y = v_C(t) = x_1(t)$$

chega-se à forma matricial no espaço de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/(LC) & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/(LC) \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Exemplo: Considere o sistema carro-pêndulo da figura abaixo.



- A equação de movimento linearizada é dada por

$$\hat{M}\ddot{q}(t) - \frac{3}{4}mg\theta(t) + kq(t) + c\dot{q}(t) = f(t)$$

$$\frac{2}{3}\hat{M}l\ddot{\theta}(t) + \bar{M}g\theta(t) - kq(t) - c\dot{q}(t) = -f(t)$$

com $\bar{M} = M + m$, $\hat{M} = M + m/4$ e $I_c = 1/12ml^2$.

- Escolhendo os estados como

$$x_1 = q, \qquad x_2 = \theta, \qquad x_3 = \dot{q}, \qquad x_4 = \dot{\theta}$$

e a entrada $u(t)$ como $u(t) = f(t)$, obtém-se

$$\dot{x}_1 = \dot{q} = x_3, \qquad \dot{x}_3 = \ddot{q} = -\frac{k}{\hat{M}}x_1 + \frac{3mg}{4\hat{M}}x_2 - \frac{c}{\hat{M}}x_3 + \frac{1}{\hat{M}}u(t)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\theta} = x_4, \qquad \dot{x}_4 = \ddot{\theta} = \frac{3k}{2\hat{M}l}x_1 - \frac{3\bar{M}g}{2\hat{M}l}x_2 + \frac{3c}{2\hat{M}l}x_3 - \frac{3}{2\hat{M}l}u(t)$$

- Na forma matricial, tem-se $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{\hat{M}} & \frac{3mg}{4\hat{M}} & -\frac{c}{\hat{M}} & 0 \\ \frac{3k}{2\hat{M}l} & -\frac{3\bar{M}g}{2\hat{M}l} & \frac{3c}{2\hat{M}l} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{\hat{M}l}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

- Suponha que a saída desejada seja o deslocamento $q(t)$ e a velocidade angular $\dot{\theta}(t)$. Então o vetor de saída $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ será dado por

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Representação no espaço de estado

- Considere o seguinte sistema mecânico de três graus de liberdade:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = 0$$

em que q é o vetor contendo o deslocamento das massas m_1, m_2 e m_3, dado por

$$q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T$$

- Para representar essa equação no espaço de estado, basta definir o estado x como

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

- Assim, a sua derivada é dada por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}C\dot{q} - M^{-1}Kq \end{bmatrix}$$

- Esse sistema pode ser equivalentemente escrito como

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

com a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

Simulação numérica

Integração numérica

- Para simular usando o Matlab o sistema de 2ª ordem

$$m\ddot{y}(t) = -ky(t) - c\dot{y}(t) + u(t)$$

é necessário representá-lo no espaço de estado $\dot{x} = Ax + Bu$, dado por

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

- Assim, cria-se um arquivo (sistema1glode.m) com a função na forma matricial:

```
function dx = sistema1glode(t,x)
  m = 1; c = 1; k = 1;
  u = sin(t);
  A = [ 0      1
       -k/m  -c/m];
  B = [0 1/m]';
  dx = A*x + B*u;
 end
```

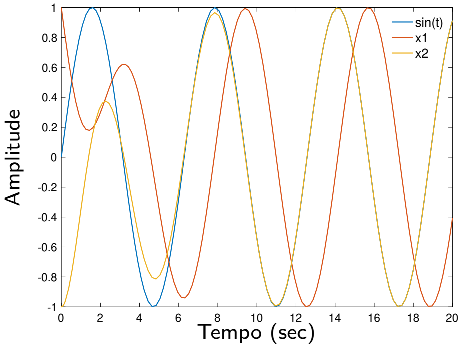
- Lembrando que o comando para integrar esse sistema é:

```
tspan = [0 20]; ci = [1 -1]'; % Tempo e Condição inicial
[t,x] = ode45(@sistema1glode,tspan,ci);
```

- O código para simular o sistema massa-mola-amortecedor, sujeito à excitação $u(t) = \sin(t)$ e condições iniciais $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = -1$, é dado por

```
...
[t,x] = ode45(@sistema1glode,tspan,ci);
plot(t,sin(t), t, x)
legend('sin(t)','x1','x2')
xlabel('Tempo (s)'), ylabel('Amplitude')
```

- A figura abaixo apresenta o deslocamento $x_1(t) = y(t)$ e a velocidade $x_2(t) = \dot{y}(t)$.



Simulação numérica

Integração numérica

- Uma alternativa é usar o comando **H=ss(A,B,C,D)** com o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

- Para isso, é preciso definir a saída do sistema: $y = Cx + Du$

- Suponha que se deseje o deslocamento da massa x_1 e o sinal $cx_2 - u$, ou seja

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ cx_2 - u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

- Assim, as matrizes C e D são dadas por

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Agora, a resposta ao impulso (de 0 a 6 segundos) é obtida como segue:

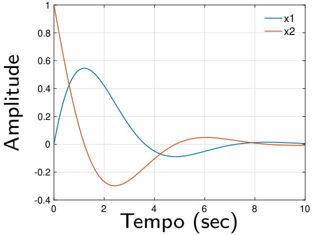
```
m = 1; c = 1; k = 1;
A = [0 1; -k/m -c/m]; B = [0 1/m]'; C = diag([1, c]); D = [0; -1];
H = ss(A,B,C,D);
[y,t,x] = impulse(H,10);
```

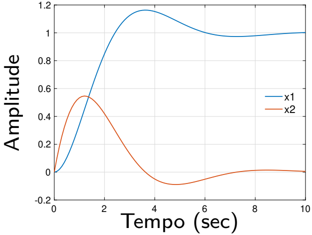
- Pode-se usar todos comandos já mencionados: impulse, step, initial, lsim, etc.

Simulação numérica

Integração numérica

- As figuras abaixo apresentam, respectivamente, a resposta ao impulso e ao degrau.





- As figuras abaixo apresentam, respectivamente, a resposta à condição inicial $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}'$ e a resposta à entrada $u(t) = \cos(5\sin^2(t))$ e condição inicial x_0.