ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

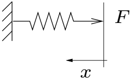
Nota ao leitor

- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4^a edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd Ed., Add.-Wesley, 1994.
- Material suplementar:
  - K. Ogata, *Discrete-time control systems*, 2nd Edition, P.-Hall, 1995.
  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8^a edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

Conceitos de modelagem de sistemas e Equações Diferenciais

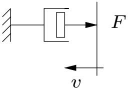
Sistema mecânico com um grau de liberdade

- Mola de rigidez k. Pela lei de Hooke, tem-se que a força F exercida pela mola é proporcional ao deslocamento x com sentido oposto.



$$F = kx$$

- Amortecimento. Coeficiente de amortecimento c. Nesse caso, a força é proporcional à velocidade $\dot{x}$ com sentido oposto.

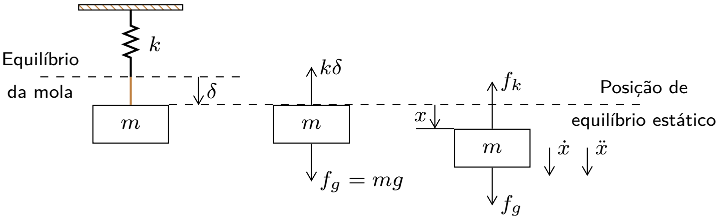


$$F = cv = c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad F = c\dot{x}$$

- Inércia. Segunda lei de Newton.

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \quad \rightarrow \quad F = m\ddot{x}$$

- Exemplo: Considere o sistema massa-mola abaixo, sujeito à ação da gravidade.



- Devido à ação da gravidade, a mola se deflete e a nova posição de equilíbrio estático, denotada pela constante δ, é dada por

$$k\delta = mg$$

- No diagrama de corpo livre (DCL), f_k e f_g são, respectivamente, a força da mola e a força devido à gravidade:

$$f_k = k(x + \delta) \qquad \text{e} \qquad f_g = mg$$

- Aplicando a segunda lei de Newton, a partir do DCL, obtém-se

$$+\downarrow \sum \text{Forças} = -f_k + f_g = m\ddot{x}$$

- Portanto, a equação de movimento é dada por

$$-f_k + f_g = m\ddot{x} \qquad \rightarrow \qquad -k(x+\delta) + mg = m\ddot{x}$$

- Lembrando que $k\delta = mg$, do equilíbrio estático, obtém-se

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

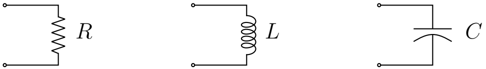
- Definindo a frequência natural por $\omega_n = \sqrt{k/m}$, a equação de movimento pode ainda ser rescrita na forma

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

- Essa equação diferencial linear de segunda ordem requer duas condições iniciais:

$$x(t=0) = x_0 \qquad \text{e} \qquad \dot{x}(t=0) = v_0$$

- Modelo matemático de alguns sistemas elétricos básicos.



- Resistor ôhmico R. A diferença de potencial (tensão) v [V] nos terminais do resistor R [Ω], a qualquer instante, é proporcional à corrente i [A], ou seja,

$$v = Ri$$

- Indutor L. A diferença de potencial v [V] nos terminais do indutor L [H], a qualquer instante, é proporcional à corrente i [A], ou seja,

$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad i = \frac{1}{L}\int v\mathrm{d}t$$

- Capacitor C. A diferença de potencial v [V] através do capacitor C [C], num instante de tempo t [s], depende da carga elétrica q acumulada nas placas do capacitor, ou seja,

$$v = \frac{q}{C}$$

- A corrente i que flui através do capacitor é igual à razão com que as cargas elétricas se movem, i.e. $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$.
- Dessa forma, a carga total acumulada nas placas do capacitor é dada por

$$q = \int i \mathrm{d}t$$

- Substituindo a carga q na equação da tensão $v = q/C$, tem-se

$$v = \frac{1}{C} \int i \mathrm{d}t$$

- Derivando a tensão v e usando a relação $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, tem-se

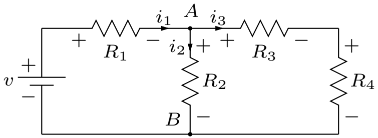
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C} i$$

- Portanto, a corrente pode ser determinada através da relação

$$i = C \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

- Lei dos nós. A lei dos nós estabelece que a soma algébrica das correntes que entram num nó é nula, ou seja,
$$\sum i_j = 0$$
- Como regra geral, admite-se que a corrente pode ser indicada a priori sem necessidade de se saber se a corrente circula verdadeiramente no sentido indicado.
- Como convenção, uma corrente indicada como entrando num nó será contada positivamente. No caso contrário, será contada negativamente.
- Lei das malhas. A lei das malhas estabelece que a soma algébrica das tensões ao longo de um circuito fechado, ou numa malha fechada, é nula, ou seja,
$$\sum v_j = 0$$
- Da mesma forma, deve-se começar por estabelecer a priori as tensões aos terminais de cada dipolo e o sentido do percurso do cálculo em cada malha.
- Por convenção, as tensões definidas de tal modo que o sentido do percurso entre pelo polo positivo e saia pelo polo negativo serão contadas positivamente.

- Exemplo: Para ilustrar esse método de análise, considere o circuito abaixo.



- Para aplicar a lei dos nós, seleciona-se um nó, por exemplo o ponto A, e denota-se por v_A a tensão desse nó com relação a um nó de referência, nó B.

- Aplicando a lei dos nós em A, tem-se

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad i_1 = i_2 + i_3$$

- Aplicando a lei das malhas na primeira malha (a malha da esquerda), tem-se

$$-v + v_{R_1} + v_{R_2} = 0$$

em que v_{R_j} é a tensão através do resistor R_j.

- Como a corrente através de R_1 é i_1 e a tensão em R_2 é v_A, tem-se de imediato que

$$v = i_1 R_1 + v_A \qquad \Longrightarrow \qquad i_1 = \frac{v - v_A}{R_1}$$

Conceitos de modelagem de sistemas e Equações Diferenciais

Sistemas elétricos

- Como a corrente que passa por R_2 é i_2, tem-se

$$v_A = v_{R_2} = i_2 R_2 \qquad \Longrightarrow \qquad i_2 = \frac{v_A}{R_2}$$

- Agora, aplicando a lei das malha na segunda malha (a malha da direita), tem-se

$$-v_{R_2} + v_{R_3} + v_{R_4} = 0$$

- Como a corrente i_3 circula através de R_3 em série com R_4, e a tensão nessa combinação também é v_A, tem-se

$$v_A = v_{R_3} + v_{R_4} = i_3(R_3 + R_4) \qquad \Longrightarrow \qquad i_3 = \frac{v_A}{R_3 + R_4}$$

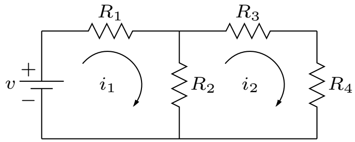
- Substituindo os valores de i_1, i_2 e i_3 na equação $i_1 = i_2 + i_3$, tem-se

$$\frac{v - v_A}{R_1} = \frac{v_A}{R_2} + \frac{v_A}{R_3 + R_4}$$

- Agora é possível isolar a tensão v_A, fornecendo

$$v_A = v \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2(R_3 + R_4) + R_1(R_2 + R_3 + R_4)}$$

- Método das correntes de malha. Considera-se que as correntes circulam nas malhas como descrito na figura abaixo.



- Assim, é necessário aplicar a lei das malhas para cada uma das malhas acima.
- Para a primeira malha com corrente i_1, tem-se

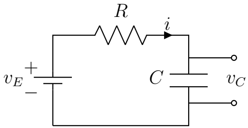
$$v = i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_2$$

- De forma similar, para a segunda malha, com corrente i_2, tem-se

$$0 = i_2 R_3 + i_2 R_4 + (i_2 - i_1) R_2$$

- Dessa forma, obtêm-se duas equações algébricas em i_1 e i_2, que podem ser resolvidas simultaneamente.
- Uma vez obtidas as correntes, a tensão nos resistores é prontamente determinada.

- Exemplo: Considere o seguinte circuito resistor-capacitor.



- Aplicando a lei das malhas, com $v_R = iR$, obtém-se

$$v_R + v_C = v_E \qquad \rightarrow \qquad iR + v_C = v_E$$

- Usando a relação entre corrente e tensão num capacitor, dada por

$$i = C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}$$

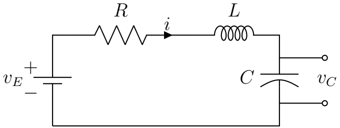
e definindo $\tau = RC$ a constante de tempo do circuito, obtém-se

$$\tau\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + v_C(t) = v_E(t)$$

- Essa equação descreve a relação entre a tensão de entrada v_E e a de saída v_C.

- Essa é uma equação diferencial de primeira ordem, portanto, para que seja resolvida, é preciso uma condição inicial, ou seja, uma tensão v_{C0} no tempo $t = 0$.

- Exemplo: Considere o seguinte sistema resistor-indutor-capacitor.



- Aplicando a lei das malhas para esse circuito, obtém-se

$$v_L + v_R + v_C = v_E$$

- Para o resistor, $v_R = iR$. Para o indutor, $v_L = L(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)$. Assim, tem-se

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + iR + v_C = v_E$$

- Usando a relação entre corrente e tensão através do capacitor C, dada por

$$i = C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}^2 v_C}{\mathrm{d}t^2}$$

obtém-se a seguinte equação diferencial linear de segunda ordem:

$$LC\ddot{v}_C(t) + RC\dot{v}_C(t) + v_C(t) = v_E(t)$$

- A solução homogênea da equação diferencial de primeira ordem, dada por

$$\tau\dot{v}(t) + v(t) = 0, \qquad v(0) = v_0,$$

pode ser obtida considerando que a solução geral tem a forma

$$v_h(t) = Ae^{st}$$

- Derivando essa solução e substituindo-a na equação diferencial, tem-se

$$0 = \tau Ase^{st} + Ae^{st} \quad \Longrightarrow \quad 0 = (\tau s + 1)Ae^{st} \quad \Longrightarrow \quad (\tau s + 1) = 0$$

- Resolvendo, obtém-se $s = -1/\tau$. Assim, a solução geral da homogênea é dada por

$$v_h(t) = Ae^{-t/\tau}$$

- A constante A é determinada usando-se a condição inicial

$$v_h(0) = Ae^0 = A = v_0$$

- Portanto, a solução homogênea fica sendo

$$v_h(t) = v_0e^{-t/\tau}$$

- A solução da equação diferencial não homogênea

$$\tau\dot{v}(t) + v(t) = p(t), \qquad v(0) = v_0,$$

é dada pela solução geral da homogênea v_h mais a solução particular v_p

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t)$$

- Considerando $p(t) = E$ constante, pode-se escolher v_p também constante:

$$v_p(t) = C$$

- Substituindo na equação diferencial, obtém-se a integral particular:

$$\tau\dot{v}_p(t) + v_p(t) = E \quad \Longrightarrow \quad v_p(t) = E$$

- A solução geral da equação não homogênea passa a ser

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = Ae^{-t/\tau} + E$$

- A constante A é determinada usando-se a condição inicial, como segue

$$v_0 = A + E \quad \Longrightarrow \quad A = v_0 - E$$

- Consequentemente, a solução completa fica sendo

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} + E(1 - e^{-t/\tau})$$

- Solução completa para uma entrada $p(t)$ qualquer. Considere a equação anterior

$$\tau \dot{v}(t) + v(t) = p(t), \qquad v(0) = v_0,$$

- Considere que a solução seja dada por

$$v(t) = e^{-t/\tau} y(t), \qquad \text{com } y(t) \text{ a determinar}$$

- Substituindo a solução $v(t)$ na equação diferencial, tem-se

$$\begin{aligned} \tau \left[\frac{-1}{\tau} e^{-t/\tau} y(t) + e^{-t/\tau} \dot{y}(t) \right] + e^{-t/\tau} y(t) &= p(t) \\ -e^{-t/\tau} y(t) + \tau e^{-t/\tau} \dot{y}(t) + e^{-t/\tau} y(t) &= p(t) \\ \tau e^{-t/\tau} \dot{y}(t) &= p(t) \end{aligned}$$

Assim

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{\tau} e^{t/\tau} p(t)$$

- Para obter $y(t)$, é preciso integrar ambos os lados da equação acima:

$$y(t) - y(0) = \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{\alpha/\tau} p(\alpha) \mathrm{d}\alpha$$

- Agora, usando o fato de que

$$v(t) = e^{-t/\tau} y(t) \qquad \iff \qquad y(t) = e^{t/\tau} v(t)$$

e notando que $y(0) = v(0)$, a equação

$$y(t) - y(0) = \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{\alpha/\tau} p(\alpha) \mathrm{d}\alpha$$

fica sendo

$$e^{t/\tau} v(t) - v(0) = \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{\alpha/\tau} p(\alpha) \mathrm{d}\alpha$$

- Portanto

$$v(t) = e^{-t/\tau} v(0) + \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-t/\tau} e^{\alpha/\tau} p(\alpha) \mathrm{d}\alpha$$

- Finalmente, obtém-se a solução completa abaixo:

$$v(t) = e^{-t/\tau} v(0) + \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-(t-\alpha)/\tau} p(\alpha) \mathrm{d}\alpha$$

- Exemplo: Calcule a resposta do circuito resistor-capacitor para uma tensão de entrada constante $p(t) = E$ [V] e tensão inicial no capacitor $v(0) = v_0$ [V].

- A equação do circuito é dada por

$$\tau \dot{v}(t) + v(t) = p(t), \qquad v(0) = v_0, \qquad \tau = RC$$

- A solução completa é dada por

$$v(t) = e^{-t/\tau} v(0) + \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-(t-\alpha)/\tau} p(\alpha) \mathrm{d}\alpha$$

- Assim

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 e^{-t/\tau} + E e^{-t/\tau} \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{\alpha/\tau} \mathrm{d}\alpha \\ &= v_0 e^{-t/\tau} + E e^{-t/\tau} e^{\alpha/\tau} \Big|_0^t = v_0 e^{-t/\tau} + E e^{-t/\tau} \left(e^{t/\tau} - 1 \right) \\ &= v_0 e^{-t/\tau} + E \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \end{aligned}$$

- A solução completa também pode ser particionada em um termo relacionado ao regime transiente e um termo relacionado ao regime estacionário (permanente).

- Para a equação diferencial de primeira ordem (como a do circuito RC), obteve-se

$$v(t) = \underbrace{v_0 e^{-t/\tau}}_{\text{homogênea}} + \underbrace{\frac{1}{\tau}\int_0^t e^{-(t-\alpha)/\tau} p(\alpha)\mathrm{d}\alpha}_{\text{forçada}}$$

- Assim, considerando que a tensão de entrada $p(t) = E$ é constante, tem-se

$$v(t) = \underbrace{v_0 e^{-t/\tau}}_{\text{homogênea}} + \underbrace{E(1 - e^{-t/\tau})}_{\text{forçada}}$$

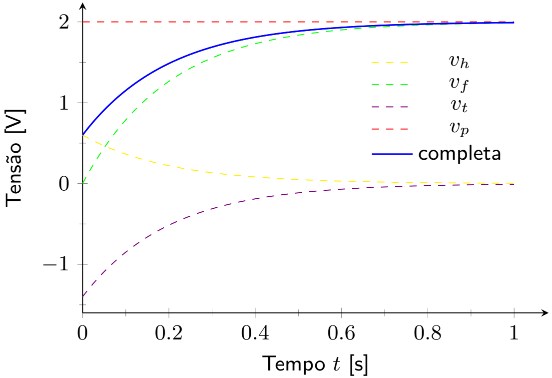
- Que pode ainda ser decomposta como a soma dos regimes transiente e estacionário

$$v(t) = \underbrace{(v_0 - E)e^{-t/\tau}}_{\text{transiente}} + \underbrace{E}_{\text{permanente}}$$

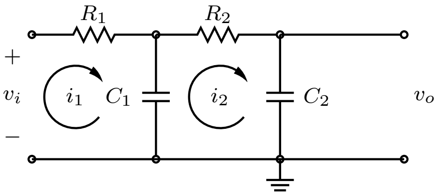
- Assim, em regime permanente com $t \to \infty$, a resposta claramente é dada por $v(t) = E$ e o capacitor estará plenamente carregado.

- Exemplo: Considere o exemplo do circuito resistor-capacitor, em que $R = 2$ [kΩ], $C = 0.1$ [mF], $v_{C0} = 0.6$ [V] e $v_E(t) = 2$ [V].

- A figura abaixo apresenta as respostas homogênea v_h, forçada v_f, transiente v_t, permanente v_p e completa.



- Considere o sistema abaixo.



- A primeira malha fornece:

$$\frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)\mathrm{d}t + R_1 i_1 = v_i$$

- A segunda malha fornece:

$$\frac{1}{C_1}\int (i_2 - i_i)\mathrm{d}t + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2 \mathrm{d}t = 0$$

- A terceira malha fornece:

$$\frac{1}{C_2}\int i_2 \mathrm{d}t = v_o$$

- Aplicando Laplace, obtém-se

$$\frac{1}{C_1 s}[I_1(s) - I_2(s)] + R_1 I_1(s) = V_i(s)$$
$$\frac{1}{C_1 s}[I_2(s) - I_1(s)] + R_2 I_2(s) + \frac{1}{C_2 s} I_2(s) = 0$$
$$\frac{1}{C_2 s} I_2(s) = V_o(s)$$

- A função de transferência fica sendo

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2 s}$$
$$= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$

- Note que o termo $R_1 C_2 s$ representa a interação de dois circuitos RC simples.

- Observe que, se os dois circuitos estivessem em cascata (em série) desacoplados, a saída do primeiro seria a entrada do segundo. Assim, a função de transferência seria o produto de $\frac{1}{R_1 C_1 s+1}$ e $\frac{1}{R_2 C_2 s+1}$.

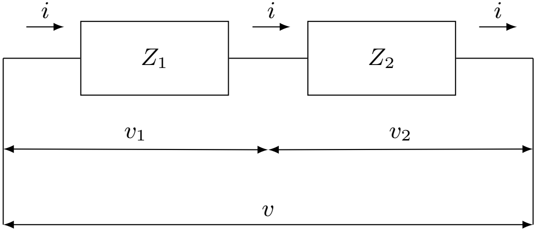
Conceitos de modelagem de sistemas

Impedâncias complexas

- A impedância complexa $Z(s)$ de um circuito de dois terminais é a relação entre $V(s)$ e $I(s)$, sob conduções iniciais nulas, ou seja

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

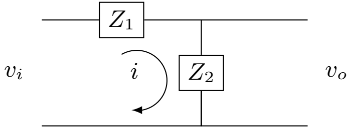
- Considere o circuito abaixo



- Assim:

$$\begin{aligned} V_1(s) &= Z_1(s)I(s) \\ V_2(s) &= Z_2(s)I(s) \\ V(s) &= V_1(s) + V_2(s) = (Z_1 + Z_2)I(s) \end{aligned}$$

- Exemplo: Considere o circuito abaixo.



- Assim

$$Z_1(s) = \frac{V_i(s) - V_o(s)}{I(s)} \qquad \text{e} \qquad Z_2(s) = \frac{V_o(s)}{I(s)}$$

- Substituindo uma equação na outra, obtém-se

$$Z_1(s) = \frac{V_i(s) - V_o(s)}{V_o(s)} Z_2(s)$$

- Fornecendo a função de transferência

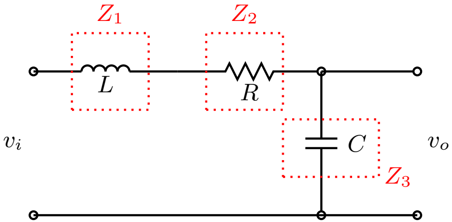
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}$$

- Se o componente entre os terminais for um resistor R, uma capacitância C ou uma indutância L, então a impedância complexa será respectivamente R, $1/Cs$ ou Ls.

Conceitos de modelagem de sistemas

Impedâncias complexas

- Exemplo: Considere o circuito abaixo.



- Para esse sistema, as impedâncias são dadas por

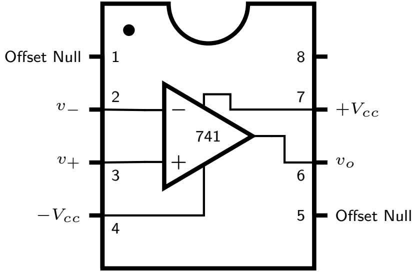
$$Z_1 = Ls, \qquad Z_2 = R, \qquad \text{e} \qquad Z_3 = \frac{1}{Cs}$$

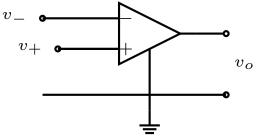
- Assim

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}}$$

$$= \frac{1}{CLs^2 + RCs + 1}$$

- O amplificador operacional LM741 (de uso geral) é um dos mais usados.





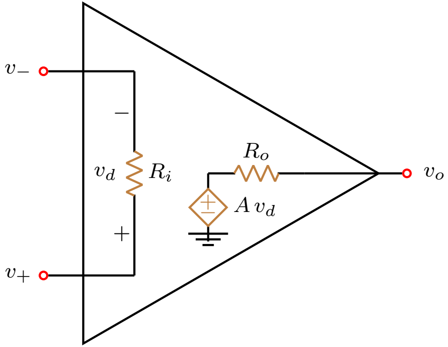
- O ganho do amplificador operacional, denotado por A, está geralmente na faixa de 10^5 a 10^8, para sinais cc e sinais ca (até 10Hz).

- A tensão de saída v_o, que é finita, é dada por

$$v_0 = A(v_+ - v_-)$$

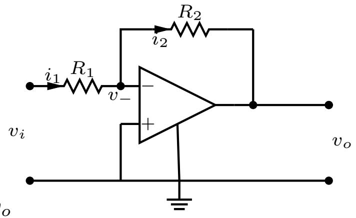
- A alimentação do amplificador ocorre através dos pinos $+V_{cc}$ e $-V_{cc}$.

- O amp op ideal tem ganho infinito, $A \to \infty$, impedância de entrada infinita, $R_i \to \infty$ e impedância de saída zero, $R_o \to 0$.
- Portanto $\quad v_d = v_+ - v_- \quad \to \quad 0$
- Note que o modelo do amp op descreve a saída como sendo fornecida por uma fonte de tensão dada por $v_o = Av_d$.



Conceitos de modelagem de sistemas

Amplificadores operacionais (Amp Ops)



- **Amplificador Inversor.**
- Para essa configuração, tem-se

$$i_1 = \frac{v_i - v_-}{R_1} \qquad \text{e} \qquad i_2 = \frac{v_- - v_o}{R_2}$$

- Como $i_1 = i_2$, obtém-se

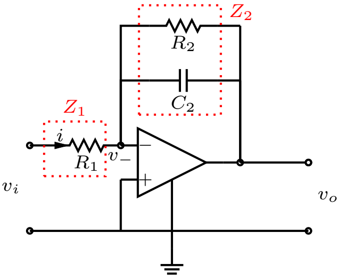
$$\frac{v_i - v_-}{R_1} = \frac{v_- - v_o}{R_2}$$

- A tensão de saída (finita) é dada por: $v_o = A(0 - v_-) = -Av_-$
- Como A é significativamente grande ($A \to \infty$), então $v_- \to 0$ e assim

$$\frac{v_i}{R_1} = -\frac{v_o}{R_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$

- Aplicando Laplace, obtém-se

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}$$



- **Amplificador "Integrador".**

- Usando impedância complexa tem-se

$$I(s) = \frac{V_i(s) - V_-(s)}{Z_1(s)} = \frac{V_-(s) - V_o(s)}{Z_2(s)}$$

- Como $V_-(s) = 0$ (do exemplo anterior), tem-se:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

- Nesse circuito, $Z_1(s) = R_1$.

- Como $Z_2(s)$ está em paralelo, tem-se

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{1/(C_2 s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{\frac{R_2}{C_2 s}} = \frac{R_2 C_2 s + 1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad Z_2(s) = \frac{R_2}{R_2 C_2 s + 1}$$

- Portanto

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{R_2 C_2 s + 1}$$