EM707 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

Nota ao leitor

- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4ª edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
- Material suplementar:
  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8ª edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

Projeto de controladores no espaço de estado

Realimentação completa de estado

- Considere o sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0$$

- Deseja-se projetar a lei de controle $u(t)$ por realimentação completa de estado:

$$u(t) = -Kx(t)$$

de forma a estabilizar o sistema em malha fechada abaixo:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) = A_{cl}\, x(t)$$

- Exemplo: Seja a planta $G(s)$ e sua representação no espaço de estado:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

- Suponha que o polinômio característico desejado $\alpha_c(s)$ seja dado por

$$\alpha_c(s) = s^2 + 0.40s + 0.08 \qquad \text{que fornece} \qquad \zeta = \sqrt{2}/2 \quad \text{e} \quad \omega_n = \sqrt{2}/5$$

- Assim, os polos em malha fechada devem ser alocados em $|sI - A_{cl}| = \alpha_c$:

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right| = s^2 + K_1 s + K_2 = s^2 + 0.40s + 0.08$$

- Cuja solução claramente fornece $K_1 = 0.40$ e $K_2 = 0.08$.

Projeto de controladores no espaço de estado

Realimentação completa de estado: fórmula de Ackermann

- A fórmula de Ackermann é usada para alocar os polos de um sistema controlável.
- Suponha que o polinômio característico desejado em malha fechada seja

$$\alpha_c(s) = |sI - A + BK| = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n$$

- Então o ganho por realimentação completa de estado K é dado por

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \alpha_c(A)$$

- Exemplo: Deseja-se alocar em $\alpha_c = s^2 + 0.40s + 0.08$ os polos do sistema abaixo:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

- Calculando $\alpha_c(A)$ e $\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}^{-1}$, tem-se

$$\alpha_c(A) = A^2 + 0.40A + 0.08I = \begin{bmatrix} 0.08 & 0 \\ 0.40 & 0.08 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}^{-1} = I$$

- Assim, a formula de Ackermann fornece:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.08 & 0 \\ 0.40 & 0.08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.40 & 0.08 \end{bmatrix}$$

Projeto de controladores no espaço de estado

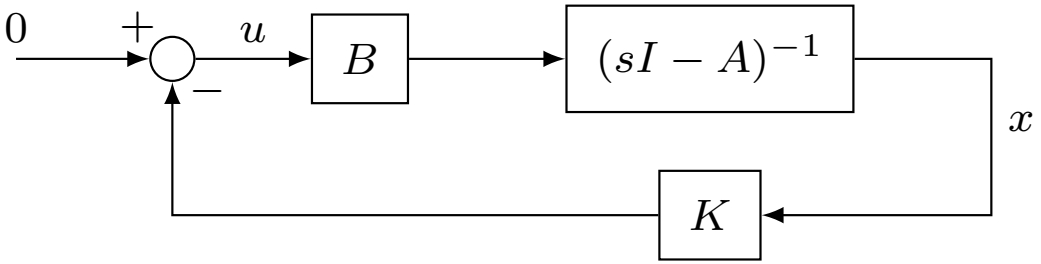
Realimentação completa de estado: fórmula de Ackermann

```
>> % A planta é dada por
>> A = [0 0; 1 0];  B = [1; 0];  C = [0 1];  D = 0;
>> % Suponha que seja desejado polos com zeta=sqrt(2)/2 e wn=sqrt(2)/5
>> zeta=sqrt(2)/2; wn=sqrt(2)/5;
>> s1 = -zeta*wn - j*wn*sqrt(1-zeta^2);
>> s2 = -zeta*wn + j*wn*sqrt(1-zeta^2);
>> % Assim, o polinômio característico desejado é
>> polydesejado=poly([s1 s2])
1.0000    0.4000    0.0800
>> % Para usar a formula de Ackermann, precisamos determinar
>> M = ctrb(A,B)
1     0
0     1
>> % Calculando o polinômio desejado em A:
>> pA  = A^2+0.4*A+0.08*eye(2)
>> % Equivalentemente
>> pA = polyvalm(polydesejado,A)
0.0800         0
0.4000    0.0800
>> % Aplicando a fórmula de Ackermann
>> K = [0 1]*(M\pA)
0.4000    0.0800
>> % Pode-se usar diretamente a fórmula de Ackermann
>> K = acker(A, B, [s1 s2])
0.4000    0.0800
>> % Pode-se também usar o comando place
>> K = place(A, B, [s1 s2])
0.4000    0.0800
```

Projeto de controladores no espaço de estado

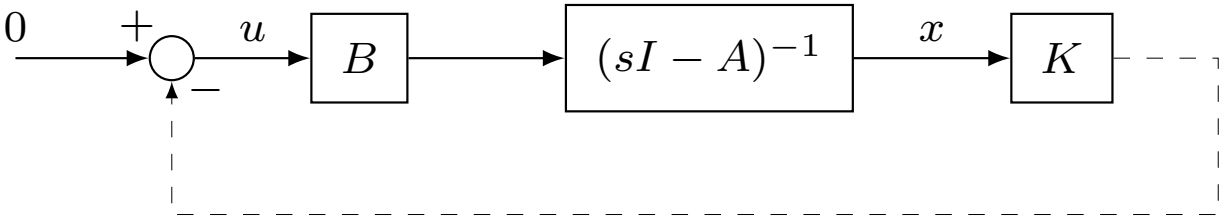
Realimentação completa de estado: margem de ganho e de fase

- O problema de controle por realimentação de estado está ilustrado abaixo.



- Uma vez projetado K, é possível verificar a margem de ganho e de fase.

- Para isso, basta notar que a figura acima é equivalente à figura abaixo.



- Assim, a função de transferência do ramo direto $L(s)$ é dada por

$$L(s) = K(sI - A)^{-1}B$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Realimentação completa de estado: margem de ganho e de fase

- Exemplo: Seja a planta $G(s)$ dada por

$$G(s) = \frac{100}{(s+10)^2}$$

com a seguinte representação no espaço de estado

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -20 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 100 \end{bmatrix}, \qquad D = 0$$

- Suponha que se deseje alocar os dois polos de malha fechada em

$$s_{1,2} = -3 \pm 15\mathrm{j}$$

- Assim, a matriz de ganho K é dada por $K = \begin{bmatrix} -14 & 414 \end{bmatrix}$.

- A função de transferência do ramo direto $L(s)$ é dada por

$$L(s) = K(sI - A)^{-1}B = \frac{-14s + 134}{s^2 + 20s + 100}$$

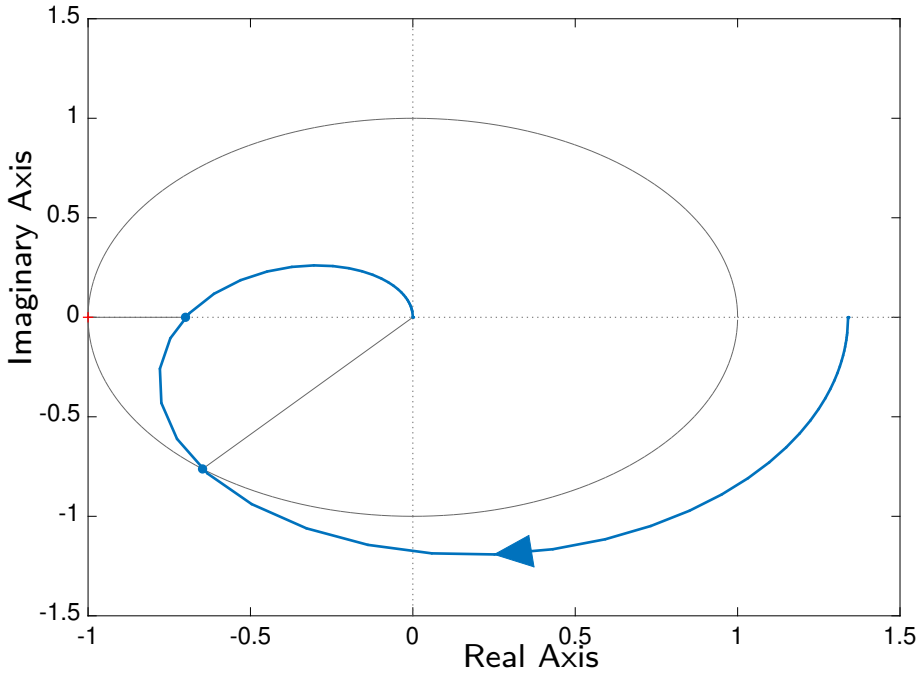
cujas margens de ganho e de fase são respectivamente dadas por

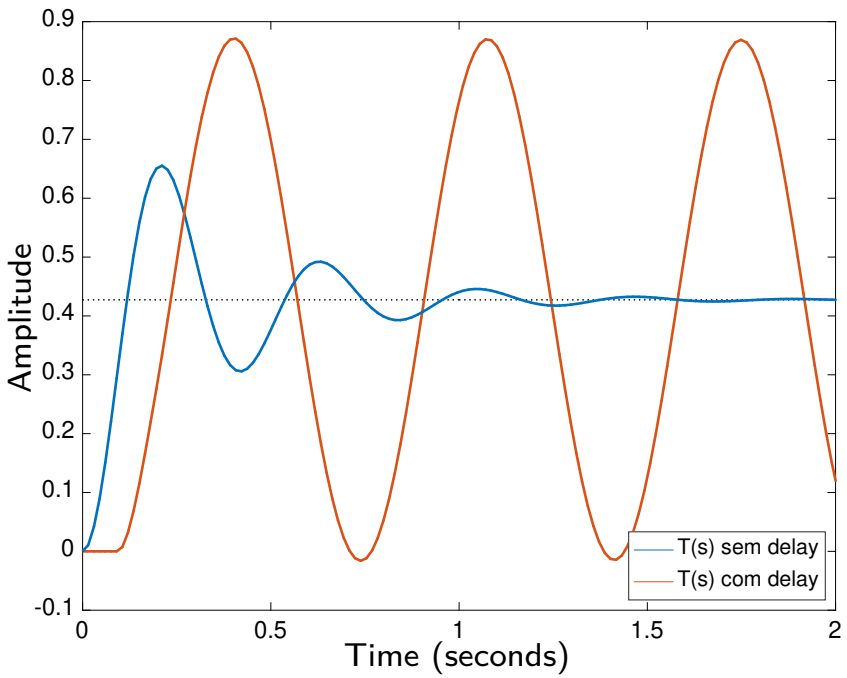
  - $\mathrm{MG} = 1.428$ $(3.1\,\mathrm{dB})$, na frequência de cruzamento de fase $\omega_f = 17.07$ rad/s.
  - $\mathrm{MF} = 49.64°$, na frequência de cruzamento de ganho $\omega_g = 9.33$ rad/s.

Projeto de controladores no espaço de estado

Realimentação completa de estado: margem de ganho e de fase

- O diagrama de Nyquist de $L(s)$ e a resposta ao degrau de $T(s)$ estão abaixo.





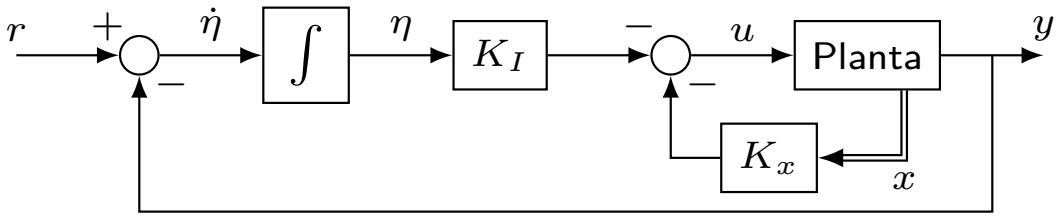
- Note que $\mathrm{MG} = 1.428$ $(3.1\,\mathrm{dB})$ indica que K pode ser multiplicado por $\gamma \in (0, 1.428)$ mantendo os autovalores de $A - \gamma BK$ estáveis.

- Porém, analisando o Diagrama de Nyquist de $L(s)$ e notando que $L(0) = 134/100$, conclui-se que o sistema será estável para $\gamma \in (-100/134, 1.428)$.

- Já $\mathrm{MF} = 49.64^\circ$, na frequência $\omega_g = 9.33$ rad/s, fornece $\mathrm{MA} = 0.0928$, indicando que o sistema tolerá um "delay" de $\tau = 0.0928$[s] na entrada: $u(t) \to u(t - \tau)$.

Projeto de controladores no espaço de estado

Projeto de servomecanismo com ação integral



- A equação que governa o servomecanismo acima é dada por

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \dot{\eta} = r - y = r - Cx$$
$$y = Cx \qquad u = -K_I\eta - K_x x$$

- O sistema aumentado passa a ser

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

- Em regime permanente, com $r(t) = r(\infty) = r$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\eta}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \eta(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

- Com $x_e(t) = x(t) - x(\infty)$, $\eta_e(t) = \eta(t) - \eta(\infty)$ e $u_e(t) = u(t) - u(\infty)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\eta}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \eta_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t)$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Projeto de servomecanismo com ação integral

- Definindo a lei de controle

$$u = -\begin{bmatrix} K_x & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix}$$

tem-se

$$u_e(t) = u(t) - u(\infty) = -K \begin{bmatrix} x_e \\ \eta_e \end{bmatrix}$$

- O problema agora se resume em encontrar um ganho K que estabilize o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\eta}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \eta_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t)$$

- Pode-se mostrar que um ganho K estabilizante existe sempre que:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = n + 1$$

- Dessa forma, os sinais $x_e(t)$, $\eta_e(t)$ e $u_e(t)$ convergem para zero com $t \to \infty$.
- "Provando" assim que $\dot{\eta}(t) = \dot{\eta}_e(t) \to 0$ e consequentemente $y(t) \to r$.

Projeto de controladores no espaço de estado

Projeto de servomecanismo com ação integral

- Note que o sistema em malha fechada, com $z = \begin{bmatrix} x & \eta \end{bmatrix}^T$, passa a ser

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A - BK_x & -BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$
$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} z$$

- Exemplo: Considere o sistema mecânico abaixo

$$\ddot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = u(t), \qquad \omega_n = 1$$

Assumindo a forma canônica controlável, o sistema aumentado fica sendo

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_{x_1} & K_{x_2} & K_I \end{bmatrix}$$

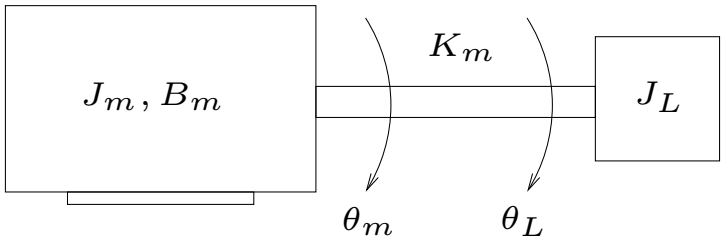
- É preciso projetar K de forma que $\bar{A} - \bar{B}K$ seja Hurwitz, ou seja, estável.
- Escolhendo o polinômio desejado $\alpha_d = (s+1)^3$, o ganho será $K = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$
- A função de transferência em malha fechada fica sendo

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{(s+1)^3} \qquad \Leftarrow \qquad \text{erro estacionário nulo ao degrau}$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Projeto de servomecanismo com ação integral

- Exemplo: Suponha que se deseje projetar um servomecanismo para o sistema motor-carga de tal forma que a rotação do eixo θ_m siga uma referência desejada r.



- Assumindo que o eixo do motor é rígido e não se deforma, $\theta_m = \theta_L$, e assim a equação de movimento é dada por:

$$J\ddot{\theta}_m + B_m\dot{\theta}_m = T_m, \qquad \text{com} \quad J = J_m + J_L$$

- Definindo os estados $x_1 = \theta_m$ e $x_2 = \dot{\theta}_m$, a entrada $u(t) = T_m$ e assumindo os valores numéricos $J = B_m = 1$, a representação no espaço de estado é dada por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Projeto de servomecanismo com ação integral

- Como se deseja rastrear a rotação do eixo θ_m a saída $y(t)$ deve ser $y(t) = \theta_m$, que no espaço de estado, implica na matriz C dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- A condição para que o problema de servomecanismo tenha solução é dada por:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = n + 1 = 3 \qquad \text{“posto cheio”}$$

- Agora basta projetar K de forma que $\bar{A} - \bar{B}K$ seja estável, com $\bar{A}$, $\bar{B}$ e K dados por

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} K_{x_1} & K_{x_2} & K_I \end{bmatrix}$$

- Para o polinômio desejado $\alpha_d = (s+1)^3$, o ganho (Ackermann) é $K = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

- Note que o sistema em malha fechada, com $z = \begin{bmatrix} x & \eta \end{bmatrix}^T$, passa a ser

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} A - BK_x & -BK_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} z \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{(s+1)^3}$$

Projeto de controladores no espaço de estado

Desempenho

- O projeto do ganho K, através da alocação de polos, pode ser utilizado na tentativa de se obter um determinado desempenho.

- Porém, não é possível garantir que o desempenho desejado será obtido.

- Exemplo: Seja a planta $G(s)$ dada por

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

com a seguinte representação no espaço de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

- Suponha que se deseje o seguinte desempenho:
  - Sobressinal máximo $M_p = 15\%$;
  - Tempo de acomodação (a 2%) $t_s = 4$ segundos;
  - Erro estacionário nulo à entrada degrau.

- Para assegurar rastreamento ao degrau, será necessário utilizar o projeto de servomecanismo com ação integral.

Projeto de controladores no espaço de estado

Desempenho

- Os polos que fornecem esse desempenho, $M_p = 15\%$ e $t_s = 4$[s], são dados por

$$s_{1,2} = -1.0150 \pm 1.6805\text{j}$$

raízes do polinômio característico

$$s^2 + 2.03s + 3.854 = 0$$

- O sistema aumentado fica sendo

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Como o sistema aumentado tem ordem 3, devido ao integrador, é necessário especificar a localização do terceiro polo.

- O ideal é alocar o polo do integrador longe dos polos dominantes, por exemplo, em $s = -100$.

- A matriz de ganho K fica sendo:

$$K = \begin{bmatrix} 102 & 207 & -385 \end{bmatrix}$$

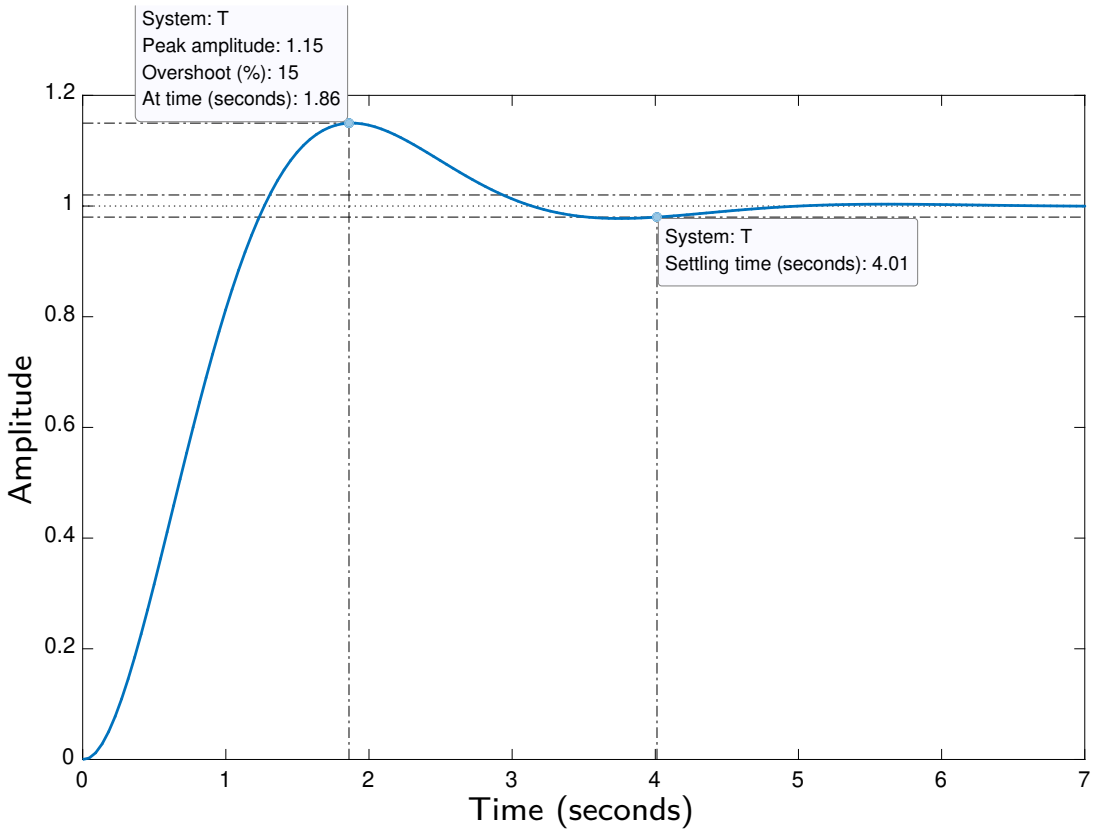
Projeto de controladores no espaço de estado

Desempenho

- Com esse ganho K, o sistema em malha fechada $T(s)$ fica sendo

$$T(s) = \frac{385.42}{(s+100)(s^2+2.03s+3.854)}$$

- A resposta ao degrau está apresentada na figura abaixo.



- Claramente, o desempenho desejado foi satisfeito.

Projeto de controladores no espaço de estado

Desempenho

- Exemplo: Suponha agora que a planta $G(s)$ seja dada por

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2}, \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

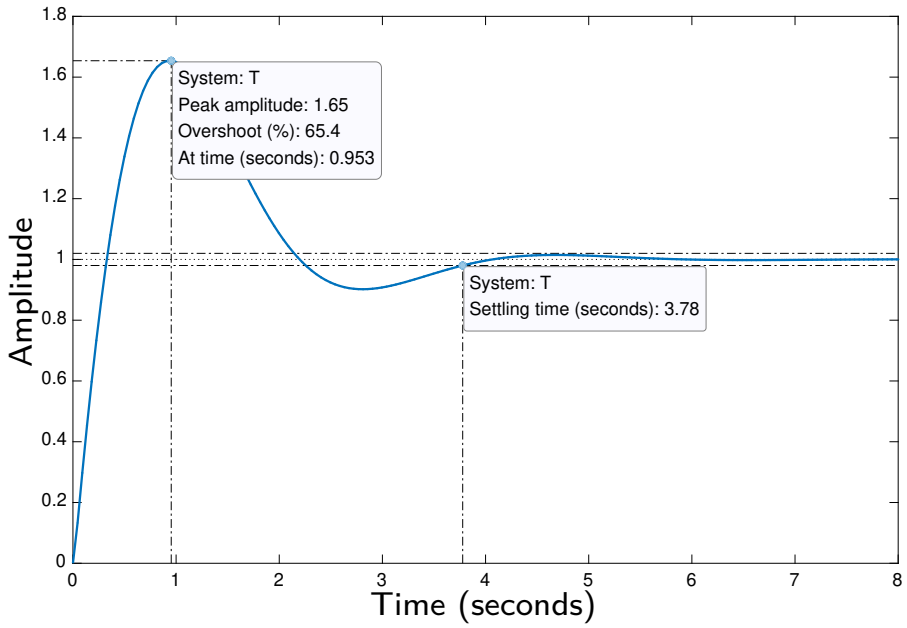
- Mantendo-se o mesmo critério de desempenho do exemplo anterior, os polos desejados permanecem os mesmos.

- O ganho K é dado por

$$K = \begin{bmatrix} 102 & -178 & -385 \end{bmatrix}$$

- A malha fechada fica sendo

$$T(s) = \frac{385.42(s+1)}{(s+100)(s^2+2.03s+3.854)}$$



- Claramente, o desempenho desejado não foi plenamente atendido

Projeto de controladores no espaço de estado

Estimador de estado

- Nem todos os estados podem estar disponíveis, assim é necessário estimá-los.
- A equação do estimador por "predição" é dada por

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t), \qquad \bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

  em que $\bar{x}(t)$ é a estimação do estado $x(t)$.
- Assume-se conhecido A, B e $u(\tau)$ para $\tau \in [0, t)$.
- O erro de estimação é dado por $\tilde{x}(t) = \bar{x}(t) - x(t)$. Assim:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{\bar{x}}(t) - \dot{x}(t) \\
\dot{\tilde{x}}(t) &= A\bar{x}(t) + Bu(t) - Ax(t) - Bu(t) \\
&= A(\bar{x}(t) - x(t)) = A\tilde{x}(t)
\end{aligned}$$

- Assim, o erro de estimação é $\tilde{x}(t) = e^{At}\tilde{x}(0)$, com $\tilde{x}(0)$ o erro inicial.
- Se a matriz A for Hurwitz, i.e. estável, então $\tilde{x}(t) \to 0$.
- O erro de estimação depende apenas de A, não podendo ser controlado.

Projeto de controladores no espaço de estado

Observador de Luenberger

- O estimador de ordem completa de Luenberger é dado por

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + Bu + L(y - C\bar{x}) \\ &= (A - LC)\bar{x} + Bu + Ly\end{aligned}$$

  em que $\bar{x}$ é o estado estimado e $\bar{y} = C\bar{x}$ é a saída estimada.

- Para esse estimador, a equação do erro $\tilde{x}(t) = \bar{x}(t) - x(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{\bar{x}}(t) - \dot{x}(t) \\ &= A\bar{x} + Bu + L(y - C\bar{x}) - Ax - Bu \\ &= (A - LC)\tilde{x}(t)\end{aligned}$$

- Assim, o erro a qualquer instante é dado por

$$\tilde{x}(t) = e^{(A-LC)t}\tilde{x}(0)$$

- A equação característica do erro é dada por $\det(sI - A + LC) = 0$

- Se o sistema for completamente observável, é possível escolher L de forma a alocar arbitrariamente os autovalores de $(A - LC)$.

Projeto de controladores no espaço de estado

Observador de Luenberger

- Se o sistema for completamente observável, existe uma matriz L tal que

$$\det(sI - A + LC) = \alpha_o(s) \quad \text{“polinômio desejado”}$$

- Fórmula de Ackermann:

$$L = \alpha_o(A)\mathcal{O}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}^T$$

  em que $\mathcal{O}$ é a matriz de observabilidade.

- O problema de alocação de polos para o observador é dual ao do controlador, já que a equação característica é dada por

$$|sI - A + LC| = |sI - A^T + C^T L^T| = |sI - A^T + C^T K| \quad \text{com } K = L^T$$

- Portanto, determinar L que aloque os polos de $A - LC$ é equivalente a determinar K que aloque os polos de $A^T - C^T K$.

- Essa equação característica representa o seguinte problema de controle

$$\dot{x} = A^T x + C^T u$$
$$u = -Kx$$

- Portanto, existe uma matriz K que aloca arbitrariamente $\lambda_i(A^T - C^T K)$ sse o par (A^T, C^T) for controlável, i.e., se $\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}$ tiver posto cheio.

Projeto de controladores no espaço de estado

Observador de Luenberger

- Exemplo: Seja a planta $G(s) = 1/s^2$, com a representação de estado dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = 0$$

- O sistema é observável, já que sua matriz de observabilidade é inversível:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Suponha que o polinômio desejado para o observador seja

$$\alpha_o = s^2 + 2s + 2$$

que fornece polos em $s = -1 \pm j$, com $\zeta = \sqrt{2}/2$ e $\omega_n = \sqrt{2}$.

- A equação para alocar os polos do observador é

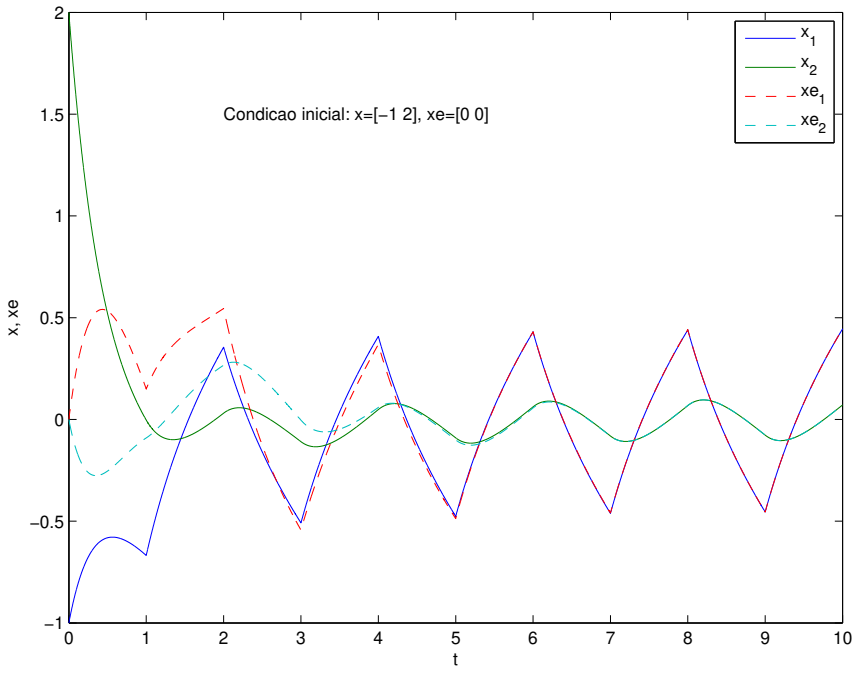
$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = s^2 + 2s + 2 \quad \Longrightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

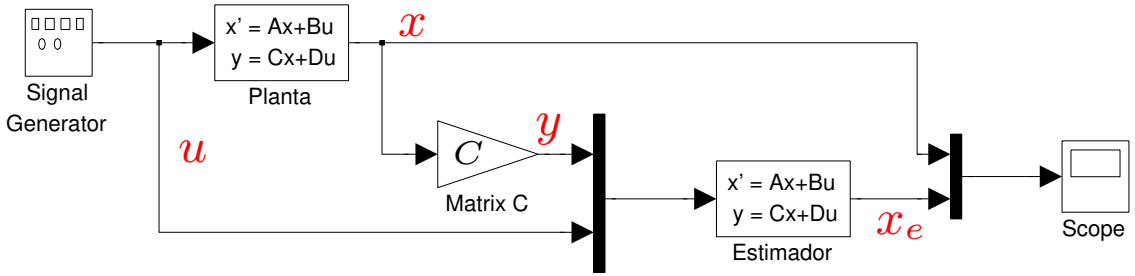
- A equação do observador é dada por

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = -2\bar{x}_2(t) + u(t) + 2y(t)$$
$$\dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{x}_1(t) - 2\bar{x}_2(t) + 2y(t)$$

- Algoritmo em Matlab.

```
>> A = [-1 1;1 -2]; B = [1; 0]; C = [0 1]; D=0;
>> planta = ss(A,B,C,D);
>> pole(planta)
ans =
-2.6180
-0.3820
>> % Polos desejados para o estimador
>> polosdesejados = [-1+i -1-i];
>> % Ganho usando a fórmula de Ackermann
>> L = acker(A',C',polosdesejados); L = L';
>> eig(A-L*C)
ans =
-1.0000 + 1.0000i
-1.0000 - 1.0000i
>> % O estimador possui duas entradas: u(t) e y(t)
>> Ae = A-L*C;
>> Be = [L B];
>> Ce = eye(2);  % Saida com os dois estados estimados
>> De = zeros(2,2);
```





Projeto de controladores no espaço de estado

Princípio da separação

- No projeto do controlador por realimentação completa de estado, assume-se que todos os estados estão disponíveis, ou seja

$$u = -Kx$$

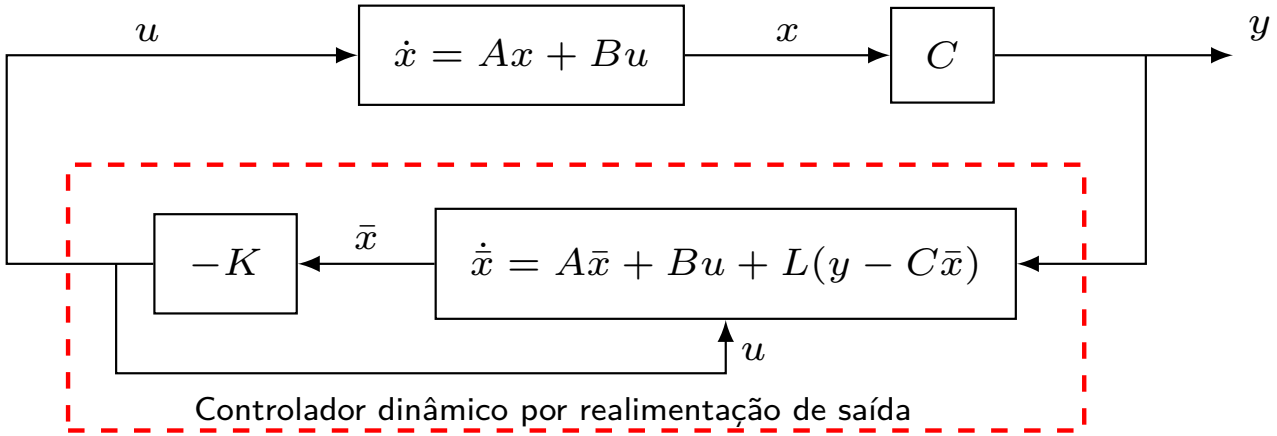
- Caso x não esteja disponível, pode-se usar o observador de Luenberger:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + L(y - C\bar{x}) = (A - LC)\bar{x} + Bu + Ly$$

- Usando $\bar{x}$ no lugar de x, a lei de controle passa a ser:

$$u = -K\bar{x}$$

- A estrutura final de controle está apresentada na figura abaixo.



- O princípio da separação afirma que o projeto do controlador e do estimador podem ser independentes, pois a estabilidade permanecerá garantida.

Projeto de controladores no espaço de estado

Princípio da separação

- Para provar o princípio da separação, substitui-se a lei $u = -K\bar{x}$ no sistema, obtendo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu = Ax - BK\bar{x} = Ax - BK(x + \tilde{x}) \\ &= (A - BK)x - BK\tilde{x}\end{aligned}$$

  em que $\tilde{x}$ é o erro de estimação, dado por $\tilde{x} = \bar{x} - x$.

- Usando a equação do estimador, a dinâmica do erro de estimação é dada por

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$

- Nesse caso, o sistema aumentado em malha fechada passa a ser

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{x}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A - LC & 0 \\ -BK & A - BK\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}(t) \\ x(t)\end{bmatrix}$$

- O polinômio característico desse sistema é dado por

$$\det(sI - A + LC)\,\det(sI - A + BK) = \alpha_o(s)\alpha_c(s)$$

- Os polos do estimador são geralmente alocados de forma a serem de 3 a 6 vezes mais rápidos do que os polos do controlador.

Projeto de controladores no espaço de estado

Princípio da separação: função de transferência do controlador/observador

- É possível obter a função de transferência do controlador $D(s)$ entre $U(s)$ e $Y(s)$.
- Para isso, substitui-se $u = -K\bar{x}$ na equação do observador:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + L(y - C\bar{x}) \quad \xRightarrow{u=-K\bar{x}} \quad \begin{cases} \dot{\bar{x}} = (A - BK - LC)\bar{x} + Ly \\ u = -K\bar{x} \end{cases}$$

- Aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$D(s) = -K(sI - A + BK + LC)^{-1}L$$

- Note que a ordem do controlador $D(s)$ é a mesma do observador.
- Exemplo: Para o sistema composto pelo duplo integrador, K e L foram dados por:

$$K = \begin{bmatrix} 0.40 & 0.08 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}^T$$

- Assim, a função de transferência do controlador $D(s)$ é dada por

$$\begin{aligned} D(s) &= \begin{bmatrix} 0.40 & 0.08 \end{bmatrix} \left(sI - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.40 & 0.08 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{0.96(s + 1/6)}{s^2 + 2.4s + 2.88} \end{aligned}$$