EM707 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

Nota ao leitor

- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4ª edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
- Material suplementar:
  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8ª edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

Análise no espaço de estado

Forma canônica controlável

- Considere o sistema de ordem n dado por

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_n u$$

- A função de transferência correspondente é dada por

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} =: \frac{b(s)}{a(s)}$$

- Note que $Y(s)$ pode ser reescrito como

$$Y(s) = b(s)Q(s), \quad \text{com} \quad Q(s) = \frac{1}{a(s)} U(s)$$

- Para construir o diagrama de blocos de $H(s)$, primeiramente representa-se o termo

$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{1}{a(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

- Em seguida, representa-se o termo

$$Y(s) = b(s)Q(s) = \left(b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n\right) Q(s)$$

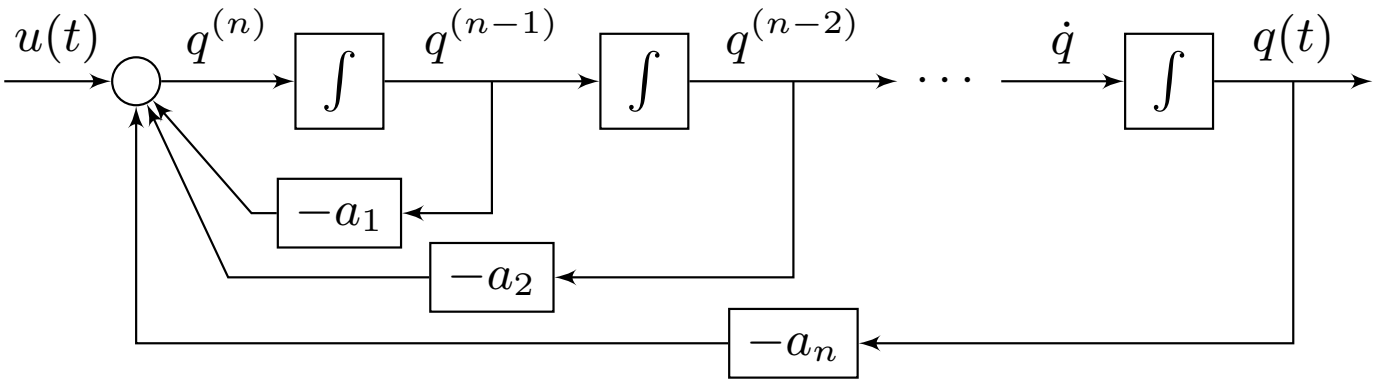
Análise no espaço de estado

Forma canônica controlável

- A representação do termo $Q(s)/U(s)$, ou seja, da equação diferencial

$$q^{(n)}(t) + a_1 q^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n q(t) = u(t)$$

é claramente descrita pelo diagrama de blocos abaixo



- Agora, é necessário representar o termo $Y(s) = b(s)Q(s)$, dado por

$$Y(s) = \left(b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n\right) Q(s)$$

que no tempo é

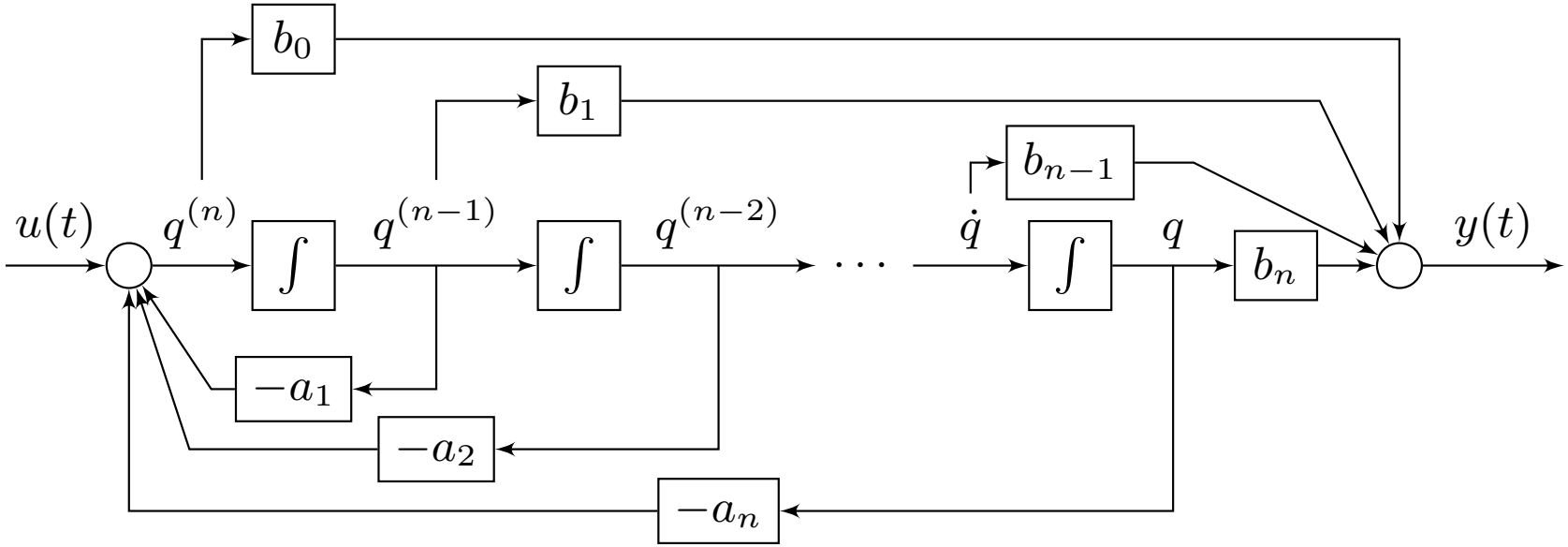
$$y(t) = b_0 q^{(n)} + b_1 q^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}\dot{q} + b_n q$$

- Note que os estados $q, \dot{q}, \ldots, q^{(n-1)}, q^{(n)}$, necessários para construir a saída $y(t)$, já estão disponíveis no diagrama acima.

Análise no espaço de estado

Forma canônica controlável

- O diagrama de blocos final é dado por



- Para levantar o modelo de estado do sistema na forma canônica controlável, deve-se associar um estado à saída de cada integrador, como segue:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= q & & & \dot{x}_1 &= x_2 \\
x_2 &= \dot{q} & &\Longrightarrow & \dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots & & & &\vdots \\
x_n &= q^{(n-1)} & & & \dot{x}_n &= q^{(n)} = u - a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_n x_1
\end{aligned}
$$

Análise no espaço de estado

Forma canônica controlável

- A saída do sistema, nesse caso, é dada por

$$y(t) = b_n x_1 + b_{n-1} x_2 + \cdots + b_1 x_n + b_0 q^{(n)}$$

- Usando o termo $q^{(n)} = u - a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_n x_1$, tem-se

$$y(t) = (b_n - b_0 a_n) x_1 + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) x_2 + \cdots + (b_1 - b_0 a_1) x_n + b_0 u$$

- Na forma matricial, com $x(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - b_0 a_n & \cdots & b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} x(t) + [b_0] u(t)$$

ou seja

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t)$$
$$y(t) = C_c x(t) + D_c u(t)$$

- Note que os coeficientes do polinômio característico $a(s)$ estão na última linha da matriz A_c e que os elementos da matriz B_c são nulos, exceto o da última posição.

Análise no espaço de estado

Forma canônica observável

- Considere o sistema de ordem n dado por

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_n u$$

- A função de transferência correspondente é

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} =: \frac{b(s)}{a(s)}$$

- Pode-se mostrar que a sua representação na forma canônica observável é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - b_0 a_n \\ b_{n-1} - b_0 a_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + [b_0] u(t)$$

Análise no espaço de estado

Forma canônica observável

- Seja a função de transferência

$$H(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} := \frac{b(s)}{a(s)}$$

- Considere o caso $n = 3$. Usando a relação

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{b(s)}{a(s)} U(s)$$

tem-se $a(s)Y(s) = b(s)U(s)$, ou seja,

$$s^3 Y(s) + a_1 s^2 Y(s) + a_2 s Y(s) + a_3 Y(s) = b_0 s^3 U(s) + b_1 s^2 U(s) + b_2 s U(s) + b_3 U(s)$$

- Essa equação pode ainda ser reescrita como

$$b_3 U(s) - a_3 Y(s) = \underbrace{s^3 Y(s) - b_0 s^3 U(s) + a_1 s^2 Y(s) - b_1 s^2 U(s) + a_2 s Y(s) - b_2 s U(s)}_{P_1(s)}$$

- Multiplicando o termo $P_1(s)$ por s^{-1}, tem-se

$$s^{-1} P_1(s) = \underbrace{s^2 Y(s) - b_0 s^2 U(s) + a_1 s Y(s) - b_1 s U(s)}_{P_2(s)} + a_2 Y(s) - b_2 U(s)$$

Análise no espaço de estado

Forma canônica observável

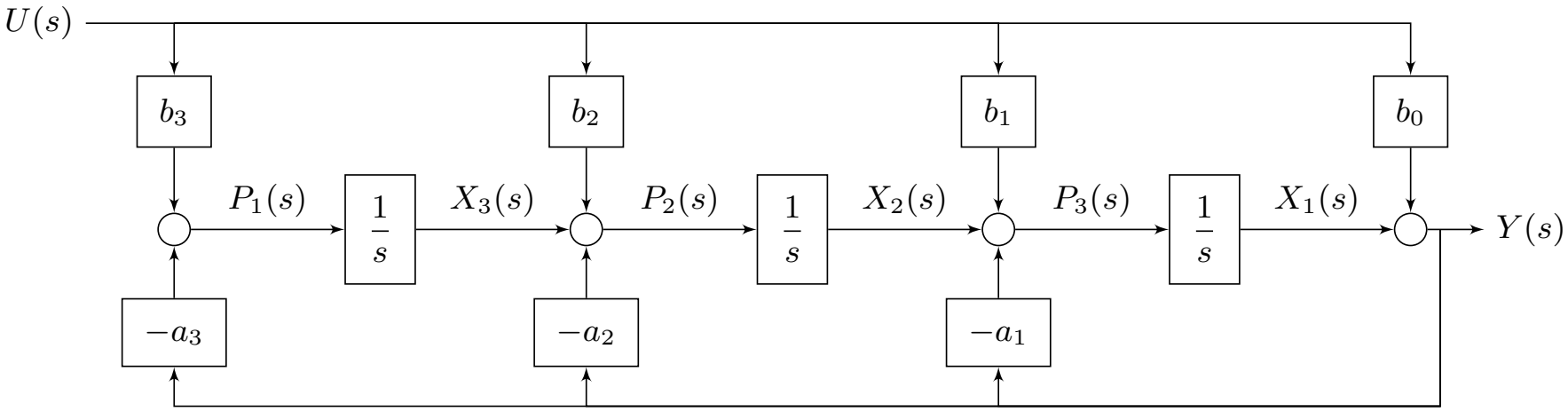
- Multiplicando agora o termo $P_2(s)$ por s^{-1}, tem-se

$$s^{-1}P_2(s) = \underbrace{sY(s) - b_0 sU(s)}_{P_3(s)} + a_1 Y(s) - b_1 U(s)$$

- Multiplicando o termo $P_3(s)$ por s^{-1}, obtém-se, finalmente,

$$s^{-1}P_3(s) = Y(s) - b_0 U(s) \qquad \Longrightarrow \qquad Y(s) = b_0 U(s) + s^{-1}P_3(s)$$

- O diagrama de blocos é apresentado abaixo.



Análise no espaço de estado

Forma canônica observável

- Definindo os estados x_1, x_2 e x_3 como indicado no diagrama de blocos, tem-se

$$y(t) = x_1(t) + b_0 u(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + b_1 u(t) - a_1 y(t) = -a_1 x_1(t) + x_2(t) + (b_1 - b_0 a_1) u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t) + b_2 u(t) - a_2 y(t) = -a_2 x_1(t) + x_3(t) + (b_2 - b_0 a_2) u(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = b_3 u(t) - a_3 y(t) = -a_3 x_1(t) + (b_3 - b_0 a_3) u(t)$$

- Na forma matricial, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_o x(t) + B_o u(t) \\ y(t) &= C_o x(t) + D_o u(t) \end{aligned}$$

com

$$A_0 = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} b_1 - b_0 a_1 \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_3 - b_0 a_3 \end{bmatrix}, \quad C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_o = [b_0]$$

Análise no espaço de estado

Forma canônica modal

- Considere a função de transferência

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

  com polos distintos.

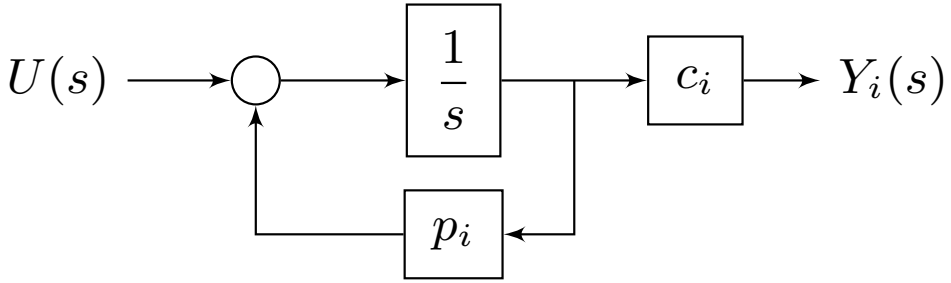
- Suponha que $H(s)$ tenha a seguinte decomposição em frações parciais:

$$H(s) = c_0 + \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n}$$

- Note que cada fração parcial

$$H_i(s) = \frac{Y_i(s)}{U(s)} = \frac{c_i}{s - p_i}$$

  pode ser representada pelo seguinte diagrama de blocos:



- Fica claro que a função de transferência $H(s)$ será a soma (a conexão em paralelo) de cada um dos blocos $H_i(s)$.

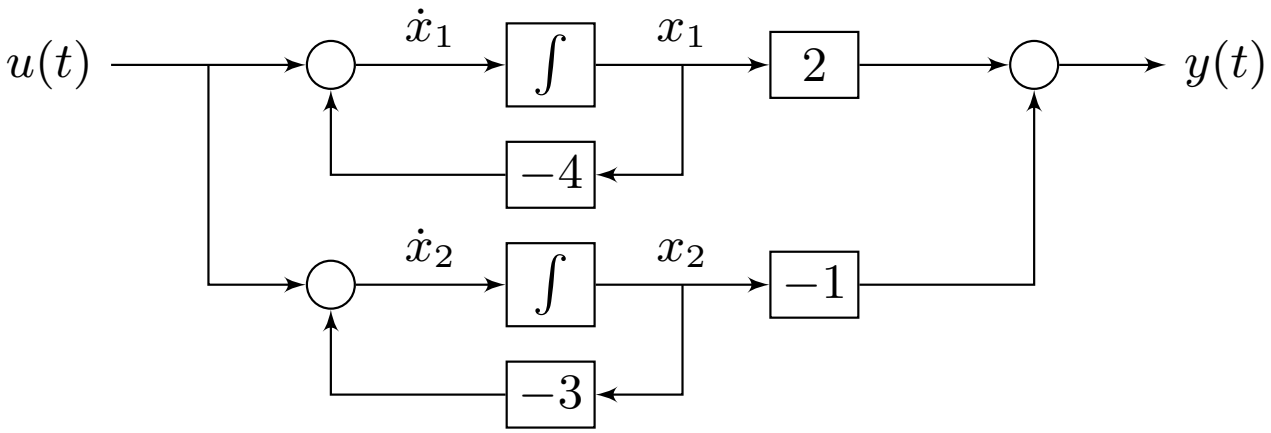
Análise no espaço de estado

Forma canônica modal

- Exemplo: Considere a função de transferência

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12} = \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+3}$$

- Sua representação na forma canônica modal é



- O modelo no espaço de estado desacoplado é obtido diretamente do diagrama:

$$\dot{x}_1 = u - 4x_1, \qquad \dot{x}_2 = u - 3x_2, \qquad y = 2x_1 - x_2$$

ou seja, as matrizes de estado (A, B, C, D) são dadas por

$$A_m = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_m = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_m = [0]$$

- A solução $x_i(t)$ é dada por: $x_i(t) = e^{p_i t} x_i(0) + \int_0^t e^{p_i(t-\tau)} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \geq 0.$