

ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

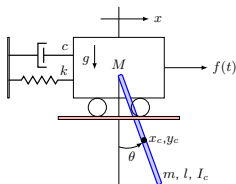
Nota ao leitor

- ▶ Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
 - ▶ K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4^a edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
 - ▶ G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
 - ▶ G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd Ed., Add.-Wesley, 1994.
- ▶ Material suplementar:
 - ▶ K. Ogata, *Discrete-time control systems*, 2nd Edition, P.-Hall, 1995.
 - ▶ R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8^a edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
 - ▶ J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
 - ▶ B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

Conceitos de modelagem de sistemas

Sistema carro-pêndulo

- ▶ Considere o sistema carro-pêndulo da figura abaixo.



- ▶ **Energia cinética:**

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_c^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_c^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2$$

- ▶ Com $x_c = x + \frac{l}{2}\sin\theta$, $\dot{x}_c = \dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta$, $y_c = -\frac{l}{2}\cos\theta$, $\dot{y}_c = \frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta$, tem-se

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Sistema carro-pêndulo

► **Energia potencial:**

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + mg\frac{l}{2}(1 - \cos\theta)$$

► **Equação de Movimento via Lagrange:**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q_i, \quad q = (x, \theta)$$

► Para a coordenada x , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= (M + m) \dot{x} + \frac{1}{2}ml\dot{\theta} \cos\theta, & \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) &= (M + m) \ddot{x} + \frac{1}{2}ml\ddot{\theta} \cos\theta - \frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2 \sin\theta, & \frac{\partial U}{\partial x} &= kx \end{aligned}$$

► Fornecendo assim a primeira equação:

$$(M + m) \ddot{x} + \frac{1}{2}ml (\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta) + c\dot{x} + kx = f(t)$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Sistema carro-pêndulo

- ▶ Para a coordenada θ , tem-se

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m \frac{l^2}{4} \dot{\theta} + \frac{1}{2} ml \dot{x} \cos \theta + I_c \dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} ml \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta$$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = m \frac{l^2}{4} \ddot{\theta} + I_c \ddot{\theta} + \frac{1}{2} ml (\ddot{x} \cos \theta - \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta), \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = mg \frac{l}{2} \sin \theta$$

- ▶ Fornecendo assim a segunda equação:

$$(I_c + 1/4ml^2)\ddot{\theta} + 1/2ml \cos \theta \ddot{x} + 1/2mg \sin \theta = 0$$

- ▶ Portanto, a equação de movimento não linear é dada por

$$(M + m)\ddot{x} + 1/2ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + c\dot{x} + kx = f(t)$$
$$(I_c + 1/4ml^2)\ddot{\theta} + 1/2ml(\ddot{x} \cos \theta + g \sin \theta) = 0$$

- ▶ Desacoplando as equações acima (com $I_c = ml^2/12$), tem-se

$$(M + m - 3/4m \cos^2 \theta)\ddot{x} - 1/2ml\dot{\theta}^2 \sin \theta - 3/4mg \cos \theta \sin \theta + \dots$$
$$+ c\dot{x} + kx = f(t)$$
$$2/3(M + m - 3/4m \cos^2 \theta)l\ddot{\theta} + 1/2ml\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta + (M + m)g \sin \theta - \dots$$
$$- (c\dot{x} + kx) \cos \theta = -f(t) \cos \theta$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Sistema carro-pêndulo

- ▶ Com $k = 0$ e $c = 0$, a equação linearizada, na origem, é dada por

$$\begin{aligned}\hat{M}\ddot{x} - 3/4mg\theta &= f(t), & \hat{M} &= M + 1/4m \\ 2/3\hat{M}l\ddot{\theta} + \bar{M}g\theta &= -f(t), & \bar{M} &= M + m\end{aligned}$$

- ▶ Aplicando Laplace na equação acima, tem-se

$$\begin{aligned}\hat{M}s^2 X(s) - 3/4mg\Theta(s) &= F(s) \\ 2/3\hat{M}ls^2\Theta(s) + \bar{M}g\Theta(s) &= -F(s)\end{aligned}$$

- ▶ A função de transferência entre $F(s)$ e $\Theta(s)$ é dada por

$$H_{\theta f}(s) = \frac{\Theta(s)}{F(s)} = -\frac{3/2}{\hat{M}ls^2 + 3/2\bar{M}g}$$

- ▶ A função de transferência entre $F(s)$ e $X(s)$ é dada por

$$H_{xf}(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{ls^2 + 3/2g}{\hat{M}ls^4 + 3/2\bar{M}gs^2}$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Sistema carro-pêndulo

- ▶ A função de transferência

$$H_{\theta f}(s) = \frac{\Theta(s)}{F(s)} = -\frac{3/2}{\hat{M}ls^2 + 3/2\bar{M}g}$$

pode ser reescrita na forma

$$H_{\theta f}(s) = -\gamma\omega_n^2 \frac{1}{s^2 + \omega_n^2}, \quad \text{com} \quad \omega_n^2 = \frac{3}{2} \frac{\bar{M}g}{\hat{M}l} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{\bar{M}g}$$

- ▶ Perceba que os polos de $H_{\theta f}(s)$ estão localizados em $s_{1,2} = \pm j\omega_n$.
- ▶ A função de transferência

$$H_{xf}(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{ls^2 + 3/2g}{s^2(\hat{M}ls^2 + 3/2\bar{M}g)}$$

pode ser reescrita na forma

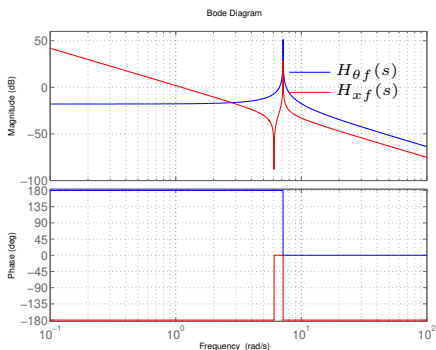
$$H_{xf}(s) = \frac{2}{3}\gamma\omega_n^2 l \frac{s^2 + \omega_z^2}{s^2(s^2 + \omega_n^2)}, \quad \text{com} \quad \omega_z = \sqrt{3/2}\sqrt{g/l}$$

- ▶ Perceba que os polos de $H_{xf}(s)$ estão localizados em $s_{1,2} = \pm j\omega_n$ e $s_{3,4} = 0$.
- ▶ Os dois zeros de $H_{xf}(s)$ estão localizados em $s_{1,2} = \pm j\omega_z$. Note que $\sqrt{g/l}$ corresponde à frequência natural de um pêndulo gravitacional simples ideal.

Conceitos de modelagem de sistemas

Sistema carro-pêndulo

- ▶ Diagrama de Bode de $H_{\theta f}(s)$ e $H_{x f}(s)$, assumindo-se $M = 0.5$ kg, $m = 0.3$ kg, $l = 0.4$ m, $g = 9.81$ m/s², $c = 0$ e $k = 0$.

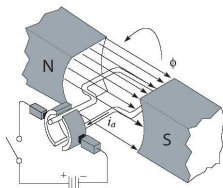


- ▶ Observe que no diagrama de Bode de $H_{x f}(s)$ existe uma antirressonância na frequência $\omega_z = \sqrt{3/2}\sqrt{g/l} = 6.07$ rad/s. Portanto, se a frequência de uma excitação harmônica $f(t)$ for ω_z , o carro ficará imóvel e apenas o pêndulo oscilará.
- ▶ Quanto maior a frequência de excitação, com $\omega \gg \omega_n = \sqrt{3/2}\sqrt{(\bar{M}g)/(\hat{M}l)} = 7.15$ rad/s, menores serão os deslocamentos do carro e do pêndulo.

Conceitos de modelagem de sistemas

Motor-carga controlado pela armadura

- ▶ Considere o motor CC (corrente contínua) de ímã permanente, cujo princípio de funcionamento está apresentado na figura abaixo.



- ▶ Para esse sistema, o torque do motor τ_m [Nm] é dado por

$$\tau_m = K_1 \phi i_a = K_m i_a, \quad K_m = K_1 \phi$$

em que ϕ é o fluxo magnético [weber], i_a é a corrente na armadura [ampère] e K_1 é uma constante.

- ▶ A força contra-eletromotriz V_b [volt] é dada por

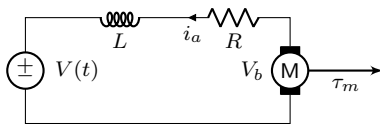
$$V_b = K_2 \phi \omega_m = K_b \omega_m, \quad K_b = K_2 \phi$$

em que ω_m é a velocidade angular do rotor [rad/sec] e K_2 é uma constante.

Conceitos de modelagem de sistemas

Motor-carga controlado pela armadura

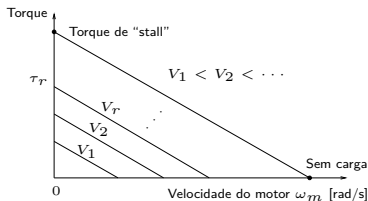
- ▶ A armadura pode ser descrita pelo circuito RL abaixo, em que a corrente i_a é gerada por um tensão de controle $V(t)$.



- ▶ A equação diferencial que governa o circuito é: $L \frac{di_a}{dt} + Ri_a = V - V_b$
- ▶ Como o fluxo da armadura é constante, tem-se

$$\tau_m = K_m i_a, \quad \text{e} \quad V_b = K_b \omega_m$$

- ▶ Curvas de torque versus velocidade



Conceitos de modelagem de sistemas

Motor-carga controlado pela armadura

- ▶ Notando que o eixo do motor está conectado a uma carga de inércia J e está sujeito a ação de um atrito viscoso b , a equação de movimento é dada por

$$J\ddot{\theta}_m + b\dot{\theta}_m = \tau_m$$

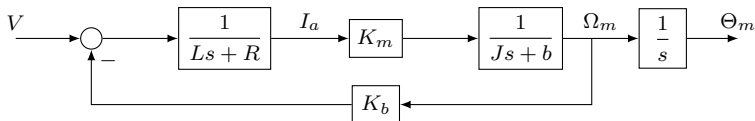
- ▶ Usando a equação do motor derivada anteriormente, dada por

$$L\frac{di_a}{dt} + Ri_a = V - V_b, \quad \tau_m = K_m i_a, \quad \text{e} \quad V_b = K_b \omega_m, \quad \omega_m = \dot{\theta}_m$$

- ▶ Obtém-se o seguinte sistema de equações acopladas:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta}_m + b\dot{\theta}_m &= K_m i_a & \iff & (Js^2 + bs)\Theta_m(s) = K_m I_a(s) \\ L\frac{di_a}{dt} + Ri_a &= V - K_b \dot{\theta}_m & & (Ls + R)I_a(s) = V - sK_b\Theta_m(s) \end{aligned}$$

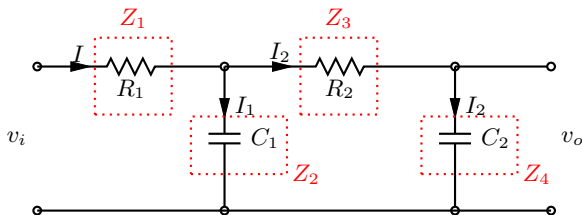
- ▶ Cuja representação por diagrama de blocos é dada por



Conceitos de modelagem de sistemas

Impedâncias complexas

- **Exemplo:** Considere o sistema abaixo



- Assim

$$Z_2 I_1 = (Z_3 + Z_4) I_2 \quad \text{e} \quad I_1 + I_2 = I$$

- Fornecendo

$$Z_2(I - I_2) = (Z_3 + Z_4) I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I$$
$$Z_2 I_1 = (Z_3 + Z_4)(I - I_1) \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{Z_3 + Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Impedâncias complexas

- ▶ Sabe-se também que

$$V_i(s) = Z_1 I + Z_2 I_1 = \left[Z_1 + \frac{Z_2(Z_3 + Z_4)}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \right] I$$

$$V_o(s) = Z_4 I_2 = \frac{Z_2 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} I$$

- ▶ Portanto

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1(Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_3 + Z_4)}$$

- ▶ Substituindo $Z_1 = R_1$, $Z_2 = \frac{1}{C_1 s}$, $Z_3 = R_2$ e $Z_4 = \frac{1}{C_2 s}$ obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{V_o(s)}{V_i(s)} &= \frac{\frac{1}{c_1 s} \frac{1}{c_2 s}}{R_1 \left(\frac{1}{c_1 s} + R_2 + \frac{1}{c_2 s} \right) + \frac{1}{c_1 s} \left(R_2 + \frac{1}{c_2 s} \right)} \\ &= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1} \end{aligned}$$

- ▶ Circuito em cascata (em série) as impedâncias somam.

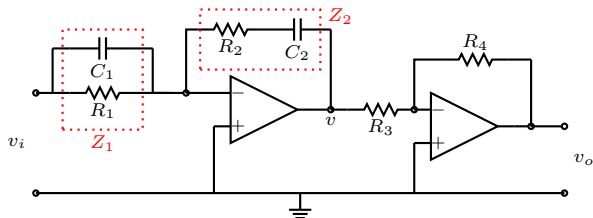
- ▶ Circuito em paralelo, a impedância equivalente é dada por:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Amplificadores operacionais (Amp Ops)

► Controlador PID.



► Foi visto que $\frac{V(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$ e que $\frac{V_o(s)}{V(s)} = -\frac{R_4}{R_3}$.

► Note que

$$Z_1(s) = \frac{R_1 \frac{1}{C_1 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}$$

$$Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{C_2 s} = \frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s}$$

► Fornecendo

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{V_o(s)}{V(s)} \frac{V(s)}{V_i(s)} = \frac{R_4}{R_3} \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{R_4}{R_3} \left(\frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s} \right) \left(\frac{R_1 C_1 s + 1}{R_1} \right)$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Amplificadores operacionais (Amp Ops)

- ▶ A expressão anterior pode ser reescrita como

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \underbrace{\frac{R_4(R_1C_1 + R_2C_2)}{R_3R_1C_2}}_{K_p} \left[1 + \underbrace{\frac{1}{(R_1C_1 + R_2C_2)}}_{T_i} \frac{1}{s} + \underbrace{\frac{R_1C_1R_2C_2}{R_1C_1 + R_2C_2}}_{T_d} s \right]$$

- ▶ Portanto

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = K_p \left(1 + \frac{T_i}{s} + T_d s \right)$$

com

$$K_p = \frac{R_4(R_1C_1 + R_2C_2)}{R_3R_1C_2}, \quad T_i = \frac{1}{R_1C_1 + R_2C_2}, \quad T_d = \frac{R_1C_1R_2C_2}{R_1C_1 + R_2C_2}$$

- ▶ Essa função de transferência pode ser ainda reescrita como

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

com $K_i = K_p T_i$ e $K_d = K_p T_d$ dados por

$$K_i = \frac{R_4}{R_3R_1C_2}, \quad K_d = \frac{R_4R_2C_1}{R_3}$$