ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

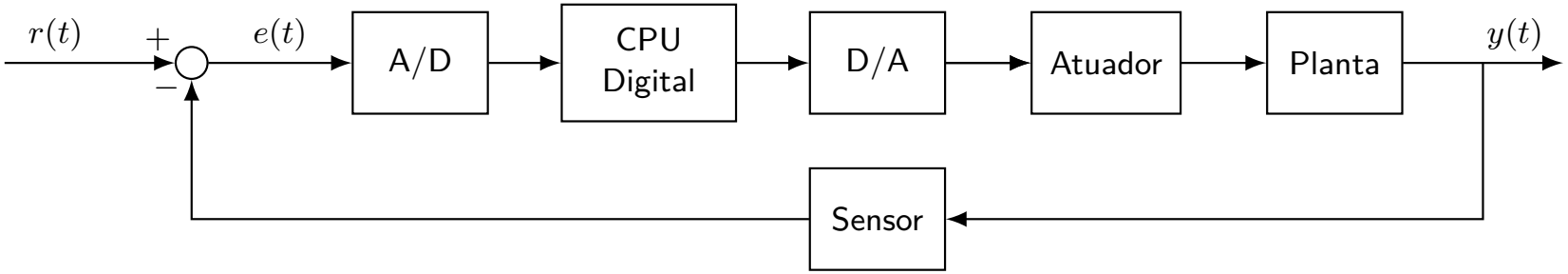
Nota ao leitor

- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4ª edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd Ed., Add.-Wesley, 1994.
- Material suplementar:
  - K. Ogata, *Discrete-time control systems*, 2nd Edition, P.-Hall, 1995.
  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8ª edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

Sistemas de controle digital

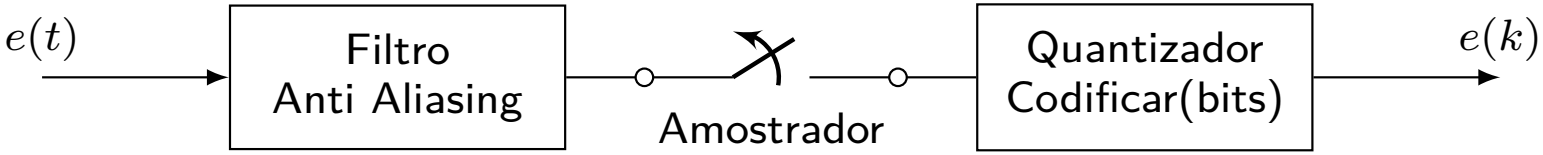
Introdução

- O sinal analógico (elétrico) de erro $e(t)$ é convertido em um sinal digital (binário) pelo circuito "sample-and-hold" e o conversor "analógico/digital".

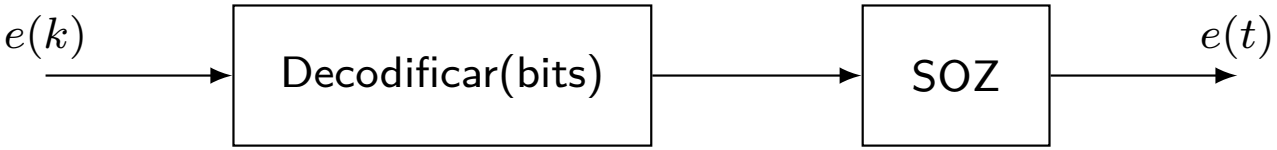


- Sample-and-hold: é um circuito que recebe um sinal analógico (elétrico) e o mantém constante por um período de tempo específico.

- Conversor Analógico/Digital (A/D): converte um sinal analógico em um sinal digital.



- Conversor Digital/Analógico (D/A): converte um sinal digital em um sinal analógico.



Transformada $\mathcal{Z}$

Transformada de funções básicas

- A transformada $\mathcal{Z}$ (unilateral) de um sinal discreto $f(k)$ é dada por

$$F(z) := \mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \cdots$$

- A seguir, será apresentada a sua aplicação em alguns sinais comuns:

1. Impulso unitário: $f(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{, se } k = 0 \\ 0 & \text{, se } k \neq 0 \end{cases}$

$$F(z) = \mathcal{Z}[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{0} z^{-k} = 1$$

2. Degrau unitário: $f(k) = \mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{, se } k \geq 0 \\ 0 & \text{, se } k < 0 \end{cases}$

$$F(z) = \mathcal{Z}[\mu(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Note que essa série converge para $|z| > 1$ (região de convergência).

Transformada $\mathcal{Z}$

Transformada de funções básicas

3. Função polinomial $f(k) = \begin{cases} a^k & \text{, se } k \geq 0 \\ 0 & \text{, se } k < 0 \end{cases}$

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] = \mathcal{Z}[a^k \mu(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{-1} z)^{-k} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

4. Função exponencial $f(kT) = \begin{cases} e^{-\alpha T k} & \text{, se } k \geq 0 \\ 0 & \text{, se } k < 0 \end{cases}$

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha T k} z^{-k} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$$

Note que esse resultado é obtido do caso anterior fazendo-se $a = e^{-\alpha T}$.

5. Função senoidal $f(k) = \sin(\omega k T)\mu(k)$:

$$F(z) = \mathcal{Z}[\sin(\omega k T)] = \mathcal{Z}\left[\frac{\left(e^{\mathrm{j}\omega k T} - e^{-\mathrm{j}\omega k T}\right)}{2\mathrm{j}}\right] = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{1}{1 - e^{\mathrm{j}\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-\mathrm{j}\omega T} z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{(e^{\mathrm{j}\omega T} - e^{-\mathrm{j}\omega T}) z^{-1}}{1 - (e^{\mathrm{j}\omega T} + e^{-\mathrm{j}\omega T}) z^{-1} + z^{-2}}\right) = \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$$

Transformada $\mathcal{Z}$

Propriedades da transformada $\mathcal{Z}$

1. Multiplicação por uma constante.

$$\mathcal{Z}[af(k)] = a\mathcal{Z}[f(k)] = aF(z)$$

2. Linearidade.

$$f(k) = \alpha f_1(k) + \beta f_2(k) \qquad \Longrightarrow \qquad F(z) = \alpha F_1(z) + \beta F_2(z)$$

3. Deslocamento em atraso. Se $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$, então

$$\mathcal{Z}[f(k-n)] = z^{-n}F(z) + z^{-n+1}f(-1) + \cdots + z^{-1}f(-n+1) + f(-n)$$

Prova:

$$\mathcal{Z}[f(k-n)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-n)z^{-k} = z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} f(k-n)z^{-(k-n)}$$

Fazendo a substituição de variável $k - n = h$, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f(k-n)] &= z^{-n}\sum_{h=-n}^{\infty} f(h)z^{-h} = z^{-n}\left(\sum_{h=0}^{\infty} f(h)z^{-h} + \sum_{h=-n}^{h=-1} f(h)z^{-h}\right) \\ &= z^{-n}F(z) + z^{-n+1}f(-1) + \cdots + z^{-1}f(-n+1) + f(-n)\end{aligned}$$

Observe que para $f(k) = g(k)\mu(k)$, tem-se $\mathcal{Z}[g(k-n)\mu(k-n)] = z^{-n}G(z)$.

Transformada $\mathcal{Z}$

Propriedades da transformada $\mathcal{Z}$

4. Multiplicação de $f(k)$ por a^k.

$$\mathcal{Z} = [a^k f(k)] = F(a^{-1}z)$$

Prova:

$$\mathcal{Z}[a^k f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)(a^{-1}z)^{-k} = F(a^{-1}z)$$

5. Deslocamento em avanço. Se $f(k) = 0, k < 0$ e $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$, então

$$\mathcal{Z}[f(k+n)] = z^n \left(F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k) z^{-k} \right)$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[f(k+1)] &= zF(z) - zf(0) \\
\mathcal{Z}[f(k+2)] &= z\mathcal{Z}[f(k+1)] - zf(1) = z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1) \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

6. Convolução. Seja $F_1(z) = \mathcal{Z}[f_1(k)]$ e $F_2(z) = \mathcal{Z}[f_2(k)]$, então

$$\mathcal{Z}[f_1(k) * f_2(k)] = F_1(z)F_2(z)$$

7. Teorema do valor inicial. Se $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$ e $\lim_{z\to\infty} F(z)$ existe, então

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

Exemplo: Qual o valor de $f(0)$ para

$$F(z) = \frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

Calculando o limite, tem-se

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = 1 - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(0) = 0$$

Note que $\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = f(k) = \mu(k) - e^{-kT}\mu(k)$.

8. Teorema do valor final.
   - Suponha que $f(k)$, com $f(k) = 0, k < 0$, tenha a transformada $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$.
   - Suponha que os polos de $F(z)$ estejam dentro do círculo unitário, com a possível exceção de um polo em $|z| = 1$ (essa é a condição para que $\{f(k)\}$ seja finita).

   Então,

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

9. Multiplicação de $f(k)$ por k.

$$\mathcal{Z}[kf(k)] = -z\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z}$$

Prova: Usando a definição da transformada $\mathcal{Z}$, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[kf(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} kf(k)z^{-k} = z\sum_{k=0}^{\infty} kf(k)z^{-k-1} \\ &= -z\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\left(-kz^{-k-1}\right) = -z\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^{-k} = -z\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z}\end{aligned}$$

Exemplo: A transformada $\mathcal{Z}$ da rampa unitária $g(k) = k\mu(k)$ é obtida como segue:

$$G(z) = \mathcal{Z}[g(k)] = \mathcal{Z}[kf(k)], \quad \text{com } f(k) = \mu(k)$$

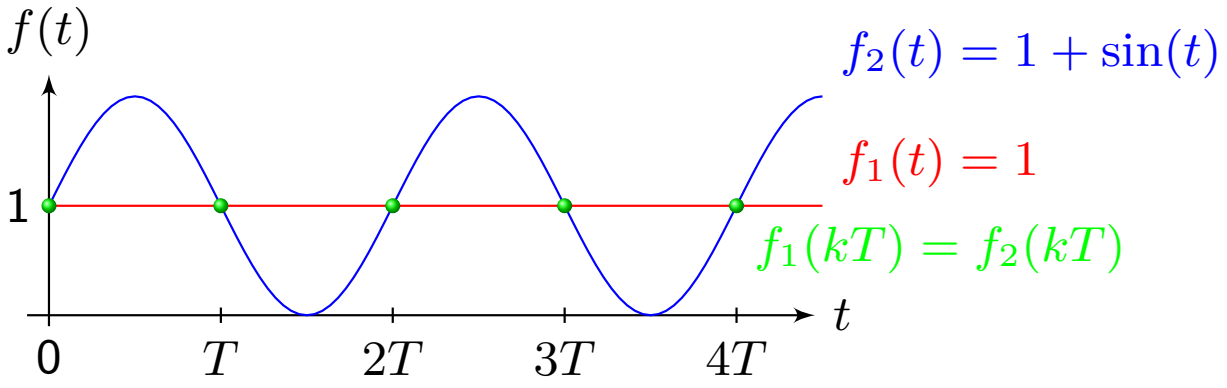
Notando que $\mathcal{Z}[f(k)] = \mathcal{Z}[\mu(k)] = z/(z-1)$, tem-se

$$\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{-1}{(z-1)^2}$$

Assim, obtém-se finalmente: $G(z) = \mathcal{Z}[kf(k)] = -z\dfrac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z} = \dfrac{z}{(z-1)^2}$

Inversa da transformada $\mathcal{Z}$

- A transformada $\mathcal{Z}$ inversa de $F(z)$ produz a correspondente sequência $f(k)$.
- No entanto, não produz um único $f(t)$, como demonstrado na figura abaixo.



- Para uma função racional $F(z)$ dada por

$$F(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}$$

os seguintes métodos podem ser usados para o cálculo da transformada $\mathcal{Z}$ inversa:

1. Método da decomposição em frações parciais;
2. Método da divisão direta;
3. Métodos computacionais.

Inversa da transformada $\mathcal{Z}$

Decomposição em frações parciais

- Seja a função $F(z)$ com $n \geq m$ dada por

$$F(z) = K\frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)}$$

- A decomposição em frações parciais para o caso discreto é similar ao caso contínuo.

$$F(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{z-p_1} + \dots + \frac{c_\ell z}{(z-p_1)^\ell} + \frac{c_{\ell+1} z}{z-p_{\ell+1}} + \dots + \frac{c_n z}{z-p_n}$$

em que $z = p_1$ é um polo de multiplicidade ℓ.

- A inversa para $k \geq 0$ é dada por

$$f(k) = c_0\delta(k) + c_1 p_1^k + \dots$$
$$+ \frac{c_\ell}{(\ell-1)!}\prod_{i=0}^{\ell-2}(k-i)p_1^{k-\ell+1} + c_{\ell+1}p_{\ell+1}^k + \dots + c_n p_n^k$$

- Exemplo: Seja a função $F(z)$ dada por

$$F(z) = \frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

Sua transforma inversa fornece: $f(k) = \mu(k) - e^{-aTk}\mu(k)$

Inversa da transformada $\mathcal{Z}$

Decomposição em frações parciais

- Exemplo: Considere a seguinte função racional

$$F(z) = \frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$$

- Sua decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{c_1}{(z-1)^2} + \frac{c_2}{(z-1)} + \frac{c_3}{(z-e^{-aT})}$$

- Os coeficientes c_i são dados por

$$c_1 = \left[(z-1)^2\frac{F(z)}{z}\right]_{z=1} \frac{(1-e^{-aT})}{(1-e^{-aT})} = 1$$

$$c_2 = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-1)^2\frac{F(z)}{z}\right]_{z=1} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1-e^{-aT})(z-e^{-aT})^{-1}\right]_{z=1} = -(1-e^{-aT})^{-1}$$

$$c_3 = \left[(z-e^{-aT})\frac{F(z)}{z}\right]_{z=e^{-aT}} = \frac{(1-e^{-aT})}{(e^{-aT}-1)^2} = -(e^{-aT}-1)^{-1}$$

- Assim,

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-aT})^{-1}z}{(z-1)} - \frac{(e^{-aT}-1)^{-1}z}{(z-e^{-aT})}$$

- Portanto, a transformada inversa é dada por

$$f(k) = k\,\mu(k) - (1-e^{-aT})^{-1}\,\mu(k) - (e^{-aT}-1)^{-1}e^{-aTk}\mu(k)$$

Função de transferência

Conceitos básicos

- Considere a seguinte equação de diferenças:

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_n y(k) \\ = b_0 x(k+m) + b_1 x(k+m-1) + \cdots + b_m x(k)$$

- Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$, com condições iniciais nulas, obtém-se a função de transferência discreta

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

- Note que também é possível reescrever $H(z)$ como

$$H(z) = \frac{b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m+1)} + \cdots + b_m z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

- A função de transferência $H(z)$ pode ainda ser reescrita como

$$H(z) = K \frac{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_n)}$$

- Para que o sistema seja realizável, não antecipativo, é preciso que $n \geq m$.

Função de transferência

Polos e zeros no plano z

- Seja a seguinte função de transferência com $n \geq m$:

$$H(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

ou, equivalentemente,

$$H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)}$$

em que p_i e z_j são, respectivamente, os polos e os zeros de $H(z)$.

- Exemplo: Suponha que se deseje saber quais são os polos e zeros de

$$H(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2z^{-1})}$$

Aparentemente, essa função tem:

dois polos, $z_1 = -1$ e $z_2 = -2$, e um zero em $z_1 = -0.5$.

No entanto, existe um outro zero em $z = 0$, já que

$$H(z) = \frac{z(z + 0.5)}{(z + 1)(z + 2)}$$

Função de transferência

Estabilidade assintótica

- Considere a seguinte função de transferência

$$H(z) = K\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}, \qquad n > m$$

- Decompondo $H(z)$ em frações parciais, tem-se

$$H(z) = \frac{c_1 z}{z-p_1} + \cdots + \frac{c_\ell z}{(z-p_1)^\ell} + \frac{c_{\ell+1} z}{z-p_{\ell+1}} + \cdots + \frac{c_n z}{z-p_n}$$

- Aplicando a inversa da transformada $\mathcal{Z}$, obtém-se

$$h(k) = c_1 p_1^k + \cdots + \frac{c_\ell}{(\ell-1)!}\prod_{i=0}^{\ell-2}(k-i)p_1^{k-\ell+1} + c_{\ell+1}p_{\ell+1}^k + \cdots + c_n p_n^k$$

- Para que $\lim_{k\to\infty} h(k)$ convirja a zero, é necessário que

$$|p_i| < 1$$

- Assim, conclui-se que todos os polos de $H(z)$ devem pertencer ao interior do círculo unitário.

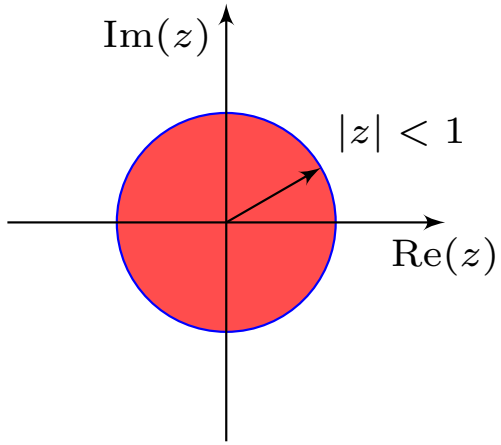


Diagrama de blocos

Representação de funções de transferência: caso discreto

- O caso discreto é análogo ao contínuo.

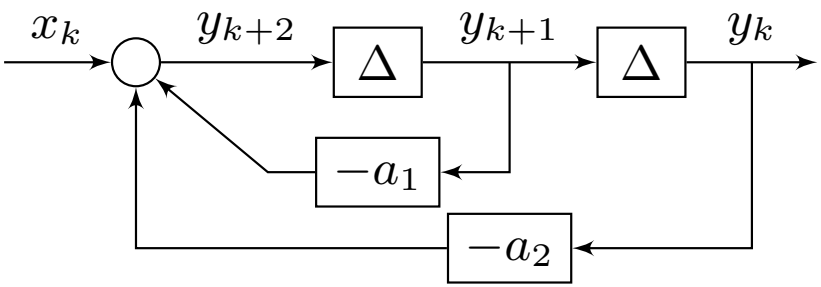
- Considere a equação de diferenças de segunda ordem dada por

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) = x(k)$$

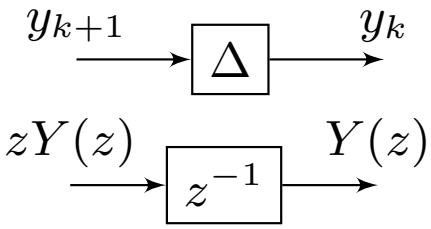
que pode ser escrita de forma equivalente como

$$y(k+2) = x(k) - a_1 y(k+1) - a_2 y(k)$$

- Sua representação por diagrama de blocos é dada por



Bloco Atraso



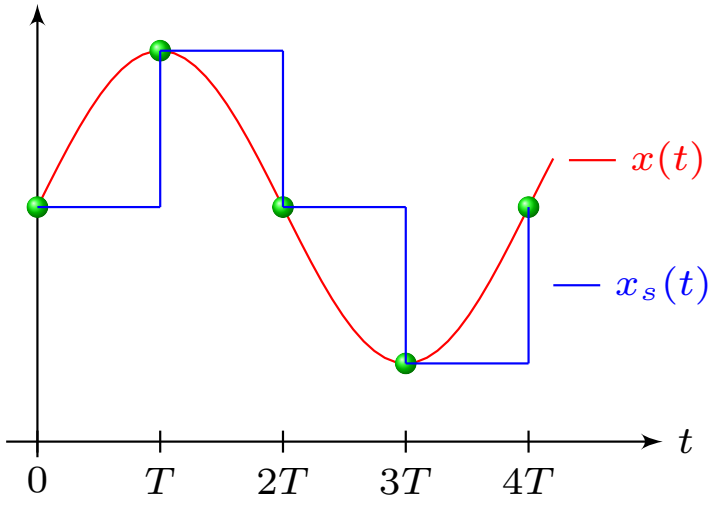
- Note que esse sistema corresponde à função de transferência

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

Função de transferência

Segurador de ordem zero (SOZ)

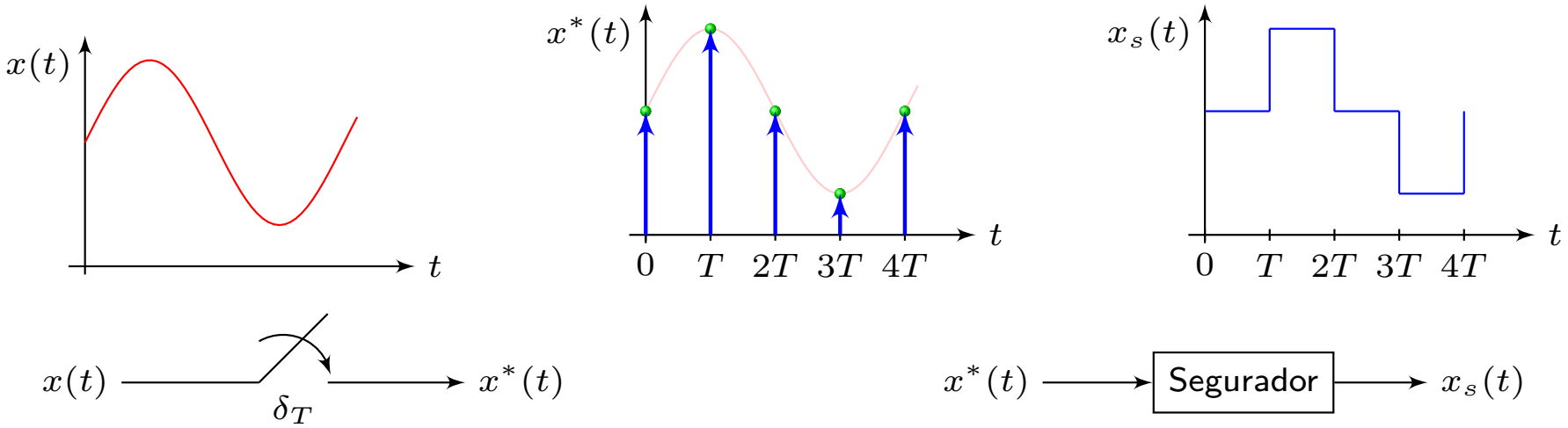
- Um dispositivo conhecido como segurador de ordem zero (SOZ) é frequentemente utilizado na entrada de conversores A/D e na saída dos conversores D/A.
- O SOZ executa basicamente duas operações: amostrar e segurar.
- A amostragem $x(kT)$ recebida em $t = kT$ é mantida constante até o instante $t = (k+1)T$.
- Um exemplo dessa operação é apresentado abaixo, em que $x_s(t)$ é a saída do SOZ para uma entrada senoidal $x(t)$ amostrada a cada instante T de tempo.



Função de transferência

Segurador de ordem zero (SOZ)

- Uma idealização matemática desse processo está apresentada nas figuras abaixo.
- O sinal $x(t)$ é primeiramente amostrado, usando-se um amostrador ideal δ_T, de período T, e em seguida é mantido constante pelo segurador de ordem zero, fornecendo o sinal $x_s(t)$.



- O modulador ideal δ_T pode ser representado por um trem de impulsos

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

- O sinal amostrado $x^*(t)$ é dado por $x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT)$

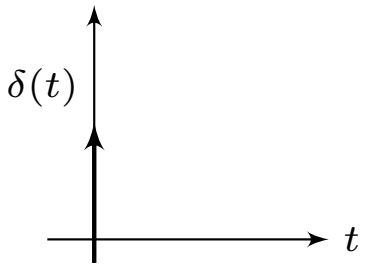
Função de transferência

Segurador de ordem zero (SOZ)

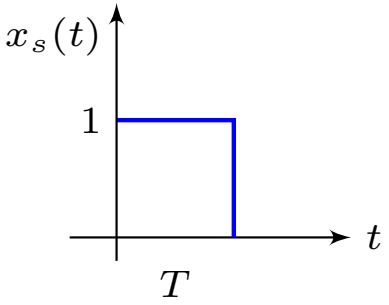
- Pela característica do segurador, o sinal segurado $x_s(t)$ é dado por

$$x_s(t) = x(kT), \qquad kT \leq t < (k+1)T$$

- Assim, percebe-se que para uma entrada impulso unitário



a saída é



- Portanto, a resposta ao impulso unitário do SOZ é

$$h(t) = \mu(t) - \mu(t-T)$$

- A respectiva função de transferência será

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

Função de transferência

Segurador de ordem zero (SOZ)

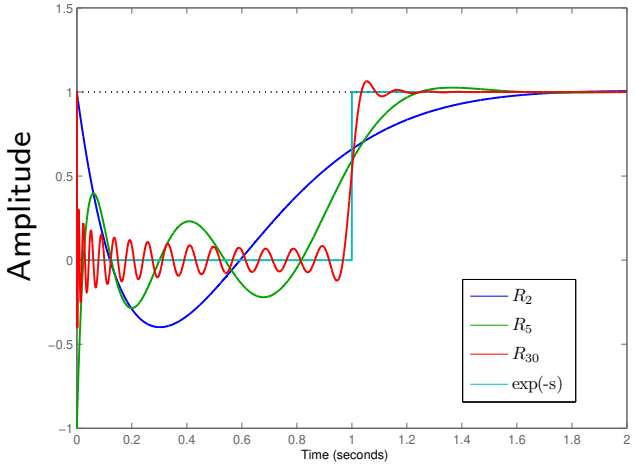
- É interessante observar que a função de transferência do exemplo acima não é racional, devido ao termo e^{-sT}, que representa um atraso (*delay*) puro.
- Uma aproximação racional que é frequentemente utilizada para a função e^{-sT} é obtida pela fórmula de Padé de ordem N dada por

$$e^{-Ts} \approx \frac{R_N(-Ts)}{R_N(Ts)}$$

com

$$R_N(x) = \sum_{k=0}^{N} x^k \frac{(2N-k)!N!}{(2N)!k!(N-k)!}$$

- Resposta ao degrau de e^{-sT} para as aproximações R_2, R_5 e R_{30}, com $T = 1$.



- A tabela abaixo apresenta a aproximação de e^{-sT} para alguns valores de N.

N	Aproximação para e^{-Ts}
1	$\dfrac{2 - sT}{2 + sT}$
2	$\dfrac{12 - 6sT + (sT)^2}{12 + 6sT + (sT)^2}$
3	$\dfrac{120 - 60sT + 12(sT)^2 - (sT)^3}{120 + 60sT + 12(sT)^2 + (sT)^3}$
4	$\dfrac{1680 - 840sT + 180(sT)^2 - 20(sT)^3 + (sT)^4}{1680 + 840sT + 180(sT)^2 + 20(sT)^3 + (sT)^4}$
5	$\dfrac{30240 - 15120sT + 3360(sT)^2 - 420(sT)^3 + 30(sT)^4 - (sT)^5}{30240 + 15120sT + 3360(sT)^2 + 420(sT)^3 + 30(sT)^4 + (sT)^5}$

Função de transferência

Equivalente discreto: impulso invariante

- Equivalente discreto $H(z)$ usando o método do impulso invariante:

$$H(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(k) = Th(t)\Big|_{t=kT} \xrightarrow{\mathcal{Z}} H(z)$$

- Exemplo: Considere a função de transferência

$$H(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

- Perceba que $H(s)$ tem a seguinte decomposição:

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

- Aplicando a transformada de Laplace inversa, tem-se

$$h(t) = 1 - e^{-at}, \quad t \geq 0$$

- Aplicando agora a transformada $\mathcal{Z}$ no sinal $Th(kT)$, tem-se

$$H(z) = \mathcal{Z}[H(s)] = \mathcal{Z}\left[Th(kT)\right] = \mathcal{Z}\left[T\left(1 - e^{-akT}\right)\right]$$

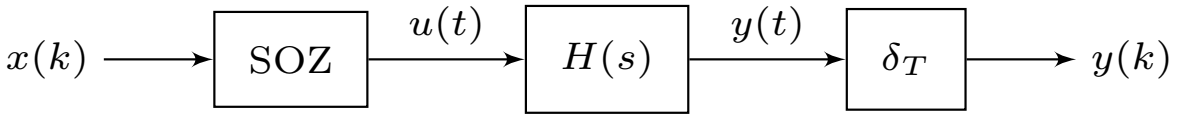
abuso notação

$$= \frac{T}{1 - z^{-1}} - \frac{T}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{zT(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$$

Função de transferência

Equivalente discreto usando o SOZ

- Equivalente discreto usando o método do segurador de ordem zero (SOZ).
- É preciso determinar a função de transferência discreta $H(z)$, entre a entrada amostrada $x(k)$ e a saída $y(k)$ do sistema abaixo.



- Note que a função de transferência do SOZ foi determinada como sendo

$$\mathrm{SOZ}(s) = (1 - e^{-Ts})/s$$

- A função de transferência entre a saída $y(t)$ e a entrada impulsiva no SOZ será

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} H(s)$$

- A função de transferência desejada $H(z)$ nada mais é que

$$H(z) = \mathcal{Z}[y(kT)] = \mathcal{Z}[y(t)|_{t=kT}] = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]_{t=kT}]$$

- Note que

$$\mathcal{Z}[Y(s)] = \mathcal{Z}\left[(1 - e^{-Ts})\frac{H(s)}{s}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right] - \mathcal{Z}\left[e^{-Ts}\frac{H(s)}{s}\right]$$

Função de transferência

Equivalente discreto usando o SOZ

- Como o termo e^{-Ts} representa um puro atraso (*delay*) de um período T, tem-se

$$\mathcal{Z}[e^{-Ts}H(s)/s] = z^{-1}\mathcal{Z}[H(s)/s]$$

- Obtendo assim o equivalente discreto

$$H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right] = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right]$$

- Exemplo: Considerando a planta $H(s) = \dfrac{a}{s+a}$, tem-se: $\dfrac{H(s)}{s} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+a}$
- Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}[H(s)/s] = 1 - e^{-at}, \quad t \geq 0$$

- Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ nesse sinal, com $t = kT$, tem-se

$$\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right] := \mathcal{Z}\left[1 - e^{-akT}\right] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} = \frac{z}{(z-1)}\frac{(1-e^{-aT})}{(z-e^{-aT})}$$

- Portanto, a função de transferência desejada $H(z)$ fica sendo

$$H(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right] = \frac{1-e^{-aT}}{z-e^{-aT}}$$

Sistemas amostrados

Conceitos básicos

- Foi visto que a representação matemática do sinal amostrado $x^*(t)$ é dado por

$$x^*(t) = x(t)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\right) \quad \text{ou} \quad x^*(t) = x(t)\left(\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{j}k2\pi t/T}\right)$$

em que a última expressão é a série de Fourier do trem de impulsos.

- A transformada de Laplace do sinal amostrado $x^*(t)$ fornece

$$X^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)e^{-skT} \qquad \longleftrightarrow \qquad X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

- Percebe-se que $X^*(s) = X(z)$ (bilateral) em que

$$e^{sT} = z \qquad \text{ou} \qquad Ts = \ln z \pmod{\mathrm{j}2\pi/T}$$

- Note que $X^*(s)$, Laplace de $x^*(t)$, está relacionada com $X(s)$, Laplace de $x(t)$, por

$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s-\mathrm{j}k\omega_s), \qquad \omega_s = 2\pi/T$$

em que ω_s é a frequência de amostragem.

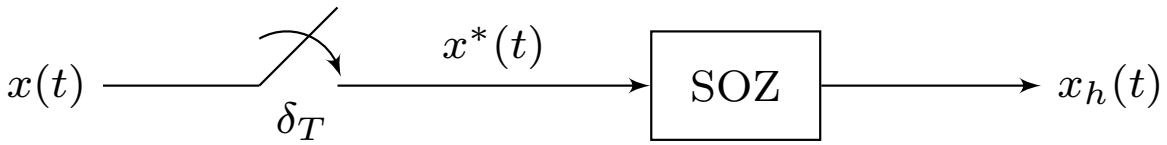
Sistemas amostrados

Conceitos básicos

- O processo que representa a saída do segurador

$$x_h(t) = x(kT), \qquad kT \leq t < (k+1)T,$$

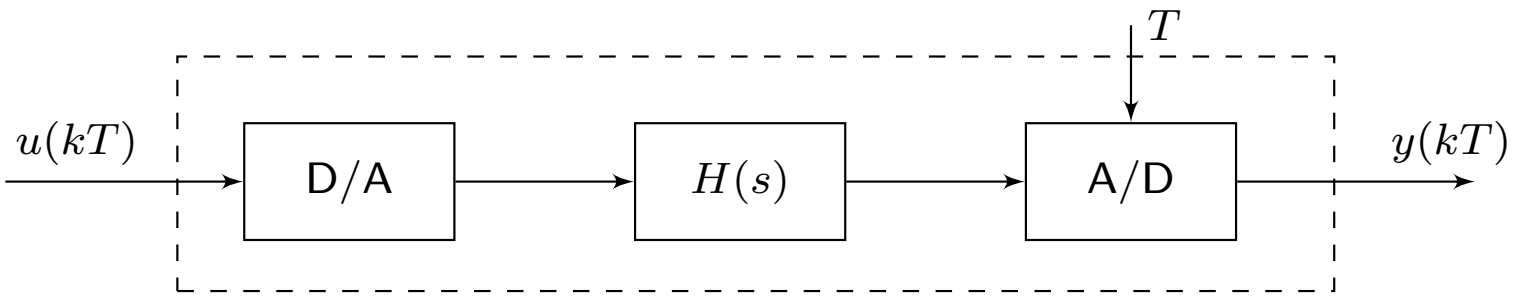
está apresentado no diagrama abaixo.



- Foi visto que a função de transferência (idealizada) do SOZ é dada por

$$\mathrm{SOZ}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

- Assim, o equivalente discreto $H(z)$ usando o processo descrito abaixo



é dado por

$$H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right]$$

Efeitos do segurador de ordem zero

- Foi visto que o SOZ possui a seguinte função de transferência

$$\mathrm{SOZ}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

- Portanto, sua função de resposta em frequência (FRF) é dada por

$$\begin{aligned}\mathrm{SOZ}(\mathrm{j}\omega) &= \frac{1 - e^{-\mathrm{j}\omega T}}{\mathrm{j}\omega} = e^{-\mathrm{j}\omega T/2}\frac{e^{\mathrm{j}\omega T/2} - e^{-\mathrm{j}\omega T/2}}{2\mathrm{j}}\frac{2\mathrm{j}}{\mathrm{j}\omega} \\ &= Te^{-\mathrm{j}\omega T/2}\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = T\,\mathrm{sinc}(\omega T/2)e^{-\mathrm{j}\omega T/2}\end{aligned}$$

- Assim, a magnitude é dada por

$$|\mathrm{SOZ}(\mathrm{j}\omega)| = T\,|\mathrm{sinc}(\omega T/2)|$$

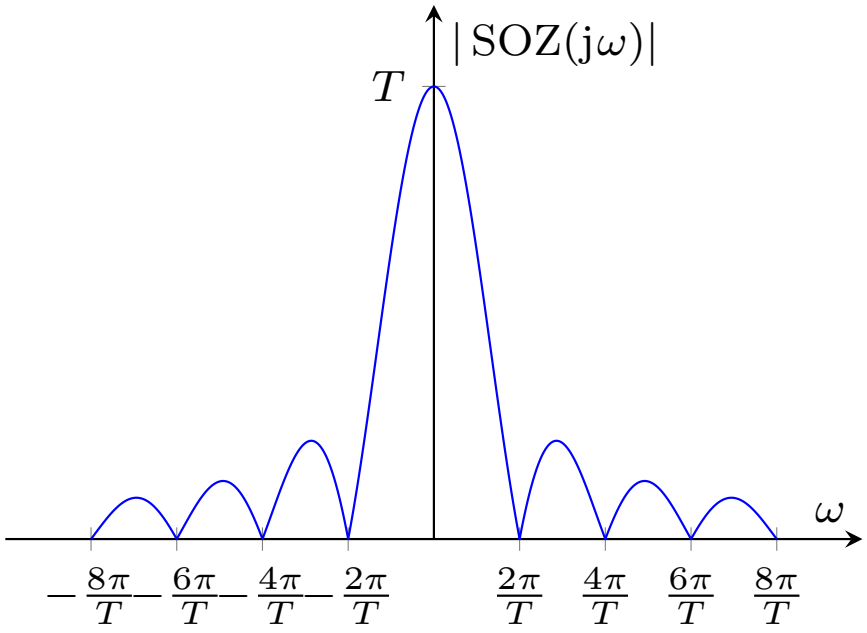
  e a fase por

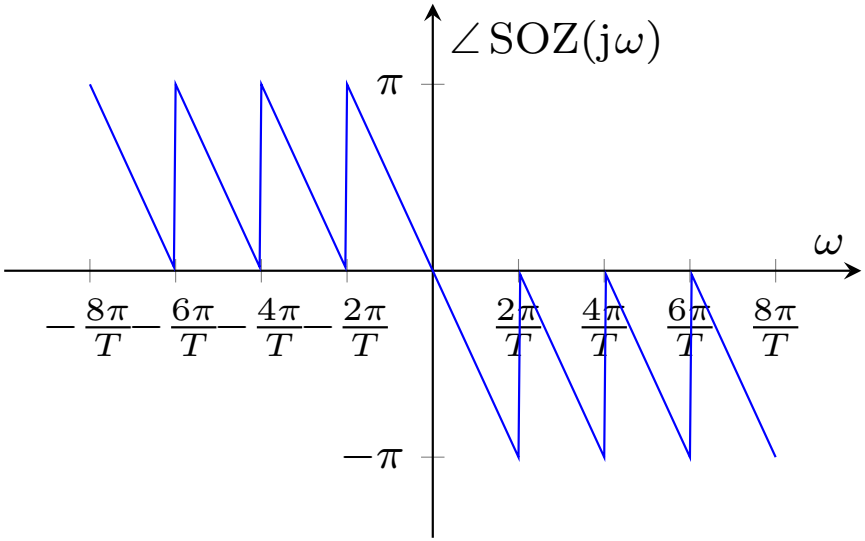
$$\angle\,\mathrm{SOZ}(\mathrm{j}\omega) = -\omega T/2$$

  que representa saltos de 180°, ou seja, π radianos, no ponto em que a função seno muda de sinal, ou seja, em $2\pi\ell/T$, com $\ell = 1, 2, \ldots$.

Efeitos do segurador de ordem zero

- A figura abaixo apresenta $|\mathrm{SOZ}(\mathrm{j}\omega)|$ e $\angle\mathrm{SOZ}(\mathrm{j}\omega)$.

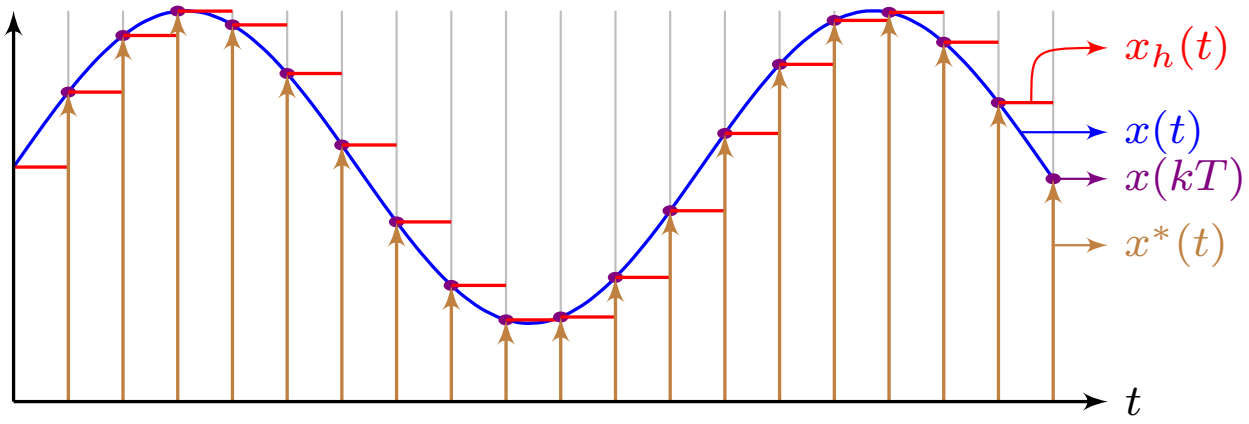




- Observe que o SOZ produz os seguintes efeitos:
  1. Introduz uma defasagem de $\omega T/2$, correspondente a um atraso de $T/2$ segundos;
  2. Multiplica o ganho por uma função de amplitude $T\,\mathrm{sinc}(\omega T/2)$.

Efeitos do segurador de ordem zero

- Para uma entrada senoidal, a saída $x_h(t)$ é claramente não senoidal.



- Portanto, não é possível representar o processo de amostragem e retenção por uma função de transferência;
- A saída do processo (periódica) pode ser decomposta em sinais senoidais de frequências ω_o (fundamental) e suas harmônicas $2\omega_o$, $3\omega_o, \ldots$
- Se a planta tiver característica passa-baixa, então as componentes harmônicas do sinal $x_h(t)$ em $2\omega_o$, $3\omega_o, \ldots$ serão atenuadas.
- Notando que apenas a primeira frequência é relevante, o efeito líquido do processo de amostragem e retenção é atrasar o sinal de entrada de $T/2$ segundos.
- Com cautela, esse efeito pode ser aproximado por uma função de transferência contínua correspondente a um atraso puro de $T/2$ segundos.

Equivalente discreto

Método I: integração numérica

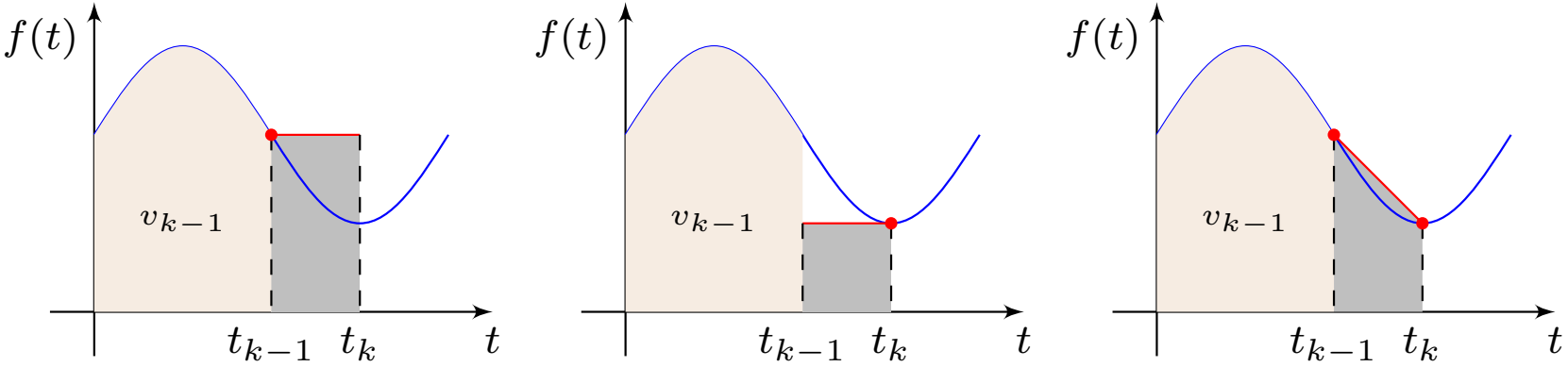
- Objetivo: Determinar $H(z)$ discreta, a partir de um $H(s)$ contínua, fornecendo aproximadamente as mesmas características.

- Modelo de integração: Suponha que se deseje aproximar a integral de um sinal

$$v(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

a partir de amostras de $f(t)$, ou seja, $f(t_0)$, $f(t_1)$, $\ldots$, $f(t_k)$.

- Pode-se escolher diferentes aproximações para $v(t)$, que dependerá da forma como a área sob a curva $f(t)$ é selecionada.



Equivalente discreto

Método I: integração numérica

- A aproximação da integral $v(t)$ depende de como a área sob $f(t)$ é aproximada.
- Assume-se que o intervalo $T = t_k - t_{k-1}$ é constante.
- Seja $v(k-1)$ a aproximação da integral no intervalo de 0 até t_{k-1}.
- Pode-se calcular a área $v(k)$ através de uma das três formas abaixo:

1. Aproximação retangular (Euler) direta:
$$v(k) = v(k-1) + Tf(k-1)$$
2. Aproximação retangular (Euler) reversa:
$$v(k) = v(k-1) + Tf(k)$$
3. Aproximação trapezoidal (bilinear de Tustin):
$$v(k) = v(k-1) + \frac{T}{2}\left(f(k) + f(k-1)\right)$$

Equivalente discreto

Método I: integração numérica

- Para exemplificar o método, considere a seguinte função de transferência contínua

$$H(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{a}{s+a}$$

e a respectiva equação diferencial

$$\dot{u}(t) = -au(t) + ae(t), \qquad u(0) = 0$$

- Nesse caso,

$$u(t) = \int_0^t [-au(\tau) + ae(\tau)]\,\mathrm{d}\tau$$

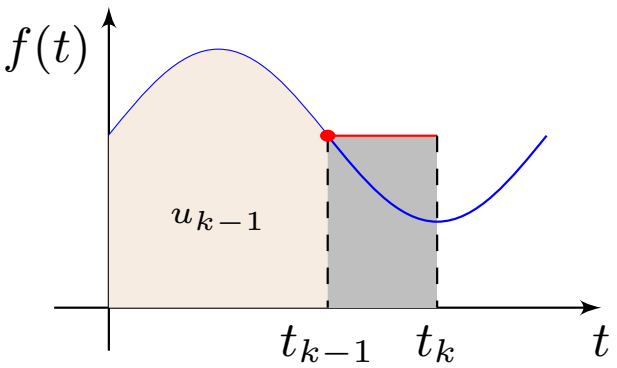
- Fazendo $t = kT$, tem-se

$$\begin{aligned} u(kT) &= \int_0^{kT} [-au(\tau) + ae(\tau)]\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^{kT-T} [-au(\tau) + ae(\tau)]\,\mathrm{d}\tau + \int_{kT-T}^{kT} [-au(\tau) + ae(\tau)]\,\mathrm{d}\tau \\ &= u(kT-T) + \int_{kT-T}^{kT} [-au(\tau) + ae(\tau)]\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

- Note que o valor de $u(kT)$ depende de como a área sob a curva $-au(t) + ae(t)$, no intervalo $(k-1)T \leq \tau \leq kT$, é aproximada.

Equivalente discreto

Aproximação retangular direta



- Usando a aproximação retangular (Euler) direta:

$$u(k) = u(k-1) + Tf(k-1)$$

com $f(t) = -au(t) + ae(t)$

- A área é aproximada pela área do retângulo de lados

$$-au(kT-T) + ae(kT-T) \qquad \text{e} \qquad T$$

fornecendo

$$\begin{aligned} u(kT) &= u(kT-T) + T\left[-au(kT-T) + ae(kT-T)\right] \\ &= (1-aT)u(kT-T) + aTe(kT-T) \end{aligned}$$

- Nesse caso, a função de transferência discreta $H_F(z)$ fica sendo

$$H_F(z) = \frac{aTz^{-1}}{1-(1-aT)z^{-1}} = \frac{aT}{z-(1-aT)} = \frac{a}{\frac{z-1}{T}+a}$$

- Perceba a seguinte equivalência:

$$H_F(z) = H(s), \qquad \text{para} \quad s = \frac{z-1}{T} \quad \text{ou} \quad z = 1 + Ts$$

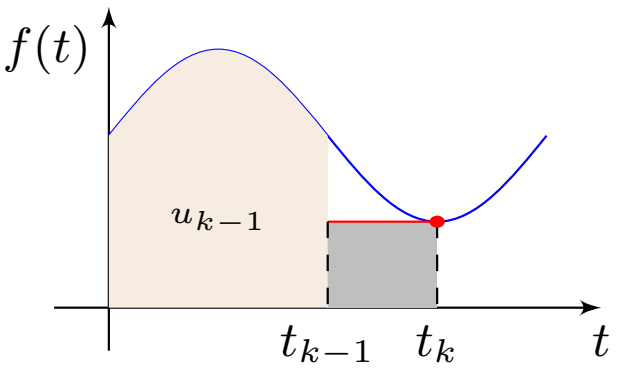
Equivalente discreto

Aproximação retangular reversa

- Usando a aproximação retangular (Euler) reversa:

$$u(k) = u(k-1) + Tf(k)$$

com $f(t) = -au(t) + ae(t)$



- A área é aproximada pela área do retângulo de lados

$$-au(kT) + ae(kT) \qquad \text{e} \qquad T$$

fornecendo

$$\begin{aligned} u(kT) &= u(kT-T) + T\left[-au(kT) + ae(kT)\right] \\ &= \frac{u(kT-T)}{1+aT} + \frac{Ta}{1+aT}e(kT) \end{aligned}$$

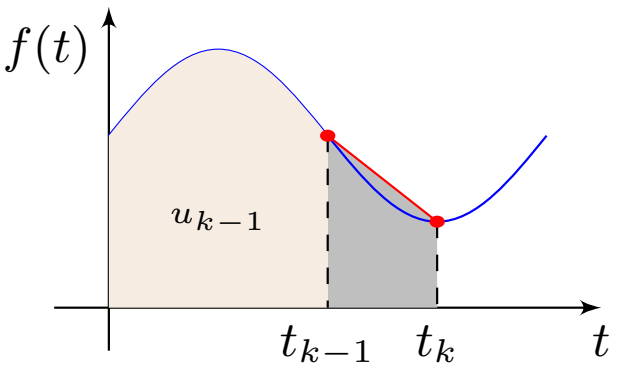
- Nesse caso, a função de transferência discreta $H_B(z)$ fica sendo

$$H_B(z) = \frac{\frac{aT}{1+aT}}{1 - \frac{z-1}{1+aT}} = \frac{aTz}{(1+aT)z - 1} = \frac{a}{\frac{z-1}{Tz} + a}$$

- Perceba a equivalência: $H_B(z) = H(s)$, para $s = \frac{z-1}{Tz}$ ou $z = \frac{1}{1-Ts}$

Equivalente discreto

Aproximação trapezoidal



- Usando a aproximação trapezoidal (Tustin):

$$u(k) = u(k-1) + Tf(k)$$

com $f(t) = -au(t) + ae(t)$

- A área é aproximada pela área do trapézio de lados

$$-au(kT-T) + ae(kT-T), \quad -au(kT) + ae(kT) \quad \text{e} \quad T$$

fornecendo

$$\begin{aligned} u(kT) &= u(kT-T) + \frac{T}{2}\left[-au(kT-T) + ae(kT-T) - au(kT) + ae(kT)\right] \\ &= \frac{(1-aT/2)u(kT-T)}{1+aT/2} + \frac{Ta/2}{1+aT/2}\left[e(kT-T) + e(kT)\right] \end{aligned}$$

- Nesse caso, a função de transferência fica sendo

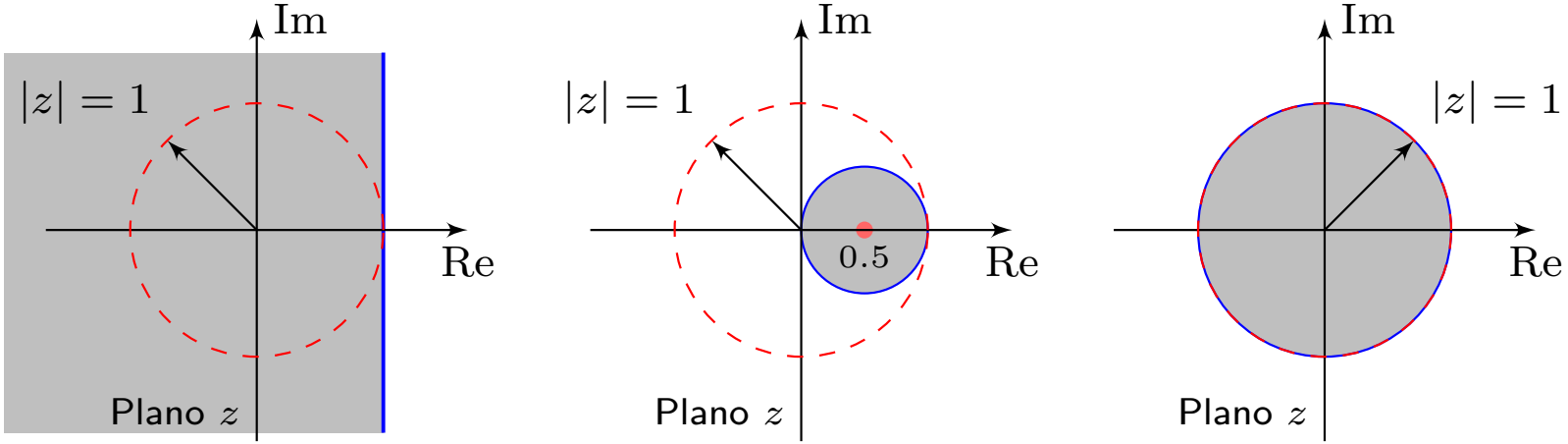
$$H_T(z) = \frac{aT(z+1)}{(2+aT)z + aT - 2} = \frac{a}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} + a}$$

- Perceba a equivalência: $H_T(z) = H(s)$, para $s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$ ou $z = \frac{2+Ts}{2-Ts}$

Equivalente discreto

Análise de estabilidade

- As aproximações podem ser vistas como mapeamentos do plano s no plano z:
  - Retangular direta: $z = 1 + Ts$
  - Retangular reversa: $z = \dfrac{1}{1 - Ts}$
  - Trapezoidal (Tustin): $z = \dfrac{1 + Ts/2}{1 - Ts/2}$
- As funções de transferência $H(z)$ são obtidas de $H(s)$ usando as relações acima.
- Mapeamento do plano s estável $(\mathrm{Re}\{s\} < 0)$ no plano z.



(a) Retangular direta. (b) Retangular reversa. (c) Trapezoidal.

Equivalente discreto

Análise de estabilidade

- É importante verificar se o equivalente discreto $H(z)$ preserva as mesmas propriedades de estabilidade da correspondente planta contínua $H(s)$.
- Analisando cada um dos mapeamentos, observa-se que:
  - na aproximação retangular (Euler) direta, funções $H(s)$ estáveis podem ser mapeadas em funções $H(z)$ instáveis;
  - na aproximação retangular (Euler) reversa, funções $H(s)$ estáveis são mapeadas em funções $H(z)$ estáveis; porém funções $H(s)$ instáveis podem ser mapeadas em funções $H(z)$ estáveis.
  - na aproximação Trapezoidal (Tustin), funções $H(s)$ estáveis (resp. instáveis) são mapeadas em funções $H(z)$ estáveis (resp. instáveis).
- Exercício: Para verificar o mapeamento dado pela aproximação reversa, note que

$$z = \frac{1}{1-Ts} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1-Ts} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1+Ts}{1-Ts}$$

que, em $s = j\omega$, fornece a equação de um circulo de raio 0.5 centrado em 0.5:

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

- Exercício: Verifique o mapeamento para as aproximações Euler direta e Tustin.

Equivalente discreto

Análise de estabilidade

- Exemplo: Verifique a estabilidade de $H(z)$ usando as transformações Euler direta, Euler reversa e Tustin para a seguinte planta

$$H(s) = \frac{a}{s+a}, \qquad a > 0 \quad \leftarrow \quad \text{estável}$$

- A aproximação de Euler direta fornece:

$$H_F(z) = H(s)|_{s=(z-1)/T} = \frac{A}{(z-1)/T + a} = \frac{Ta}{z - 1 + aT}$$

cujo polo está em $z = 1 - Ta$. Assim, se $T > 2/a$, a planta $H_F(z)$ será instável.

- A aproximação de Euler reversa fornece:

$$H_B(z) = H(s)|_{s=(z-1)/(Tz)} = \frac{a}{(z-1)/(Tz) + a} = \frac{aTz}{z - 1 + aTz}$$

cujo polo está localizado em $z = 1/(1 + Ta)$, que é sempre estável para $a > 0$.

- A aproximação de Tustin fornece:

$$H_T(z) = H(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{a}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} + a} = \frac{aT(z+1)}{2(z-1) + aT(z+1)}$$

cujo polo $z = (2 - Ta)/(2 + Ta)$, que é sempre estável para $a > 0$.

Equivalente discreto

Método II: mapeamento de polos e zeros

- Os polos, os zeros e o ganho de $H(s)$ são tratados de forma independentes.

- Os polos de $H(s)$ são mapeados através da relação $z = e^{sT}$. Assim:
  - se $s = -a$, então $H(z)$ terá um polo em $z = e^{-aT}$;
  - se $s = -a + jb$, então $H(z)$ terá um polo em $z = re^{j\theta}$ com $r = e^{-aT}$ e $\theta = bT$.

- Para o caso do zero, aplica-se a seguinte regra:
  - Zeros finitos: os zeros finitos de $H(s)$ são mapeados em zeros de $H(z)$ através da relação $z = e^{sT}$. Aplicam-se as mesmas regras utilizadas para os polos.
  - Zeros no infinito: Os zeros de $H(s)$ em $s = \infty$ são mapeados em zeros de $H(z)$ no ponto $z = -1$.

- O ganho de $H(z)$ deve ser ajustado para ter o mesmo ganho que o de $H(s)$ numa frequência específica de interesse, geralmente em $s = 0$, como segue:

$$H(z)\Big|_{z=1} = H(s)\Big|_{s=0}$$

Equivalente discreto

Método II: mapeamento de polos e zeros

- Exemplo: Considere o sistema de primeira ordem dado abaixo

$$H(s) = \frac{a}{s+a}$$

- O polo em $s = -a$ fornece um polo em $z = e^{-aT}$.
- O zero em $s = \infty$ fornece um zero em $z = -1$.
- Assim, com os polos e zeros calculados, tem-se até o momento:

$$H(z) = K\frac{z+1}{z-e^{-aT}}$$

- Para ajustar o ganho de $H(z)$, prossegui-se como segue

$$H(z)\Big|_{z=1} = H(s)\Big|_{s=0} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad K\frac{z+1}{z-e^{-aT}}\Big|_{z=1} = \frac{2K}{1-e^{-aT}} = 1$$

fornecendo

$$K = (1-e^{-aT})/2$$

- Portanto, a função de transferência discreta $H(z)$ fica sendo

$$H(z) = \frac{1-e^{-aT}}{2}\frac{z+1}{z-e^{-aT}}$$

Equivalente discreto

Método II: mapeamento de polos e zeros

- Observação: A transformada inversa de

$$H(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

fornece

$$u(kT) = e^{-aT} u(kT - T) + \frac{1 - e^{-aT}}{2} [e(kT) - e(kT - T)]$$

- Note que o valor de $u(kT)$ depende de $e(kT)$.

- Portanto, se o computador não for capaz de calcular $u(kT)$ numa fração do período de amostragem, a ação de controle ficará prejudicada.

- PZ modificado: Mapeando o zero em $s = \infty$ no zero em $z = \infty$, obtém-se

$$H(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}}$$

cuja equação a diferenças é dada por

$$u(kT) = e^{-aT} u(kT - T) + (1 - e^{-aT}) e(kT - T)$$

- Agora, $u(kT)$ depende apenas de valores passados de $e(k)$.

Equivalente discreto

Método III: impulso invariante

- Nesse método, deseja-se que $h(k)$ seja equivalente a $h(t)$ para $t = kT$.

- Portanto

$$H(z) = \mathcal{Z}[h(k)] = \mathcal{Z}\left[Th(t)\Big|_{t=kT}\right] = T\mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right]\Big|_{t=kT}\right]$$

- Exemplo: Considere a mesma planta do exemplo anterior, dada por

$$H(s) = \frac{a}{s+a}$$

tem-se que

$$h(t) = T\mathcal{L}^{-1}[H(s)] = Tae^{-at}\mu(t)$$

Assim

$$h(k) = Tae^{-akT}\mu(k)$$

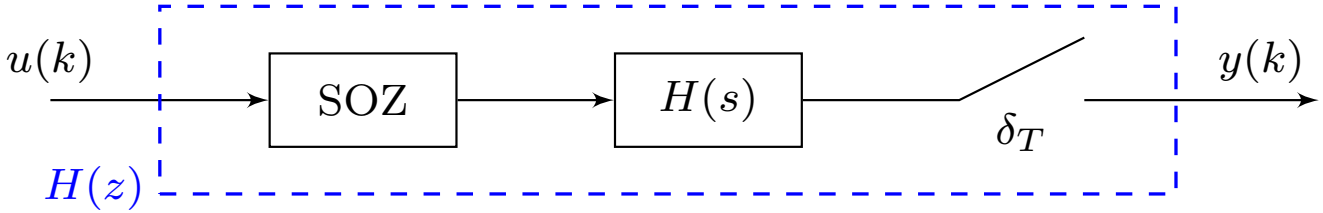
Fornecendo

$$H(z) = T\mathcal{Z}\left[ae^{-aTk}1(k)\right] = \frac{aTz}{z - e^{-aT}}$$

Equivalente discreto

Método IV: segurador de ordem zero

- Considere o esquema abaixo.



- Foi visto que o equivalente discreto $H(z)$ usando o SOZ é dado por

$$H(z) = \frac{(z-1)}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right]$$

- Esse equivalente causa um atraso de $T/2$;

- O segurador de primeira ordem (FOH), também conhecido como aproximação triangular, usa a seguinte interpolação linear entre as amostra:

$$u(t) = u_k + \frac{t-kT}{T}\left(u_{k+1} - u_k\right), \qquad kT \leq t \leq (k+1)T$$

- Embora o sistema contínuo seja não causal, o equivalente discreto é causal:

$$H(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz}\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s^2}\right]$$

Equivalente discreto

Resumo

- Exemplo: Considere a planta dada por

$$H(s) = \frac{a}{s+a}$$

- Euler direto:

$$H(z) = \frac{aT}{z-1+aT}$$

- Euler reverso:

$$H(z) = \frac{aTz}{(1+aT)z-1}$$

- Tustin - **c2d(sys,T,'tustin')**:

$$H(z) = \frac{aT(z+1)}{(2+aT)z+aT-2}$$

- Mapeamento de polos e zeros (PZ):

$$H(z) = \frac{(z+1)(1-e^{-aT})}{2(z-e^{-aT})}$$

Equivalente discreto

Resumo

- Mapeamento PZ modificado - **c2d(sys,T,'matched')**:

$$H(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}}$$

- Impulso invariante - **c2d(sys,T,'imp')**:

$$H(z) = \frac{aTz}{z - e^{-aT}}$$

- Segurador de ordem zero - **c2d(sys,T,'zoh')**:

$$H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s}\right]$$

Sabendo que

$$\mathcal{Z}\left[\frac{a}{s(s+a)}\right] = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$$

obtém-se

$$H(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}}$$

Equivalente discreto

Resumo

- Segurador de primeira ordem - **c2d(sys,T,'foh')**:

$$H(z) = \frac{(z-1)^2}{Tz}\mathcal{Z}\left[\frac{H(s)}{s^2}\right]$$

Sabendo que

$$\mathcal{Z}\left[\frac{a}{s^2(s+a)}\right] = \frac{z}{(z-1)^2}\frac{\left(aT-1+e^{-aT}\right)z+\left(1-e^{-aT}-aTe^{-aT}\right)}{a(z-e^{-aT})}$$

obtém-se finalmente

$$H(z) = \frac{(aT-1+e^{-aT})z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})}{aT(z-e^{-aT})}$$

- Exercício: Usando o SOZ, mostre que o equivalente discreto da planta

$$G(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

é dado por

$$G(z) = \frac{Az+B}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$$

com

$$A = e^{-aT}+aT-1 \qquad \text{e} \qquad B = 1-e^{-aT}-aTe^{-aT}$$

Projeto através de emulação

Ilustração do método

- Projeta-se um controlador contínuo $K(s)$ e, em seguida, obtém-se o controlador discreto $K(z)$ correspondente através de um método de discretização apropriado.

- Considere que a planta $P(s)$ seja dada por

$$P(s) = \frac{1}{s(10s+1)}$$

- Os polos de malha aberta são:

$$s = 0 \qquad \text{e} \qquad s = -0.1$$

- Suponha que se deseje obter polos de malha fechada, raízes de

$$s^2 + s + 1 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

tais que $\xi = 0.5$ e $\omega_n = 1$ rad/s.

- Essa localização de polos fornece:

$$M_p = 16.30\% \qquad \text{e} \qquad t_s = 10 \text{ [s]}$$

- Os passos necessários ao projeto são descritos a seguir.

Projeto através de emulação

Cálculo do compensador $K(s)$

- Calcular o compensador $K(s)$, usando qualquer método de projeto de compensador contínuo, por exemplo, usando o método do Lugar das Raízes.

- Suponha que o compensador projetado $K(s)$ seja

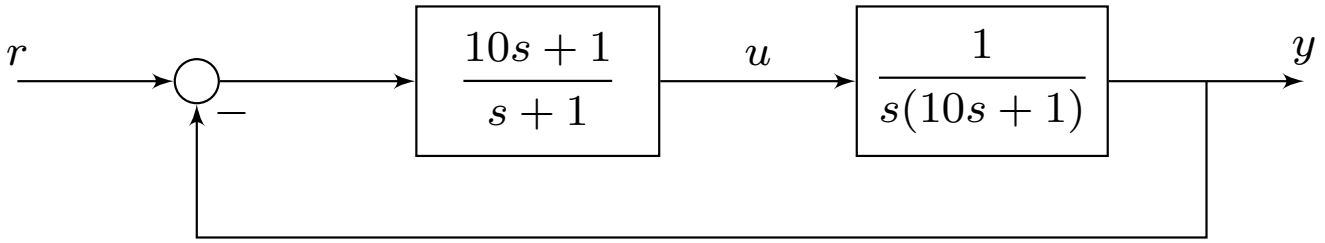
$$K(s) = \frac{10s+1}{s+1} = 10\frac{s+0.1}{s+1}$$

- O ramo direto $L(s)$ fica sendo

$$L(s) = K(s)P(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

- Como desejado, as raízes de $1 + K(s)P(s) = 0$ serão as raízes de $s^2 + s + 1 = 0$.

- O diagrama de controle contínuo está apresentado na figura abaixo.



Projeto através de emulação

Equivalente discreto $K(z)$

- Para a escolha de T, utiliza-se a regra

$$\omega_s = 2\pi/T \ggg \omega_B$$

em que $\omega_B \approx \omega_n$ é a largura de banda do sistema.

- Para o exemplo em questão, $\omega_B \approx \omega_n = 1$ e consequentemente:

$$\omega_s = 2\pi/T \ggg 1 \quad \Rightarrow \quad T \lll 2\pi$$

- Por exemplo, pode-se escolher, $T = 0.5$ [s].

- A forma geral de $K(z)$ obtida pelo método do mapeamento de polos e zeros é

$$K(z) = K\frac{z - z_1}{z - p_2}$$

- Usando a relação $z = e^{sT}$, mapeá-se:
  - o zero em $s = -0.1$ em $z_1 = e^{-0.1T} = 0.9512$
  - o polo em $s = -1$ em $p_2 = e^{-T} = 0.6065$

Projeto através de emulação

Equivalente discreto $K(z)$

- O ganho K é calculado de tal forma que

$$\lim_{z \to 1} K(z) = \lim_{s \to 0} K(s) = 1$$

- Ou seja

$$K \frac{1 - 0.9512}{1 - 0.6065} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad K = 8.0678$$

- O controlador discretizado fica sendo portanto:

$$K(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = 8.0678 \frac{z - 0.9512}{z - 0.6065} = 8.0678 \frac{1 - 0.9512 z^{-1}}{1 - 0.6065 z^{-1}}$$

- No domínio do tempo, tem-se

$$u(k) = 0.6065 u(k-1) + 8.0678 \left[e(k) - 0.9512 e(k-1) \right]$$

que seria a equação a diferenças a ser implementada no computador.

- Observe que $u(k)$ depende de $e(k)$ e, portanto, a instrução acima não é rigorosamente implementável. Porém, a instrução pode ser utilizada se o tempo de processamento de $u(k)$ for pequeno comparado a T.

Projeto através de emulação

Análise no plano z

- Como o controlador discreto é obtido por aproximação é necessário verificar se as especificações foram de fato atendidas.

- A função de transferência $P(z)$, usando o SOZ é dada por

$$P(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(10s+1)}\right]$$
$$= 0.012294\frac{z + 0.9835}{(z-1)(z-0.9512)}$$

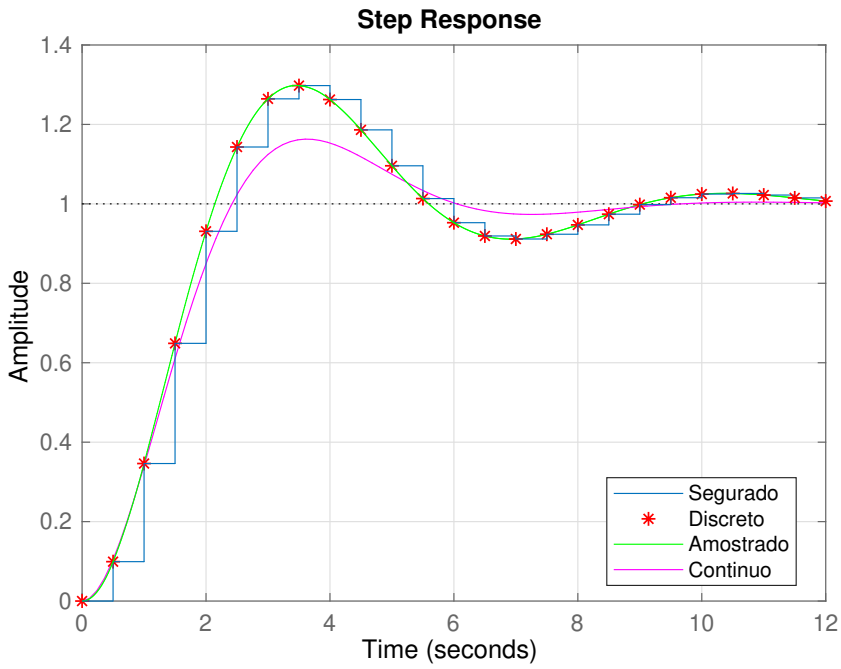
- A equação característica do sistema discreto em malha fechada é dada por

$$1 + K(z)P(z) = 0$$

$$1 + 0.099187\frac{(z + 0.9835)}{(z - 0.6065)(z-1)} = 0$$

- Cujas raízes são:

$$z_{1,2} = 0.754 \pm \mathrm{j}0.369 \quad \text{e} \quad z_3 = 0.951$$



Projeto através de emulação

Análise no plano z

- Os valores de ξ e ω_n podem ser calculados no plano s, através da relação

$$s = \frac{1}{T}\ln(z)$$

- Assim, $z_{1,2} = 0.75 \pm \mathrm{j}0.37$ implica $s_{1,2} = -0.35 \pm \mathrm{j}0.91$, que corresponde a $\xi = 0.36$ e $\omega_n = 0.97$ rad/s, aproximadamente.

- Essa localização de polos fornece $M_p = 29.75\%$ e $t_s = 11.38$s, contra $M_p = 16\%$ e $t_s = 10$s especificados originalmente.

- Se o período de amostragem fosse maior, por exemplo, $T = 1$ seg, então $M_p = 52\%$ e $t_s = 23.7$ seg.

- A perda de desempenho, vista nesse exemplo, está no fato de que, mesmo se $K(z)$ fornecer os mesmo valores amostrados que $K(s)$, a reconstrução de $u(t)$ pelo SOZ é apenas uma aproximação do valor contínuo $u(t)$ assumido no projeto.

- Nos melhores dos casos, $u(t)$ é gerado com um atraso de $T/2$ segundos. É importante salientar que atrasos levam, em geral, a sistemas menos estáveis.

Projeto através de emulação

Análise no plano z

- Considere $P(s)$ anterior e $D(z)$, com $T = 1$ seg, dados por

$$P(s) = \frac{1}{s(10s+1)} \qquad \text{e} \qquad K(z) = 15\frac{z-0.80}{z+0.95}$$

- Figura à esquerda, apresenta "hidden oscillations" ("intersample ripple").

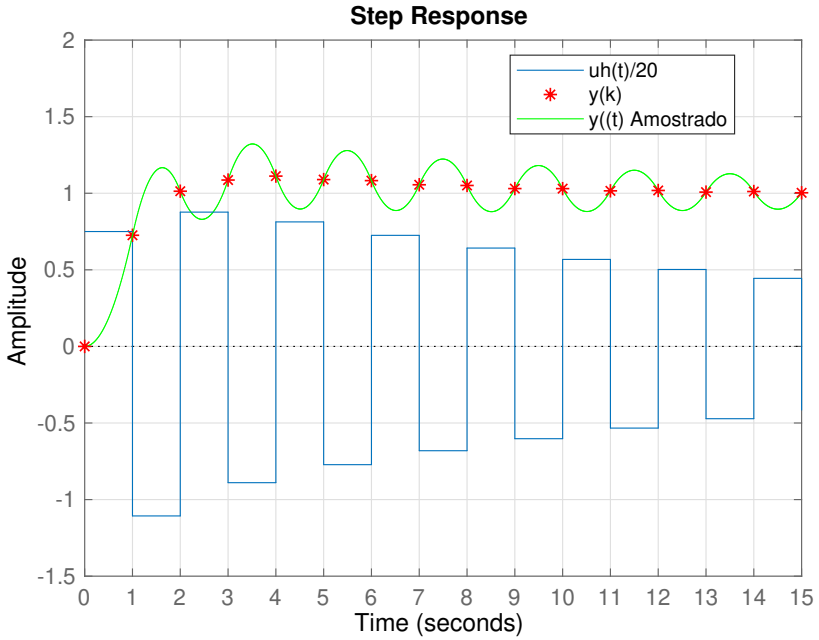


Figura: Efeito: "hidden oscillations".

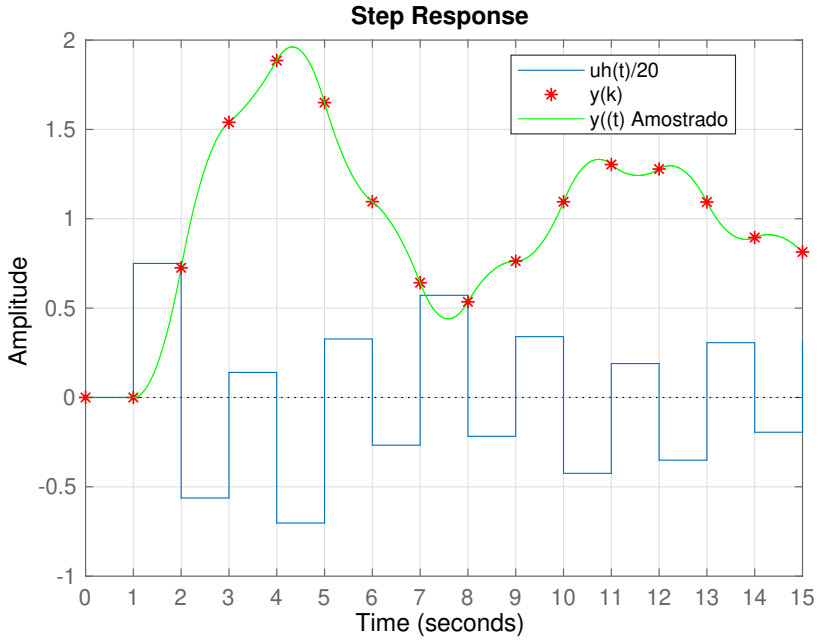


Figura: Efeito: adição do atraso z^{-1}.

- Figura à direita. Geralmente, $u(k)$ não está disponível instantaneamente e ocorre um delay de uma amosta, cujo efeito pode ser visualizado usando-se $\bar{K} = z^{-1}K(z)$.