EM707 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

Nota ao leitor

- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4ª edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
- Material suplementar:
  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8ª edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

Análise no espaço de estado

Transformação de similaridade

- Considere o modelo no espaço de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Aplicando a transformada de Laplace, obtém-se

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \quad \text{e} \quad Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

- Substituindo $X(s)$ em $Y(s)$, tem-se a função de transferência

$$Y(s) = \left\{C\,(sI - A)^{-1}\,B + D\right\}U(s)$$

- Para mostrar que essa função de transferência possui inúmeras representações no espaço de estado, defina uma nova variável $q(t) = Tx(t)$ com T inversível. Então:

$$\dot{q} = T\dot{x} = T(Ax + Bu) = TAT^{-1}q + TBu$$
$$y = Cx + Du = CT^{-1}q + Du$$

- Na nova variável de estado q, o sistema é dada por

$$\dot{q}(t) = \hat{A}q(t) + \hat{B}u(t)$$
$$y(t) = \hat{C}q(t) + \hat{D}u(t)$$

com $\hat{A} = TAT^{-1}, \hat{B} = TB, \hat{C} = CT^{-1}, \hat{D} = D$.

Análise no espaço de estado

Transformação de similaridade

- Aplicando a transformada de Laplace, obtém-se

$$Q(s) = (sI - \hat{A})^{-1}\hat{B}U(s)$$
$$Y(s) = \hat{C}Q(s) + \hat{D}U(s)$$

assim

$$Y(s) = \left\{\hat{C}\left(sI - \hat{A}\right)^{-1}\hat{B} + \hat{D}\right\}U(s)$$

- Substituindo $\hat{A} = TAT^{-1}, \hat{B} = TB, \hat{C} = CT^{-1}, \hat{D} = D$, tem-se

$$\begin{aligned} Y(s) &= \left\{CT^{-1}\left(sI - TAT^{-1}\right)^{-1}TB + D\right\}U(s) \\ &= \left\{CT^{-1}\left[T\left(sI - A\right)T^{-1}\right]^{-1}TB + D\right\}U(s) \\ &= \left\{CT^{-1}T\left[(sI - A)\right]^{-1}T^{-1}TB + D\right\}U(s) = \left\{C\left(sI - A\right)^{-1}B + D\right\}U(s) \end{aligned}$$

- Portanto, a função de transferência é invariante com relação à transformação de similaridade.

- Assim, o mesmo sistema pode ser representado de inúmeras formas, que estarão relacionadas entre si através de alguma matriz de similaridade T.

Análise no espaço de estado

Transformação de similaridade

- Exemplo: Considere a seguinte representação no espaço de estado:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = 1$$

- Sua função de transferência $H(s)$ é dada por

$$H(s) = C\left(sI - A\right)^{-1} B + D = \frac{s}{s+1}$$

- Agora, aplicando a transformação de similaridade

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Obtém-se as matrizes $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$ e $\hat{D} = D$, dadas por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{D} = 1$$

- Calculando a função de transferência desse sistema, obtém-se

$$H(s) = \hat{C}\left(sI - \hat{A}\right)^{-1} \hat{B} + \hat{D} = \frac{s}{s+1}$$

Análise no espaço de estado

Problema de autovalor e autovetor

- Considere a equação

$$Ax = \lambda x$$

em que A é uma matriz quadrada $n \times n$ e x um vetor de dimensão $n \times 1$.

- O valor de λ, tal que essa equação venha a ter uma solução $x \neq 0$, é denominado de autovalor. A solução correspondente $x \neq 0$ é o autovetor.

- Essa equação pode ser reescrita como

$$Ax - \lambda x = (A - \lambda I)x = (\lambda I - A)x = 0$$

- Portanto, só haverá uma solução não trivial $x \neq 0$, se a matriz caraterística $\lambda I - A$ for singular, ou seja, se a seguinte equação característica for satisfeita:

$$|\lambda I - A| = 0$$

- Esse determinante, dado por

$$\Lambda(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

é um polinômio escalar em λ, conhecido como polinômio caraterístico da matriz A.

Análise no espaço de estado

Problema de autovalor e autovetor

- O polinômio característico $\Lambda(\lambda) = |\lambda I - A|$ possui n raízes (autovalores) λ_i, consequentemente, haverá n correspondentes autovetores x_i.
- Sejam as n soluções $(x_i,\ \lambda_i)$, com $i = 1, \ldots, n$, do problema acima. Então:

$$\begin{aligned} Ax_1 &= \lambda_1 x_1 \\ Ax_2 &= \lambda_2 x_2 \\ &\cdots \\ Ax_n &= \lambda_n x_n \end{aligned}$$

- Esse sistema pode ser reescrito na forma matricial

$$A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- Definindo $\Sigma = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ e $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, tem-se

$$A\Sigma = \Sigma\Lambda$$

- Se a matriz Σ for não singular, então pode-se diagonalizar a matriz A, já que

$$\Lambda = \Sigma^{-1} A \Sigma$$

Análise no espaço de estado

Solução homogênea

- Considere a seguinte equação diferencial no espaço de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

com a matriz de estado $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e o vetor de estado $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

- A solução homogênea dessa equação diferencial é dada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$$

em que a **matriz de transição de estado** $\Phi(t, t_0)$ possui a seguinte expansão:

$$\Phi(t, t_0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^\ell (t - t_0)^\ell}{\ell!}$$

- Para ver esse fato, considere que a solução $x(t)$ tem a seguinte expansão em série:

$$x(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} z_\ell (t - t_0)^\ell = z_0 + z_1(t - t_0) + z_2(t - t_0)^2 + z_3(t - t_0)^3 + \cdots$$

com $z_i(t)$ vetores $n \times 1$.

- Assim, em $t = t_0$, tem-se

$$x(t_0) = z_0 = x_0$$

Análise no espaço de estado

Solução homogênea

- Derivando-se a solução $x(t)$ em relação a t, tem-se

$$\dot{x}(t) = z_1 + 2z_2(t - t_0) + 3z_3(t - t_0)^2 + 4z_4(t - t_0)^3 + \cdots = Ax(t)$$

- Assim, em $t = t_0$, tem-se

$$z_1 = Ax_0$$

- Derivando-se novamente a solução $x(t)$ em relação a t, tem-se

$$\ddot{x}(t) = 2z_2 + 6z_3(t - t_0) + 12z_4(t - t_0)^2 + \cdots = A\dot{x}(t) = A^2x(t)$$

- Assim, em $t = t_0$, tem-se

$$z_2 = \frac{A^2}{2}x_0$$

- Derivando-se novamente a solução $x(t)$ em relação a t, tem-se

$$\dddot{x}(t) = 6z_3 + 24z_4(t - t_0) + \cdots = A\ddot{x}(t) = A^3x(t)$$

- Assim, em $t = t_0$, tem-se

$$z_3 = \frac{A^3}{6}x_0$$

Análise no espaço de estado

Solução homogênea

- Prosseguindo com as derivadas subsequentes $(z_3, z_4, \dots)$, percebe-se que

$$z_\ell = \frac{A^\ell}{\ell!} x_0$$

- Portanto, a solução da equação homogênea é dada por

$$x(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} z_\ell (t - t_0)^\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^\ell (t-t_0)^\ell}{\ell!} x_0$$

que pode ser reescita na simbologia mais usual,

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$$

- A matriz de transição de estado (ou matriz exponencial) $e^{A(t-t_0)}$ é dada por

$$e^{A(t-t_0)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^\ell (t - t_0)^\ell}{\ell!}$$

- Para um sistema linear invariante no tempo, pode-se assumir sem perda de generalidade que a condição inicial ocorre no tempo $t_0 = 0$. Assim, a matriz de transição de estado fica sendo e^{At}.

Análise no espaço de estado

Matriz de transição de estado

- Uma propriedade importante da matriz de transição de estado é

$$\frac{\mathrm{d}e^{At}}{\mathrm{d}t} = Ae^{At} = e^{At}A$$

- Assim, facilmente demonstra-se que $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$ de fato é uma solução:

$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}e^{A(t-t_0)}}{\mathrm{d}t}x_0 = Ae^{A(t-t_0)}x_0 = Ax(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{x}(t) = Ax(t)$$

- Uma outra propriedade importante da matriz de transição de estado é obtida como segue:

$$x(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}x(t_0), \qquad x(t_2) = e^{A(t_2-t_0)}x(t_0)$$

Como t_0 é arbitrário, fazendo-se $t_0 = t_1$, tem-se

$$x(t_2) = e^{A(t_2-t_1)}x(t_1) = e^{A(t_2-t_1)}e^{A(t_1-t_0)}x(t_0)$$

Portanto,

$$e^{A(t_2-t_0)} = e^{A(t_2-t_1)}e^{A(t_1-t_0)}$$

A matriz $e^{A(t_1-t_0)}$ faz a transição de $x(t_0)$ a $x_1(t_1)$ e $e^{A(t_2-t_1)}$ de $x(t_1)$ a $x(t_2)$.

- Se $t_2 = t_0$, então

$$I = e^{A(t_0-t_1)}e^{A(t_1-t_0)} = e^{-A(t_1-t_0)}e^{A(t_1-t_0)} \quad \Longrightarrow \quad \left[e^{A(t_1-t_0)}\right]^{-1} = e^{-A(t_1-t_0)}$$

Análise no espaço de estado

Matriz de transição de estado

- A matriz de transição de estado e^{At} pode ser calculada pelos seguintes métodos:

1. $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$, em que $\mathcal{L}$ denota a transformada de Laplace.

   Para provar essa expressão, note que

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}e^{At}}{\mathrm{d}t}\right] = \mathcal{L}\left[e^{At}A\right] = \mathcal{L}\left[e^{At}\right]A$$

   Por outro lado, da propriedade da transformada de Laplace da derivada, tem-se

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}e^{At}}{\mathrm{d}t}\right] = s\mathcal{L}\left[e^{At}\right] - e^{At}\Big|_{t=0} = s\mathcal{L}\left[e^{At}\right] - I$$

   Igualando essas duas expressões, obtém-se finalmente

$$\mathcal{L}\left[e^{At}\right]A = s\mathcal{L}\left[e^{At}\right] - I \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left[e^{At}\right](sI - A) = I$$
$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\left[e^{At}\right] = (sI - A)^{-1} \quad \Rightarrow \quad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

2. $e^{At} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell(t) A^\ell$, usando o método polinomial (n polos distintos).

3. $e^{At} = \Sigma e^{\Lambda t}\Sigma^{-1}$, usando a decomposição em autovalores e autovetores $A = \Sigma\Lambda\Sigma^{-1}$. Essa método é obtido diretamente da seguinte propriedade da matriz de transição de estado: se $|Y| \neq 0$ então $e^{YXY^{-1}} = Ye^{X}Y^{-1}$

Exemplo: Calcule e^{At} para a seguinte matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$.

1. *Usando a transformada de Laplace:* $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$

   - A matriz $(sI - A)$ é dada por
   $$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}$$
   - Sua inversa $(sI - A)^{-1}$ é dada por
   $$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} (s+4) & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$
   - Aplicando a inversa da transformada de Laplace, obtém-se
   $$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3(e^{-3t} - e^{-t}) & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

2. *Usando o método polinomial:* $e^{At} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell(t) A^\ell$

   Os coeficientes $\alpha_\ell(t)$ são obtidos do sistema $\sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell \lambda_i^\ell = e^{\lambda_i t}$, com $i = 1, \ldots, n$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

   A matriz acima é conhecida como matriz de Vandermonde.

   - O sistema de equações para o exemplo em questão é dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2}\left(3e^{-t} - e^{-3t}\right) \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right) \end{aligned}$$

   - Portanto, a solução fica sendo:

$$e^{At} = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3(e^{-3t} - e^{-t}) & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

3. *Usando a diagonalização:* $e^{At} = \Sigma e^{\Lambda t}\Sigma^{-1}$

- Note que os autovalores de A são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$
- Os respectivos autovetores são $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$
- Portanto a matriz de autovetores $\Sigma = [v_1 \ v_2]$ é dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

  e a matriz de autovalores Λ é dada por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

- Finalmente, obtém-se

$$\begin{aligned} e^{At} = \Sigma e^{\Lambda t}\Sigma^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3(e^{-3t} - e^{-t}) & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Análise no espaço de estado

Solução homogênea

- Exemplo: Calcule a solução homogênea do sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

para a condição inicial

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

- Do exemplo anterior, sabe-se que

$$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 3(e^{-3t} - e^{-t}) & 3e^{-3t} - e^{-t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

- Assim, o estado é dada por

$$x(t) = e^{At} x_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

e portanto a resposta homogênea fica sendo

$$y(t) = 0$$

Análise no espaço de estado

Solução forçada

- Seja a equação no espaço de estado dada por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

- Considere uma solução particular na forma

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}v(t), \quad \text{com } v(t) \text{ a ser determinado}$$

- Substituindo $x(t)$ na equação de estado, tem-se

$$Ae^{A(t-t_0)}v(t) + e^{A(t-t_0)}\dot{v}(t) = Ae^{A(t-t_0)}v(t) + Bu(t)$$

- Como $[e^{A(t-t_0)}]^{-1} = e^{-A(t-t_0)}$, obtém-se

$$\dot{v}(t) = e^{-A(t-t_0)}Bu(t)$$

- Considerando que $u(t) = 0$ para $t < t_0$ e integrando, obtém-se

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau-t_0)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

- Notando que $x(t_0) = x_0 = v(t_0)$, tem-se

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \geq t_0$$

- Note que a saída é dada por $y(t) = Cx(t) + Du(t)$

Análise no espaço de estado

Solução forçada

- Exemplo: Calcule a resposta $y(t)$ do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad D = 1,$$

  para a entrada em degrau $u(t) = \mu(t)$ e condição inicial $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

- Do exemplo anterior, foi visto que a solução homogênea é nula para esse sistema.

- Assim, resta calcular a resposta forçada dada por

$$\begin{aligned} \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau &= C\left(\int_0^t e^{A(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right)B \\ &= C\begin{bmatrix} \frac{1}{6}\left(8+e^{-3t}-9e^{-t}\right) & \frac{1}{6}\left(2+e^{-3t}-3e^{-t}\right) \\ -1-\frac{e^{-3t}}{2}+\frac{3e^{-t}}{2} & \frac{1}{2}e^{-3t}\left(-1+e^{2t}\right) \end{bmatrix} B = e^{-3t}-1 \end{aligned}$$

- Portanto, a saída $y(t)$ é dada por

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau + Du(t) = e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

Análise no espaço de estado

Resposta ao impulso e função de transferência

- A resposta ao impulso $h(t)$ é obtida da fórmula anterior, com:

$$x_0 = 0, \quad t_0 = 0 \quad \text{e} \quad u(t) = \delta(t)$$

- Assim, usando o fato que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

obtém-se

$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t), \qquad t \geq 0$$

- Esse mesmo resultado pode ser obtido aplicando-se a transformada de Laplace em

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

com condições iniciais nulas, ou seja

$$\begin{aligned} (sI - A)X(s) &= BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

que fornece a função de transferência $H(s)$ dada por

$$Y(s) = H(s)U(s), \qquad H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Análise no espaço de estado

Resposta ao impulso e função de transferência

- Tendo em vista que

$$Y(s) = H(s)U(s), \qquad H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Claramente, a resposta impulsiva $h(t)$ é dada por

$$h(t) = C\mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]B + D\delta(t) = Ce^{At}B + D\delta(t), \qquad t \geq 0$$

- A resposta completa do sistema $y(t)$ é a soma da resposta homogênea:

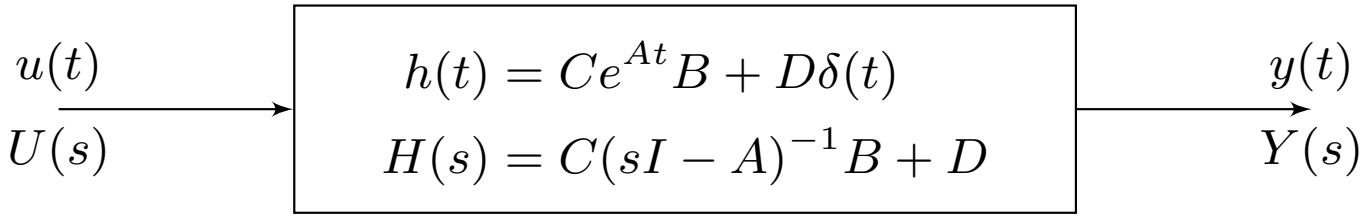
$$y_h = Ce^{A(t-t_0)}x_0$$

com a resposta forçada, dada pela convolução de $h(t)$ com $u(t)$:

$$y_f = h(t) * u(t) = \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,\mathrm{d}\tau + Du(t)$$

- Vale a pena relembrar que: $\mathcal{L}[y(t) = h(t) * u(t)] \;\rightarrow\; Y(s) = H(s)U(s)$

- A figura abaixo apresenta o diagrama de blocos da relação entrada-saída.



Análise no espaço de estado

Polos e estabilidade assintótica

- Os polos estão diretamente associados com os autovalores da matriz A.
- Para ver esse fato, considere o modelo no espaço de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- A função de transferência correspondente é dada por

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- Usando a fórmula da inversa de uma matriz $X^{-1} = \mathrm{adj}(X)/|X|$, tem-se

$$H(s) = \frac{C\,\mathrm{adj}(sI - A)B}{|sI - A|} + D$$

- Percebe-se, portanto, que os polos de $H(s)$ são as raízes do polinômio caraterístico $|sI - A|$, ou seja, os autovalores λ_i da matriz A.
- Portanto, o sistema será assintoticamente estável se a parte real dos autovalores $\lambda_i(A)$ for negativa, ou seja, $\mathrm{Re}[\lambda_i(A)] < 0$.

Análise no espaço de estado

Polos e estabilidade assintótica

- Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- A função de transferência é dada por

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{C\,\mathrm{adj}(sI - A)B}{|sI - A|} + D$$

- Os polos são as raízes do polinômio característico:

$$\det(sI - A) = 0$$

```
>> % Comandos do Matlab
>> sysc = ss(A,B,C,D)
>> pole(sysc)
>> pzmap(sysc)
```

- Porém cancelamentos entre polos e zeros podem ocorrer.

- Os zeros invariantes são os valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que a matriz:

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

perde posto.

```
>> % Comandos do Matlab
>> sysc = ss(A,B,C,D)
>> tzero(sysc)
>> pzmap(sysc)
```

Análise no espaço de estado

Controlabilidade

- Considere o sistema abaixo com condição inicial $x(t_0) = x_0$:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

com $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$.

- Controlabilidade completa de estado:

  O sistema é completamente controlável num instante $t = t_0$, se existir um tempo $t_f > t_0$ e uma lei de controle $u(t)$, com $t \in [t_0, t_f]$, tal que o estado é transferido de um estado inicial arbitrário $x(t_0) = x_0$ para um estado específico $x(t_f) = x_f$ num intervalo de tempo finito $t_f < \infty$.

- Uma condição necessária e suficiente é que matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ tenha posto cheio n:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}_{n \times nr}$$

- Proposição: Um sistema pode ser representado, via uma transformação de similaridade na forma canônica controlável se, e somente se, sua matriz de controlabilidade tiver posto n.

Análise no espaço de estado

Controlabilidade

- Algoritmo para determinar a controlabilidade.

```
>> % Sistema de ordem 3

>> A = [0 1 0; 0 0 1; -2 -4 -3];

>> B = [0 ; 0 ; 1]; C = [-1 0 1]; D = 0;

>> planta = ss(A,B,C,D); % Sistema contínuo

>> % Matriz de controlabilidade

>> CO1 = [B A*B A^2*B] % Matriz de controlabilidade
CO1 =
0     0     1
0     1    -3
1    -3     5

>> CO2 = ctrb(A,B);     % Matriz de controlabilidade

>> CO3 = ctrb(planta);  % Matriz de controlabilidade

>> posto = rank(CO1)    % Calcula o posto de CO
posto =
3

>> % Como o posto = 3, então o sistema é completamente controlável
```

Análise no espaço de estado

Observabilidade

- Considere o sistema abaixo com condição inicial $x(t_0) = x_0$:

$$\dot{x} = Ax, \qquad y = Cx$$

com $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

- Observabilidade completa de estado:

O sistema é completamente observável num instante $t_f > t_0$, se o conhecimento de $y(t)$, com $t \in [t_0, t_f]$, fornece uma solução única $x(t_0)$ para a equação

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

- Uma condição necessária e suficiente é que a matriz de observabilidade $\mathcal{O}$ tenha posto cheio n:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}_{pn \times n}$$

- Proposição: Um sistema pode ser representado via uma transformação de similaridade na forma canônica observável, se, e somente se, sua matriz de observabilidade tiver posto n.

Análise no espaço de estado

Observabilidade

```
>> A = [0 1 0; 0 0 1; -2 -4 -3];  B = [0 ; 0 ; 1]; C = [-1 0 1]; D = 0;
>> planta = ss(A,B,C,D); % Sistema contínuo

>> % Matriz de observabilidade

>> OB1 = [C; C*A; C*A^2] % Matriz de observabilidade
OB1 =
    -1     0     1
    -2    -5    -3
     6    10     4

>> OB2 = obsv(A,C); OB3 = obsv(planta); % Matriz de observabilidade

>> posto = rank(OB1)   % Calcula o posto de CO
posto =
2

>> % Como o posto não é 3, então o sistema não é completamente observável

>> % Expressando a função de transferência na forma zero-polo-ganho:

>> zpk(tf(planta))
Zero/pole/gain:
(s+1) (s-1)
--------------------
(s+1) (s^2 + 2s + 2)

>> % Exercício: fazer as representações por diagramas de bloco
```