EM707 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

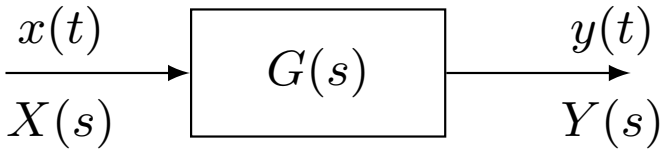
Nota ao leitor

- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4ª edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
- Material suplementar:
  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8ª edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

Análise de resposta em frequência

Conceitos básicos

- Considere o sistema $Y(s) = G(s)X(s)$ da figura abaixo.



- Assuma uma entrada senoidal $x(t) = \sin \omega t$, ou seja, $X(s) = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$.
- A saída do sistema é dada por

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- Usando a decomposição em frações parciais (polos distintos), tem-se

$$Y(s) = \frac{a}{s + \mathrm{j}\omega} + \frac{\bar{a}}{s - \mathrm{j}\omega} + \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \cdots + \frac{b_n}{s + s_n}$$

- Portanto

$$y(t) = ae^{-\mathrm{j}\omega t} + \bar{a}e^{\mathrm{j}\omega t} + b_1 e^{-s_1 t} + b_2 e^{-s_2 t} + \cdots + b_n e^{-s_n t}, \quad t \geq 0$$

- Assumindo polos estáveis ($\mathrm{Re}[s_i] < 0$), a resposta em regime permanente é

$$y_{\mathrm{ss}}(t) = ae^{-\mathrm{j}\omega t} + \bar{a}e^{\mathrm{j}\omega t}$$

Análise de resposta em frequência

Conceitos básicos

- Os coeficientes a e $\bar{a}$ podem ser determinados como segue

$$a = G(s)\frac{\omega}{s^2+\omega^2}(s+\mathrm{j}\omega)\bigg|_{s=-\mathrm{j}\omega} = -\frac{G(-\mathrm{j}\omega)}{2\mathrm{j}} \qquad \text{e} \qquad \bar{a} = \frac{G(\mathrm{j}\omega)}{2\mathrm{j}}$$

- Como $G(\mathrm{j}\omega)$ é um número complexo, ele pode ser escrito como

$$\begin{aligned} G(\mathrm{j}\omega) &= |G(\mathrm{j}\omega)|e^{\mathrm{j}\phi} \\ G(-\mathrm{j}\omega) &= |G(-\mathrm{j}\omega)|e^{-\mathrm{j}\phi} = |G(\mathrm{j}\omega)|e^{-\mathrm{j}\phi}, \qquad \phi = \angle G(\mathrm{j}\omega) \end{aligned}$$

- A resposta em regime permanente fica sendo

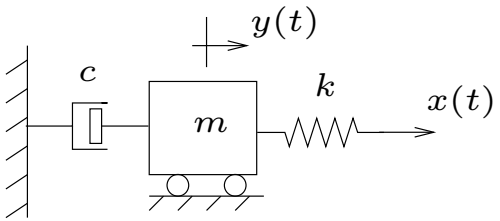
$$\begin{aligned} y_{\mathrm{ss}}(t) &= \frac{-G(-\mathrm{j}\omega)}{2\mathrm{j}}e^{-\mathrm{j}\omega t} + \frac{G(\mathrm{j}\omega)}{2\mathrm{j}}e^{\mathrm{j}\omega t} = |G(\mathrm{j}\omega)|\frac{e^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)} - e^{-\mathrm{j}(\omega t+\phi)}}{2\mathrm{j}} \\ &= |G(\mathrm{j}\omega)|\sin(\omega t+\phi) \end{aligned}$$

- Portanto, a relação de amplitude e ângulo entre a saída senoidal e a entrada senoidal, em regime permanente, é dada por

$$|G(\mathrm{j}\omega)| = \frac{|Y(\mathrm{j}\omega)|}{|X(\mathrm{j}\omega)|} \qquad \text{e} \qquad \angle G(\mathrm{j}\omega) = \angle\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{X(\mathrm{j}\omega)}$$

- A função $G(\mathrm{j}\omega)$ é chamada Função de Resposta em Frequência (FRF).

- Exemplo: Seja o sistema abaixo

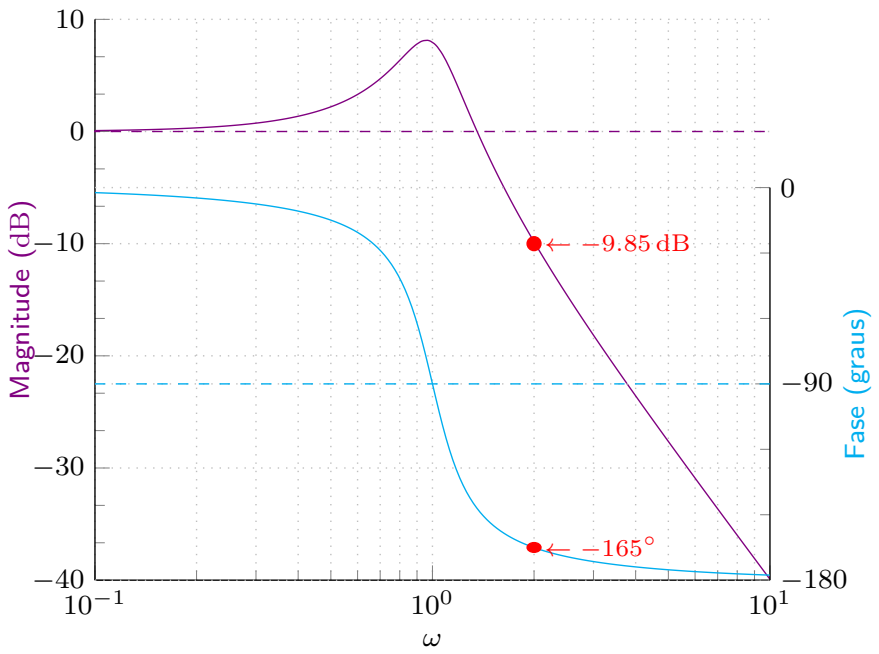


cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Assuma que $\zeta = 0.2$ e $\omega_n = 1$ rad/s.

Gráfico de magnitude e fase de $G(\mathrm{j}\omega)$



- De acordo com o gráfico, na frequência $\omega = 2$ rad/s, tem-se

$$|G(\mathrm{j}\omega)|_{\omega=2} = -9.85\,\mathrm{dB} = 0.32 \qquad \text{e} \qquad \angle G(\mathrm{j}\omega)|_{\omega=2} = -165^\circ = -2.89\ \mathrm{rad}$$

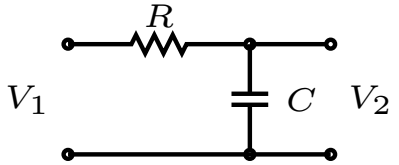
- Portanto, se for aplicada a entrada senoidal $x(t) = 5\sin(2t)$, então a saída será:

$$y_{\mathrm{ss}}(t) = 5 \times 0.32 \times \sin(2t - 2.89)$$

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

- Exemplo: Considere o circuito da figura abaixo.



- Sua função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{1}{\tau s+1}, \qquad \tau = RC$$

- Para $s = \mathrm{j}\omega$, tem-se

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\tau+1}, \qquad \phi(\mathrm{j}\omega) = \angle G(\mathrm{j}\omega) = -\arctan\omega\tau$$

- Portanto

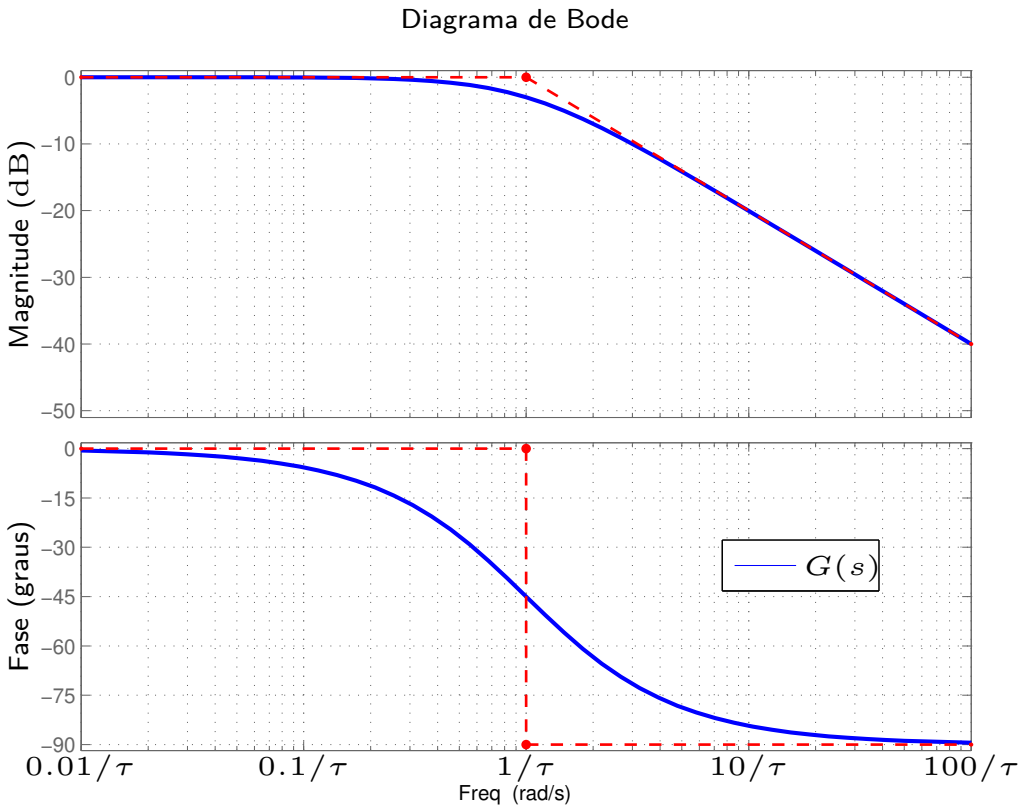
$$20\log|G(\mathrm{j}\omega)| = 20\log\frac{1}{(1+(\omega\tau)^2)^{1/2}} = -10\log(1+(\omega\tau)^2)\,\mathrm{dB}$$

- Para $\omega \ll 1/\tau$, $\quad 20\log|G(\mathrm{j}\omega)| \approx -10\log 1 = 0\,\mathrm{dB}$ $\quad\leftarrow$ Assíntota
- Para $\omega \gg 1/\tau$, $\quad 20\log|G(\mathrm{j}\omega)| \approx -20\log(\omega\tau)\,\mathrm{dB}$ $\quad\leftarrow$ Assíntota
- Para $\omega = 1/\tau$, $\quad 20\log|G(\mathrm{j}\omega)| = -10\log 2 = -3.01\,\mathrm{dB}$

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

- A figura abaixo apresenta diagrama de Bode de $G(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega\tau + 1}$.



- A frequência de canto ω_τ (do inglês *corner/break frequency*) ocorre na interseção das duas assíntotas (na mudança de inclinação).
- Para o exemplo acima, a frequência de canto (ou de quebra) é $\omega_\tau = 1/\tau$ rad/s.
- Observação: No Matlab, esse gráfico é obtido com o comando **bode(G)**.

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

- Exemplo: Resposta em frequência de um capacitor.

$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad I(s) = G(s)V(s) \quad \text{com} \quad G(s) = Cs$$

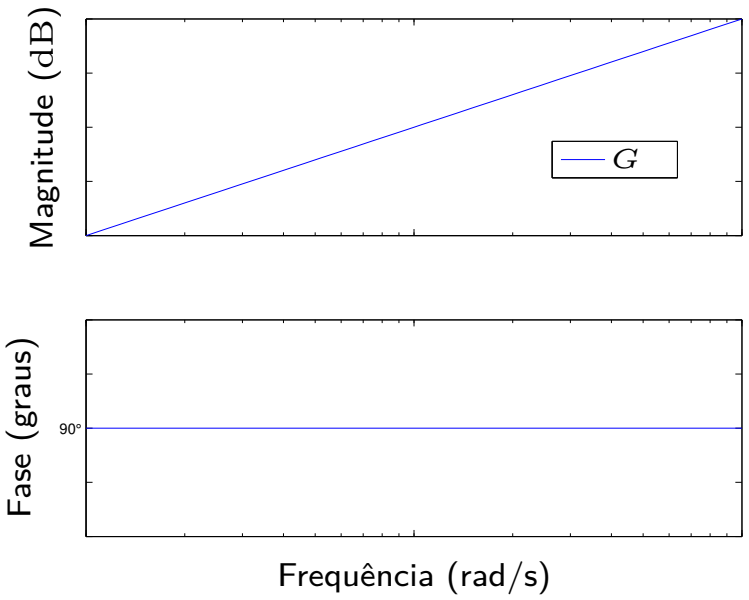
- A resposta em frequência é dada por

$$G(s) = Cs \quad \Rightarrow \quad G(\mathrm{j}\omega) = C\mathrm{j}\omega$$

- Assim

$$|G(\mathrm{j}\omega)| = C\omega \qquad \text{e} \qquad \phi = \angle G(\mathrm{j}\omega) = 90^\circ$$

- O diagrama de Bode está apresentado abaixo.



- Uma função de transferência pode ser decomposta nos seguintes fatores básicos:
  1. Ganho: $G(\mathrm{j}\omega) = K$
  2. Fatores integral e derivativo: $G(\mathrm{j}\omega) = [\mathrm{j}\omega]^{\mp 1}$
  3. Fatores de primeira ordem: $G(\mathrm{j}\omega) = [1 + \mathrm{j}\omega\tau]^{\mp 1}$
  4. Fatores quadrático: $G(\mathrm{j}\omega) = \left[1 + 2\zeta\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\mp 1}$
- Analisando cada caso, tem-se:
  1. Ganho $G(\mathrm{j}\omega) = K$.

$$20\log(K \times 10) = 20\log K + 20$$

$$20\log(K \times 10^n) = 20\log K + 20n$$

$$20\log K = -20\log(1/K)$$

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

2. Fatores integral e derivativo.

2.1 Caso $G(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$.

$$20\log\left|\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right| = -20\log\omega$$

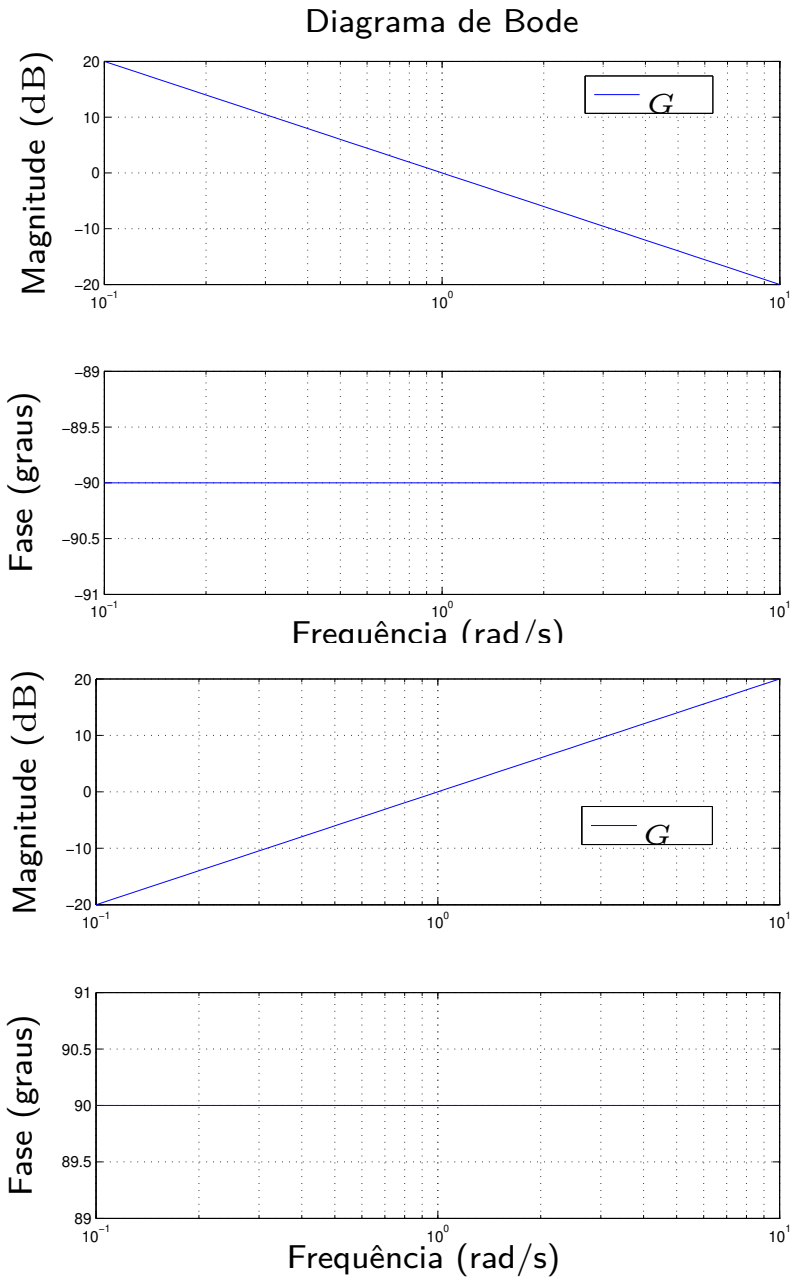
Como $G(\mathrm{j}\omega) = -\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega}$, tem-se

$$\angle G(\mathrm{j}\omega) = -90^\circ$$

2.2 Caso $G(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega$.

$$20\log|\mathrm{j}\omega| = 20\log\omega\,\mathrm{dB}$$

$$\angle G(\mathrm{j}\omega) = \angle\mathrm{j}\omega = 90^\circ$$

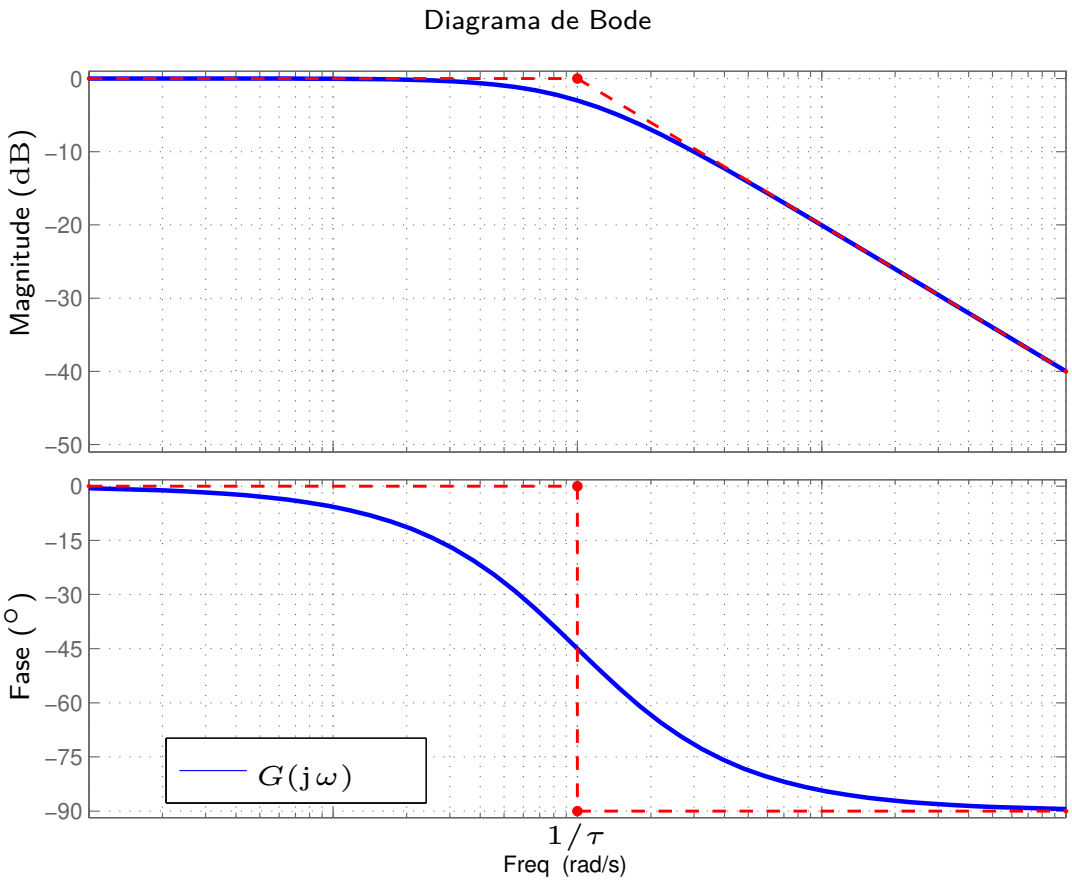


3. Fatores de primeira ordem.
   - Caso: $G(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega\tau} = \dfrac{1}{1+(\omega\tau)^2} - \mathrm{j}\,\dfrac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}$.
   - Calculando $20\log|G(\mathrm{j}\omega)|$, obtém-se
   $$20\log\left|\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega\tau}\right| = -20\log\sqrt{1+(\omega\tau)^2}\,\mathrm{dB}$$
   - Para $\omega \ll \dfrac{1}{\tau}$, tem-se
   $$-20\log\sqrt{1+(\omega\tau)^2} \approx -20\log 1 = 0\,\mathrm{dB}$$
   - Para $\omega \gg \dfrac{1}{\tau}$, tem-se
   $$-20\log\sqrt{1+(\omega\tau)^2} \approx -20\log\omega\tau\,\mathrm{dB}$$
   - Portanto, pode-se aproximar o gráfico por duas retas assíntotas em $\dfrac{1}{\tau}$
   - Ângulo de fase $\phi = \angle G(\mathrm{j}\omega) = \tan^{-1}(-\omega\tau)$:
     - em $\omega = 0 \quad\Rightarrow\quad \phi = 0$
     - em $\omega = \dfrac{1}{\tau} \quad\Rightarrow\quad \phi = -\tan^{-1}(1) = -45^\circ$
     - em $\omega \to \infty \quad\Rightarrow\quad \phi \to -90^\circ$

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

- Diagrama de Bode de $G(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}$



- Exercício: Esboce o diagrama de Bode para os seguintes sistemas: $\pm 1/(s \pm 1)$.

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

- Exemplo: Resposta em frequência de um compensador em avanço de fase:

$$K(s) = \hat{K}\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}, \qquad \hat{K} > 0, \qquad 0 < \alpha < 1$$

- A resposta em frequência é dada por

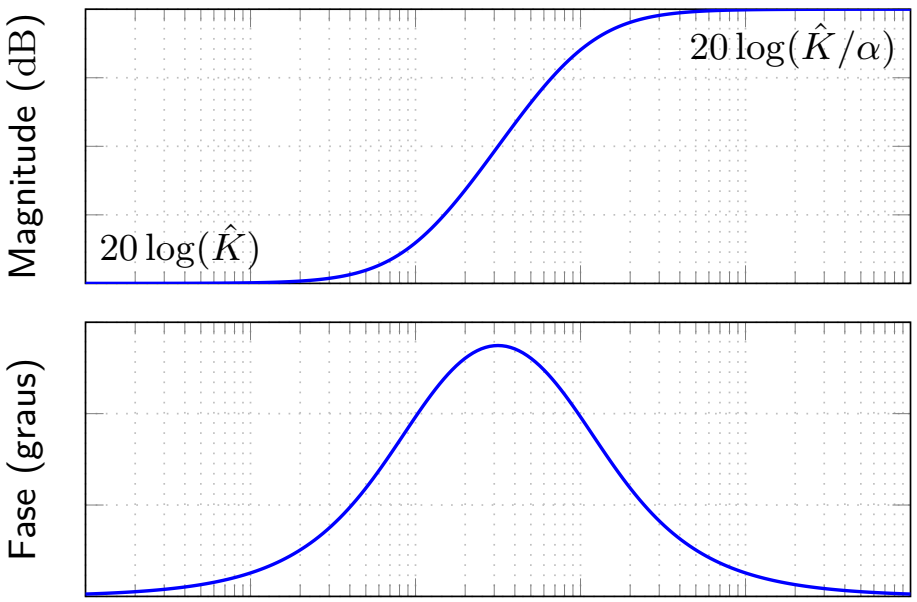
$$K(\mathrm{j}\omega) = \hat{K}\frac{T\mathrm{j}\omega+1}{\alpha T\mathrm{j}\omega+1}$$

- Portanto

$$|K(\mathrm{j}\omega)| = \hat{K}\frac{\sqrt{1+(\omega T)^2}}{\sqrt{1+(\alpha\omega T)^2}}$$

e

$$\begin{aligned}\phi &= \angle(1+\mathrm{j}\omega T) - \angle(1+\mathrm{j}\omega\alpha T)\\ &= \tan^{-1}(\omega T) - \tan^{-1}(\alpha\omega T)\end{aligned}$$



- Isso representa um filtro passa-alta.

- Exercício: Esboce o diagrama de Bode para o compensador em atraso ($\alpha > 1$).

4. Fatores quadráticos.

- Caso: $G(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{1 + 2\zeta(\mathrm{j}\omega/\omega_n) + (\mathrm{j}\omega/\omega_n)^2} = \dfrac{1}{1 + 2\zeta \mathrm{j}u - u^2}, \qquad u = \omega/\omega_n$

- Portanto, a magnitude é dada por

$$20\log|G(\mathrm{j}\omega)| = -10\log\left((1-u^2)^2 + 4\zeta^2u^2\right)\,\mathrm{dB}$$

e o ângulo de fase por

$$\phi = \angle G(\mathrm{j}\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{-2\zeta u}{1-u^2}\right)$$

- Note que para $u \ll 1$, ou seja $\omega \ll \omega_n$, tem-se $\phi \approx 0^\circ$ e

$$20\log|G(\mathrm{j}\omega)| \approx -10\log 1 = 0\,\mathrm{dB} \qquad \leftarrow \text{Assíntota}$$

- Por outro lado, para $u \gg 1$, ou seja $\omega \gg \omega_n$, tem-se

$$\phi \approx \tan^{-1}\left(\frac{-2\zeta}{-u}\right) \approx\rightarrow -180^\circ$$

$$20\log|G(\mathrm{j}\omega)| \approx -10\log u^4 = -40\log u\,\mathrm{dB} \qquad \leftarrow \text{Assíntota}$$

que fornece uma inclinação de $-40\,\mathrm{dB/dec}$.

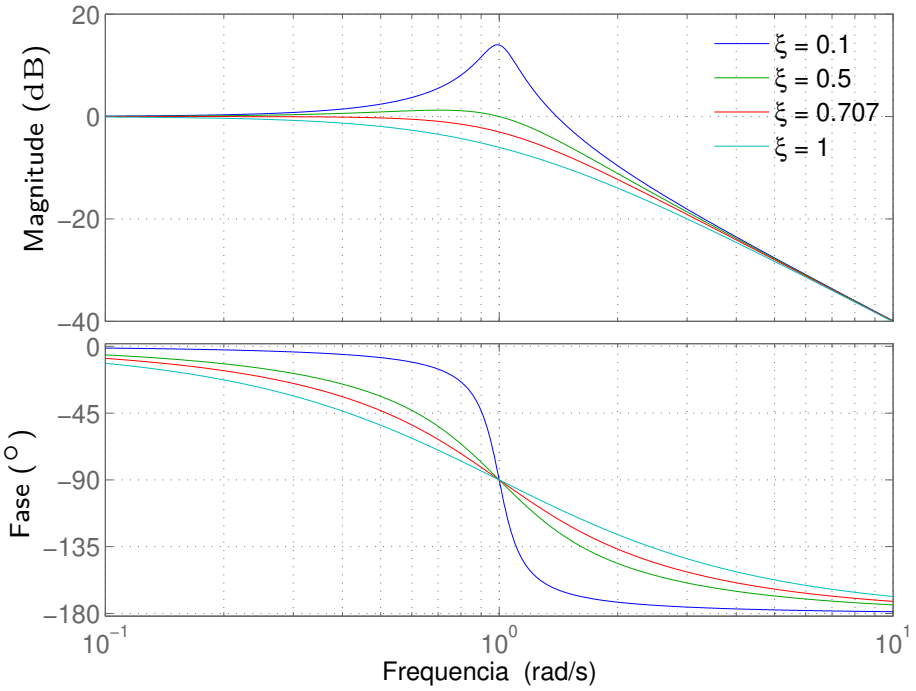
- Essas são as duas assíntotas que se encontram em $u = 1$, ou seja, $\omega = \omega_n$.

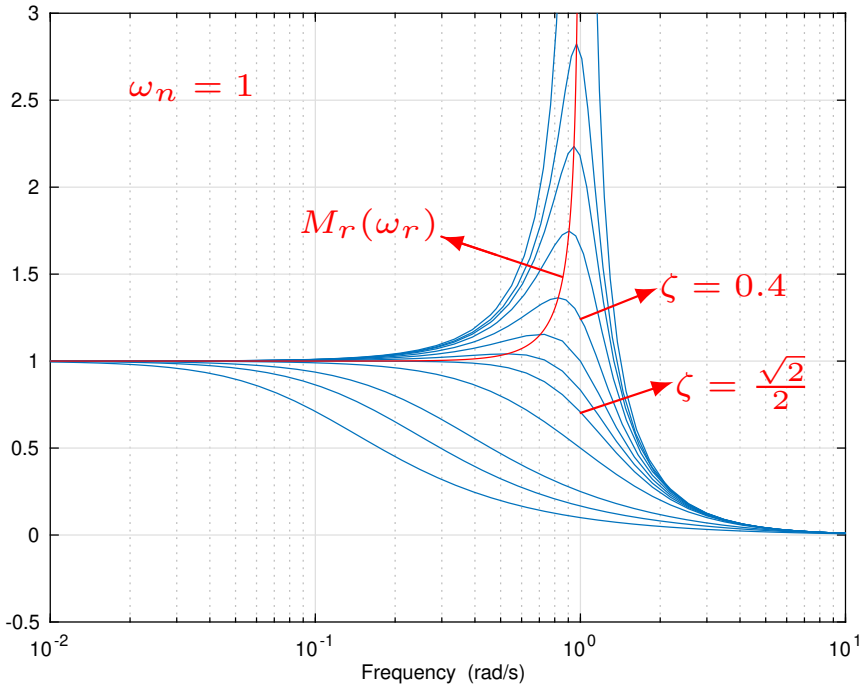
- Note que para $\omega = \omega_n$, tem-se $G(\mathrm{j}\omega_n) = 1/(\mathrm{j}2\zeta)$. Assim, $|G(\mathrm{j}\omega_n)| = 1/(2\zeta)$.

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

- Diagrama de Bode de $G(\mathrm{j}\omega) = \left(1 + 2\zeta \mathrm{j}\omega/\omega_n + (\mathrm{j}\omega/\omega_n)^2\right)^{-1}$.





- Observação: O valor máximo M_r ocorre na frequência de ressonância ω_r, encontrada derivando-se $|G(\mathrm{j}\omega)|^{-1}$ e igualando o resultado a zero:

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad \text{para} \quad \zeta \leq \sqrt{2}/2 \approx 0.707$$

$$M_r = |G(\mathrm{j}\omega_r)| = 1/(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}), \quad \zeta \leq 0.707$$

- Note que: $\omega_r \leq \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \leq \omega_n$

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

- Exemplo 1: Seja $G(s) = 2000\dfrac{(s+0.5)}{s(s+10)(s+50)}$
- Passos:
  1. Coloque $G(\mathrm{j}\omega)$ na forma abaixo:

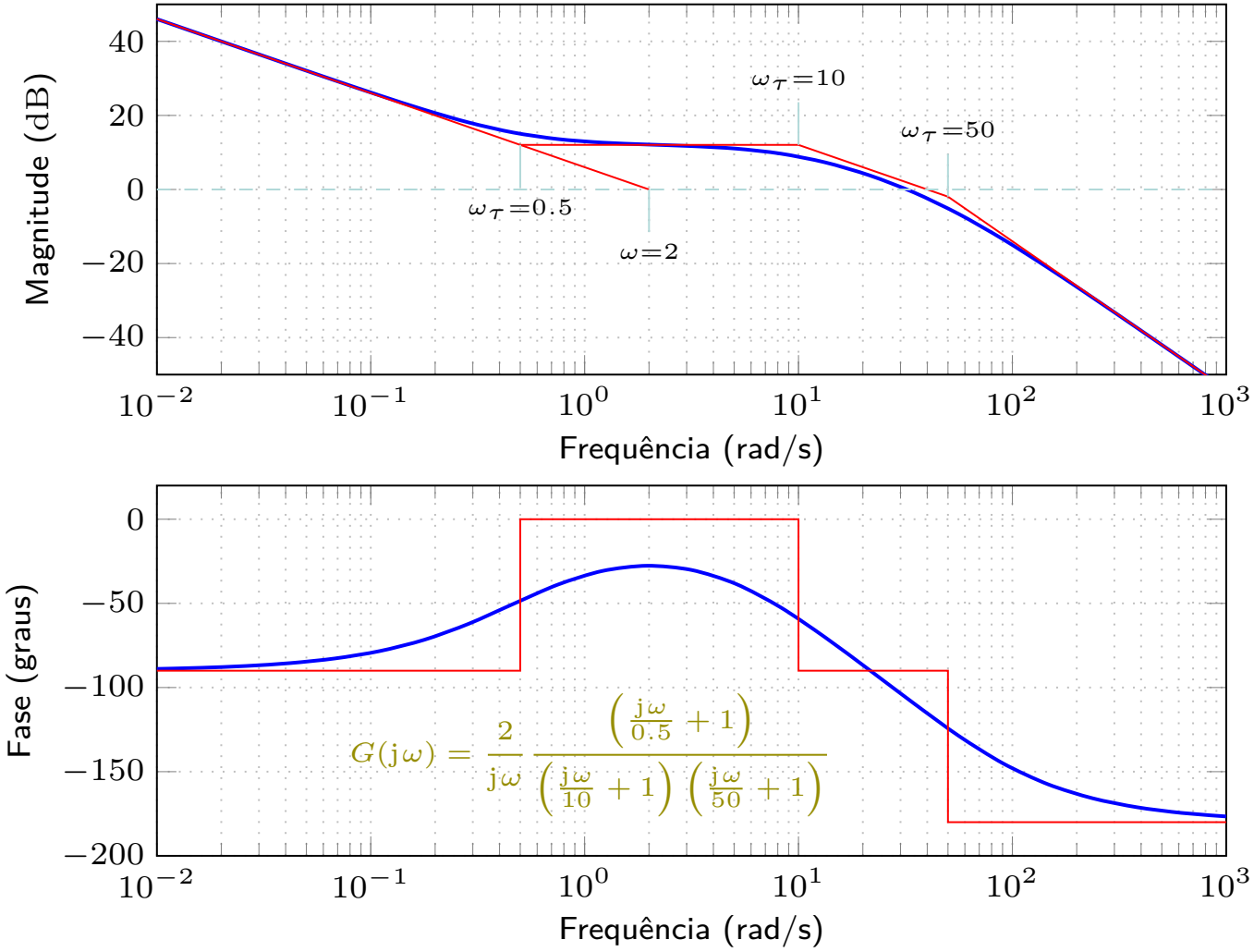
     $$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{2}{\mathrm{j}\omega}\frac{\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{0.5}+1\right)}{\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{10}+1\right)\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{50}+1\right)}$$

  2. As frequências de canto ocorrem em 0.5, 10 e 50 rad/s.
  3. Para $\omega \ll 1$, o termo $G(\mathrm{j}\omega)$ pode ser aproximado por $G(\mathrm{j}\omega) \approx \dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$

     Note que a assíntota de inclinação $-20\,\mathrm{dB/dec}$ é válida para $\omega \ll 0.5$, já que a primeira frequência de canto é em $\omega_\tau = 0.5$.
  4. Faça o esboço do termo do numerador $\left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{0.5}+1\right)$
  5. Faça o esboço do termo do denominador $\left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{10}+1\right)$
  6. Faça o esboço do termo do denominador $\left(\dfrac{\mathrm{j}\omega}{50}+1\right)$

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode



- Exercício: Esboce o diagrama de bode, com as respectivas assíntotas, do sistema de 2ª ordem $G(s) = \alpha^2/(s(s+\beta))$. Prove que as assíntotas se encontram em $\omega = \beta$ e a interseção do segmento $-40\,\mathrm{dB/dec}$ com o eixo $0\,\mathrm{dB}$ ocorre em $\omega = \alpha$.

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode

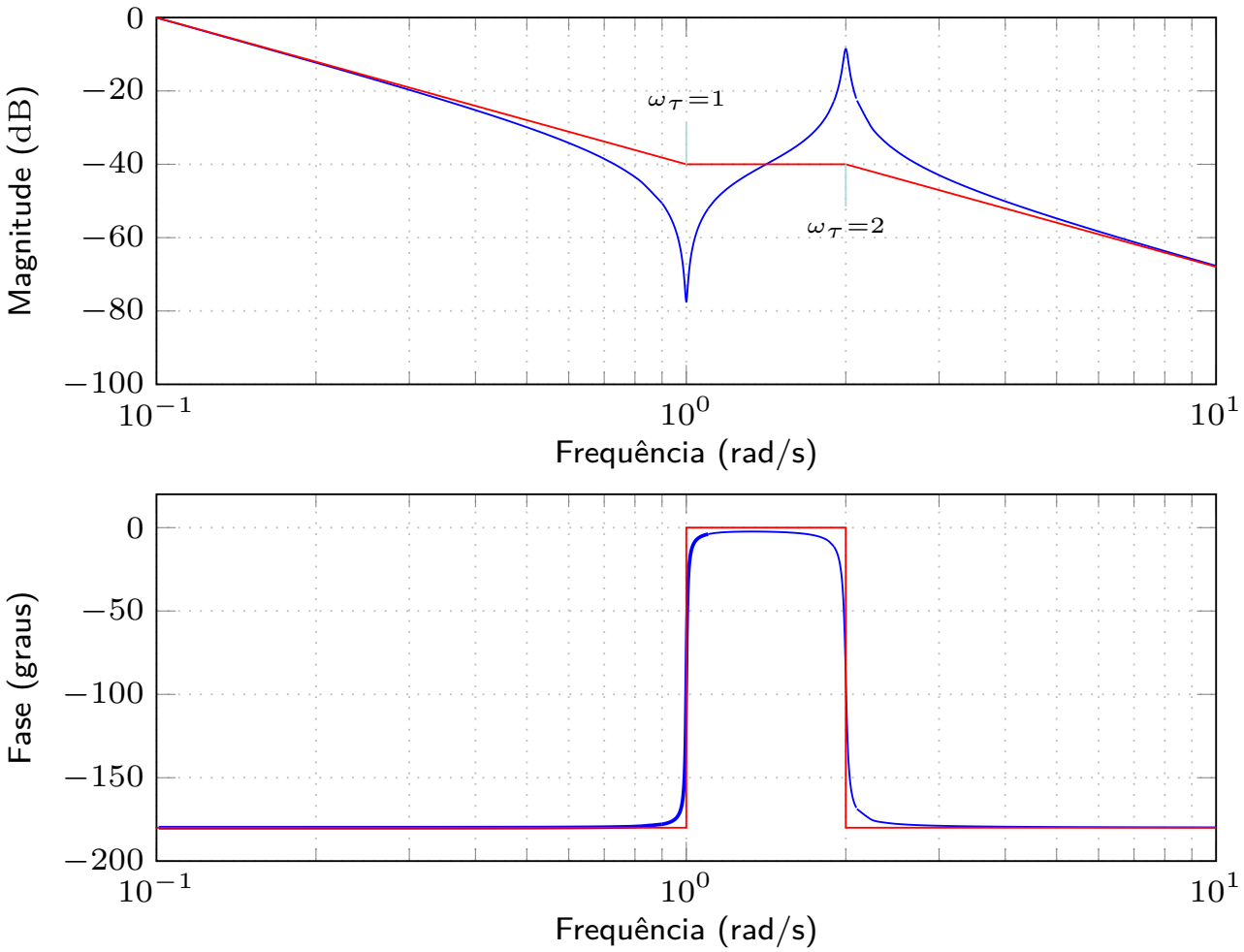
- Exemplo 2: Seja $G(s) = \dfrac{0.01(s^2 + 0.01s + 1)}{s^2\left(\dfrac{s^2}{4} + 0.02\dfrac{s}{2} + 1\right)}$

- Passos:
  1. Perceba que o numerador $(\mathrm{j}\omega)^2 + 0.01(\mathrm{j}\omega) + 1$ pode ser reescrito como $(\mathrm{j}\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta\mathrm{j}\omega/\omega_n + 1$ com $\zeta = 0.005$ e $\omega_n = 1$.
  2. Já o denominador $\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right)^2 + 0.02\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{2}\right) + 1$ pode ser reescrito como $(\mathrm{j}\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta\mathrm{j}\omega/\omega_n + 1$ com $\zeta = 0.01$ e $\omega_n = 2$.
  3. As frequências de canto ocorrem portanto em 1 e 2 rad/s.
  4. Para $\omega \ll 1$, o termo $G(\mathrm{j}\omega)$ pode ser aproximado por $G(\mathrm{j}\omega) \approx \dfrac{0.01}{(\mathrm{j}\omega)^2}$

     Note que a assíntota de inclinação $-40\,\mathrm{dB/dec}$ é válida para $\omega \ll 1$, já que a primeira frequência de canto é em $\omega_\tau = 1$.
  5. Faça o esboço do termo quadrático do numerador $\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1$ com $\omega_n = 1$ e $\zeta = 0.005$, cuja assíntota tem inclinação $40\,\mathrm{dB/dec}$.
  6. Faça o esboço do termo quadrático do denominador $\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1$ com $\omega_n = 2$ e $\zeta = 0.01$, cuja assíntota tem inclinação $-40\,\mathrm{dB/dec}$.

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Bode



- Amplitudes (aproximadas) dos picos:

$$-40 - 20\log\left(\frac{1}{2\zeta}\right)_{\zeta=0.005} = -80\,\mathrm{dB} \quad \text{e} \quad -40 + 20\log\left(\frac{1}{2\zeta}\right)_{\zeta=0.01} = -6\,\mathrm{dB}$$

Análise de resposta em frequência

Sistema estável de fase mínima

- Um sistema é dito estável de fase mínima quando seus zeros também forem estáveis.
- Considere a seguinte planta estável de fase mínima:

$$G(s) = \frac{s+1}{s+10}$$

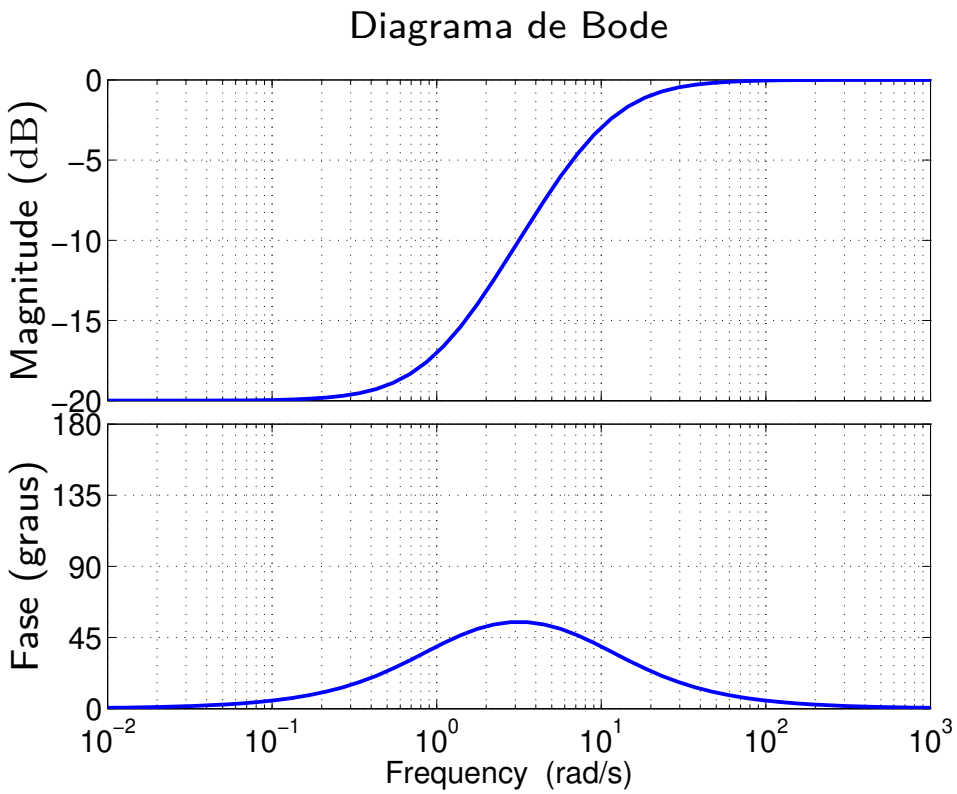
- Sua fase $\angle G(s)$ é dada por:

$$\begin{aligned}\angle G(s) &= \angle(\mathrm{j}\omega + 1) - \angle(\mathrm{j}\omega + 10)\\ &= \tan^{-1}\frac{\omega}{1} - \tan^{-1}\frac{\omega}{10}\end{aligned}$$

$$\omega \to 0,\ 0 - 0 = 0$$

$$\omega \to \infty,\ 90^\circ - 90^\circ = 0$$

$$\omega = 1,\ 45^\circ - 6^\circ = 39^\circ$$



Análise de resposta em frequência

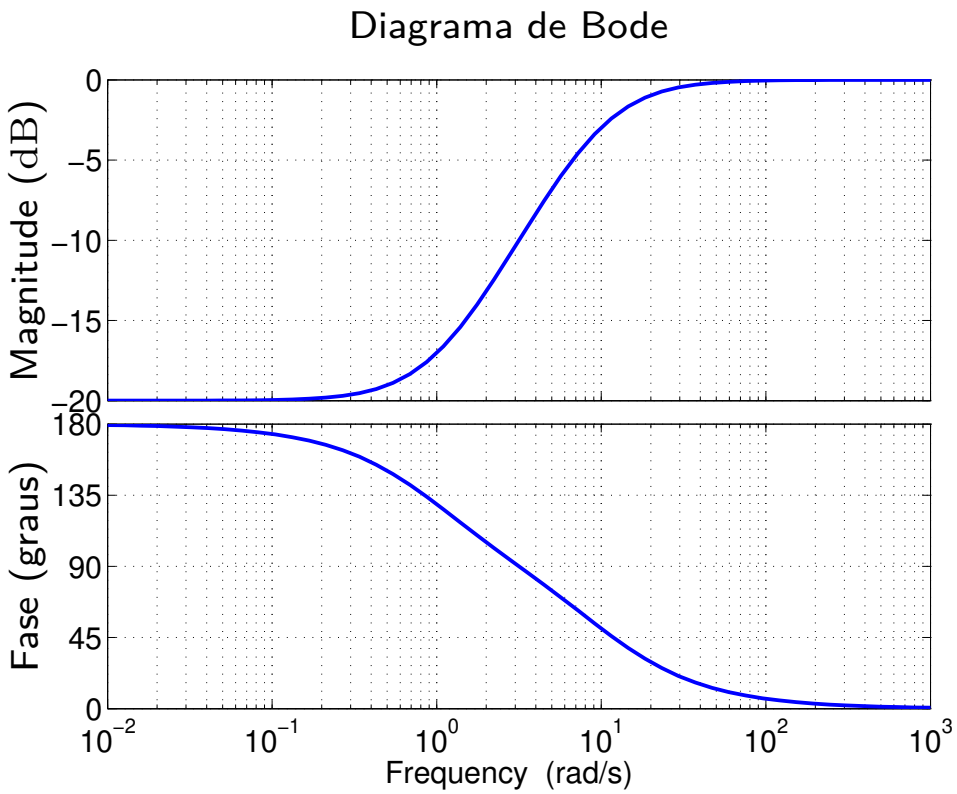
Sistema estável de fase não mínima

- Um sistema é dito estável de fase não mínima se algum zero for instável.
- Considere a seguinte planta estável de fase não mínima:

$$G(s) = \frac{s-1}{s+10}$$

- Sua fase $\angle G(s)$ é dada por:

$$\begin{aligned}\angle G(s) &= \angle(\mathrm{j}\omega - 1) - \angle(\mathrm{j}\omega + 10)\\ &= \tan^{-1}\frac{\omega}{-1} - \tan^{-1}\frac{\omega}{10}\\ \omega \to 0,\ & 180^\circ - 0 = 180^\circ\\ \omega \to \infty,\ & 90^\circ - 90^\circ = 0\end{aligned}$$



Análise de resposta em frequência

Frequência de ressonância e banda passante

- Considere o sistema padrão de segunda ordem:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

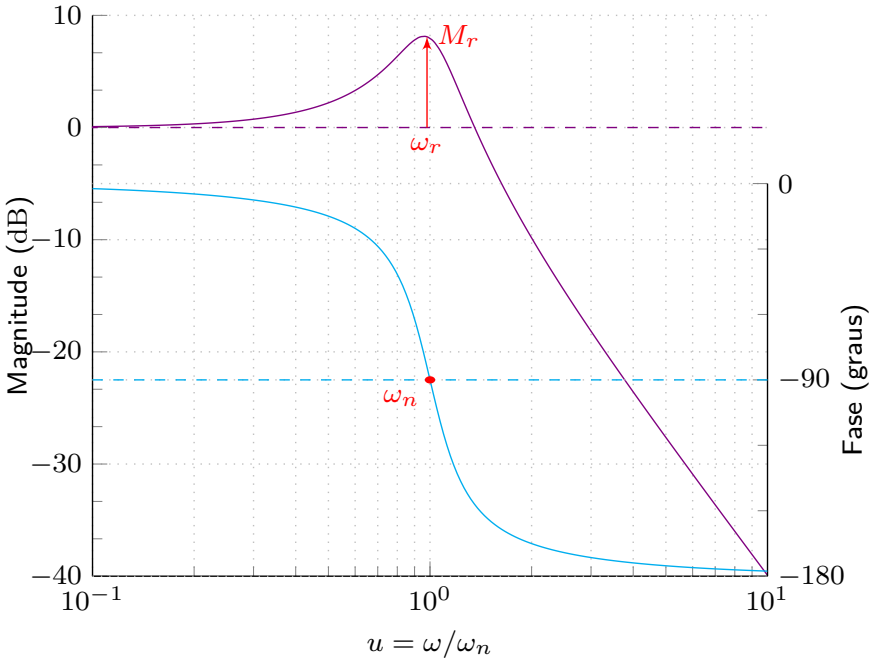
- Sua função de resposta em frequência é $T(\mathrm{j}\omega) = Me^{\mathrm{j}\alpha}$ com

$$M = \left((1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2\right)^{-1/2}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{-2\zeta u}{1-u^2}\right), \quad u = \omega/\omega_n$$

- Na ressonância ($0 \leq \zeta \leq \sqrt{2}/2$), tem-se:

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2},$$
$$M_r = 1/(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})$$

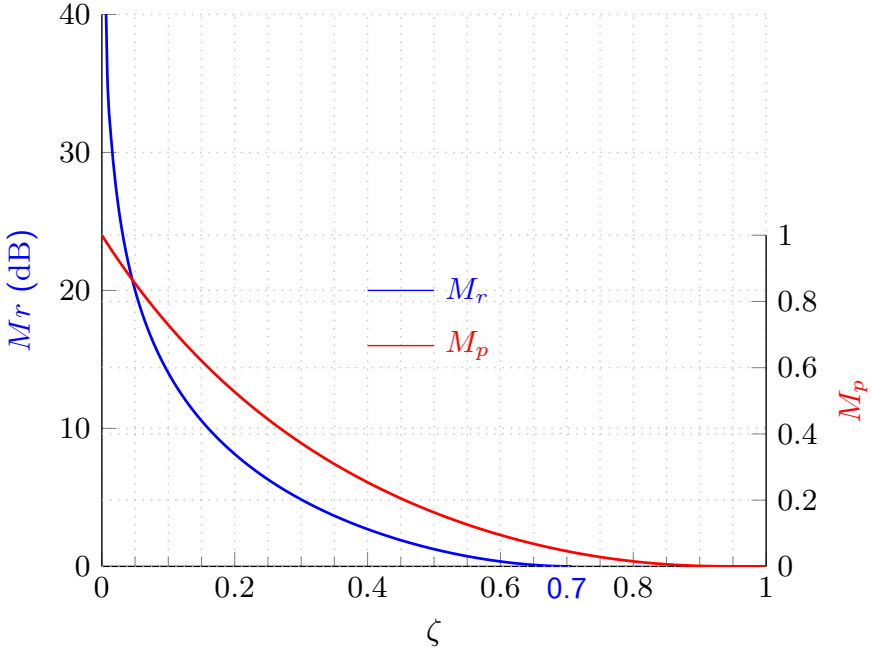
- Note que:
  - $\zeta \to 0$ implica que $\omega_r \to \omega_n$;
  - $\zeta = \sqrt{2}/2$ implica que $M_r = 1$;
  - $\omega_r \leq \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \leq \omega_n$.

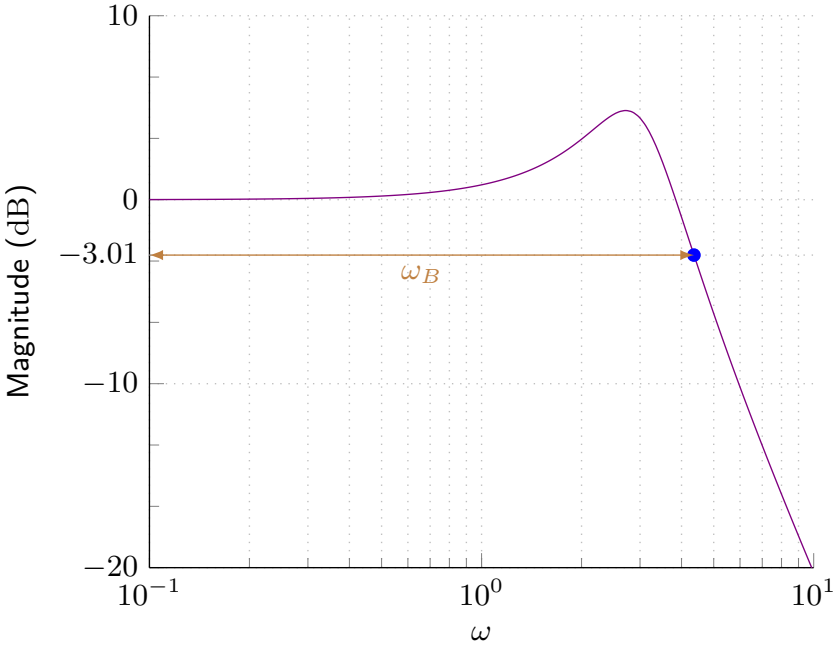


Análise de resposta em frequência

Frequência de ressonância e banda passante

- A figura a esquerda apresenta M_r e M_p para o sistema padrão de 2ª ordem.





- A figura a direita apresenta a banda passante ω_B (*bandwidth* ou *cutoff frequency*) , que representa a faixa de frequência em que $|T(\mathrm{j}\omega)| > -3.01\,\mathrm{dB}$.
- Para sistemas pouco amortecidos, é razoável do ponto de vista prático assumir:

$$\omega_B \approx \omega_r \approx \omega_n$$

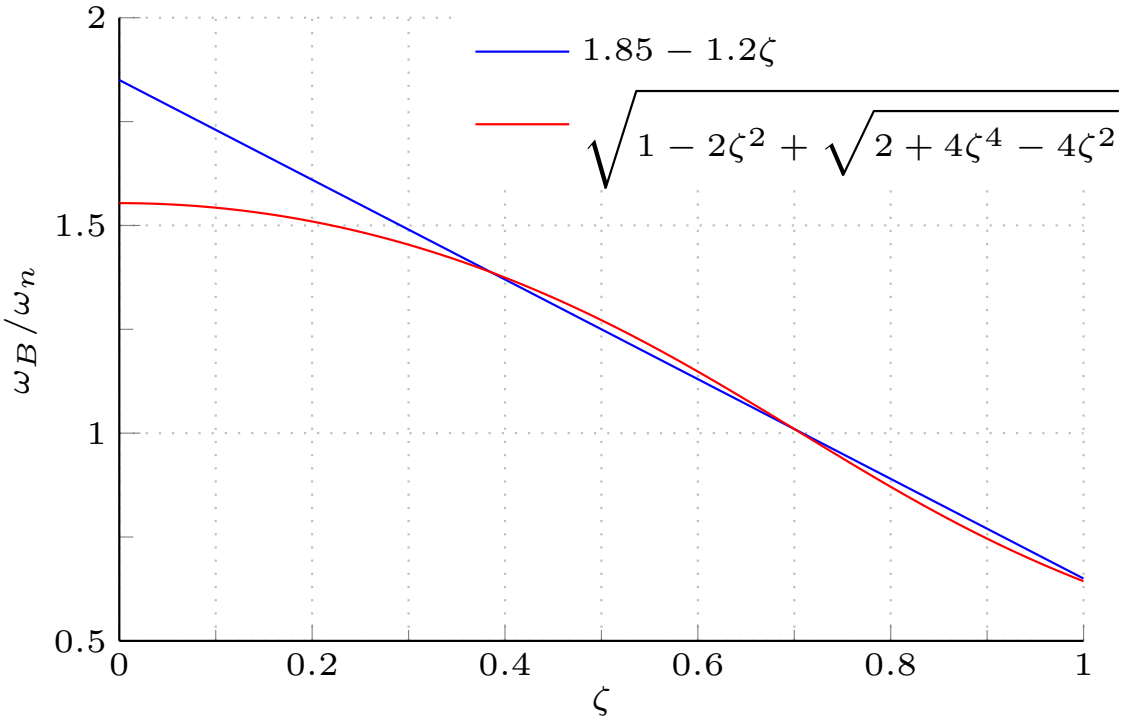
Análise de resposta em frequência

Frequência de ressonância e banda passante

- A banda passante (largura de banda) ω_B está relacionada com ω_n por

$$\frac{\omega_B}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 + 4\zeta^4 - 4\zeta^2}}$$

- A figura apresenta o gráfico de ω_B/ω_n e da aproximação $\omega_B/\omega_n \approx 1.85 - 1.2\zeta$

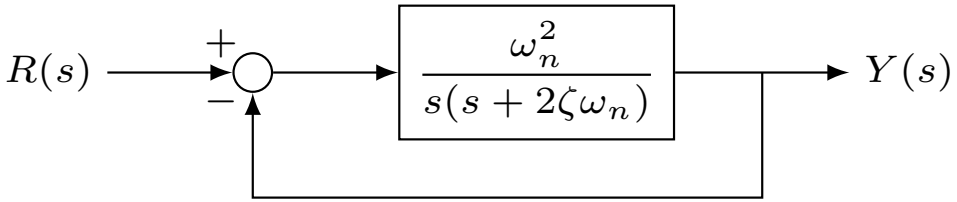


- Note que $\omega_B = \omega_n$ para $\zeta = \sqrt{2}/2$.

Análise de resposta em frequência

Resposta transitória

- Existe uma relação entre a resposta transitória ao degrau e a resposta em frequência.
- Considere a malha de controle abaixo.



- O sistema em malha fechada é dado por

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Foi visto que a resposta ao degrau desse sistema é dada por

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right), \quad t \geq 0$$

em que $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

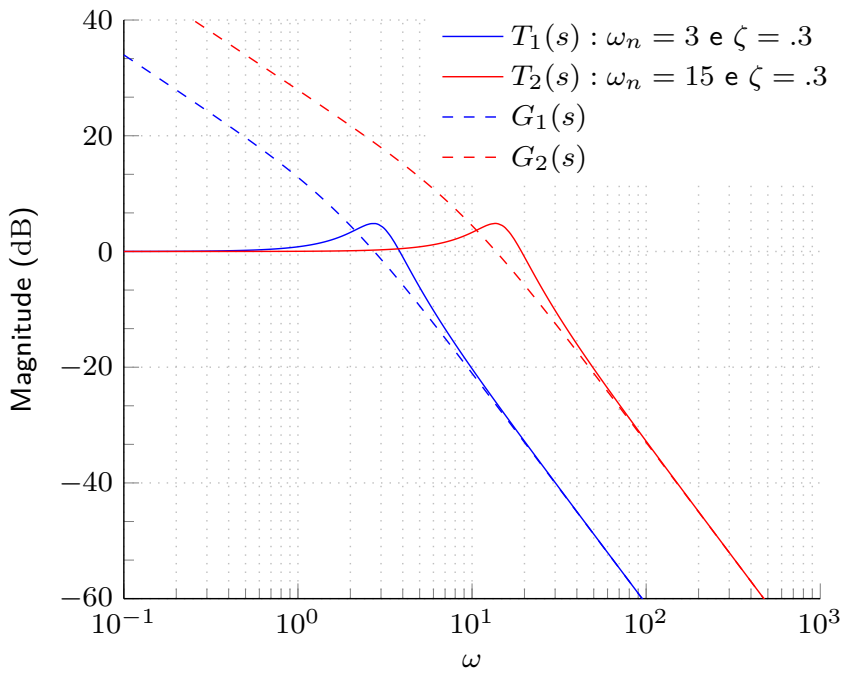
- Também foi visto que o sobressinal máximo é dado por $M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$

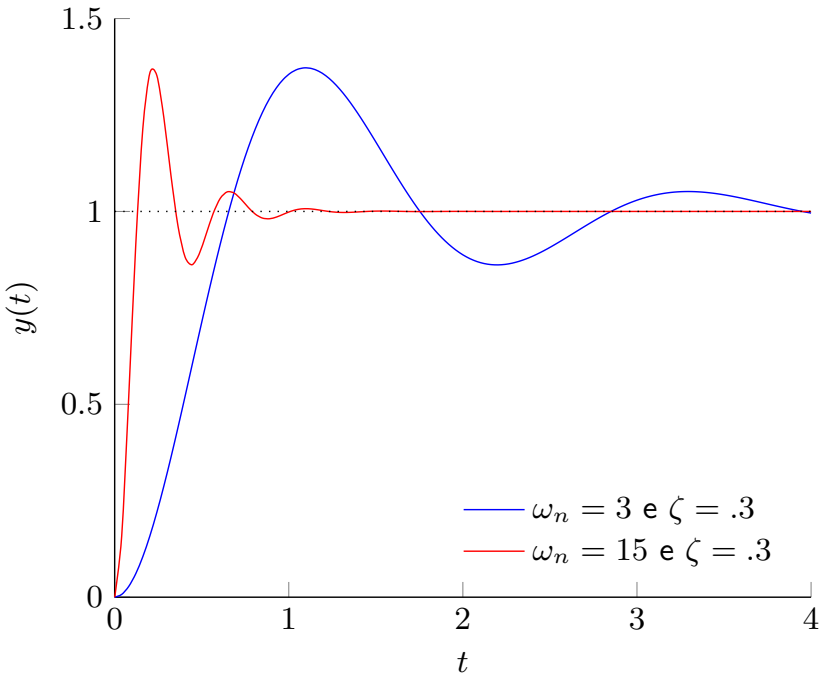
Análise de resposta em frequência

Resposta transitória

- A figura a esquerda apresenta o diagrama de Bode em magnitude de

$$G(s) = \omega_n^2/(s(s + 2\zeta\omega_n))$$





- A figura a direita apresenta a resposta ao degrau do respectivo sistema em malha fechada $T(s) = G(s)/(1 + G(s))$.
- Note que ω_r é um indicativo da velocidade transitória do sistema, já que o tempo de subida t_r é inversamente proporcional a $\omega_r \approx \omega_n$, para $\zeta \ll 1$.

Análise de resposta em frequência

Erro estacionário

- Considere a planta abaixo

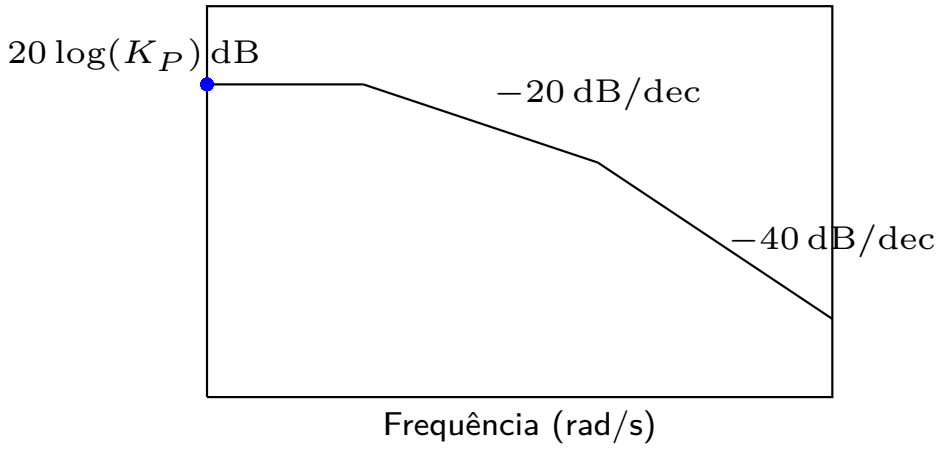
$$G(s) = \frac{K}{s^N} \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

- O sistema será do tipo 0 se $N = 0$.

- Para $N = 0$, o erro estático de posição e_{ss} é dado por:

$$e_{\text{ss}} = \frac{1}{1 + K_P}, \qquad \text{com} \qquad K_P = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{\omega \to 0} G(\mathrm{j}\omega) = K$$

- Note que K_P é dado pelo ganho DC.



Análise de resposta em frequência

Erro estacionário

- Para $N = 1$ (sistema tipo 1), erro estático de velocidade e_{ss} é dado por:

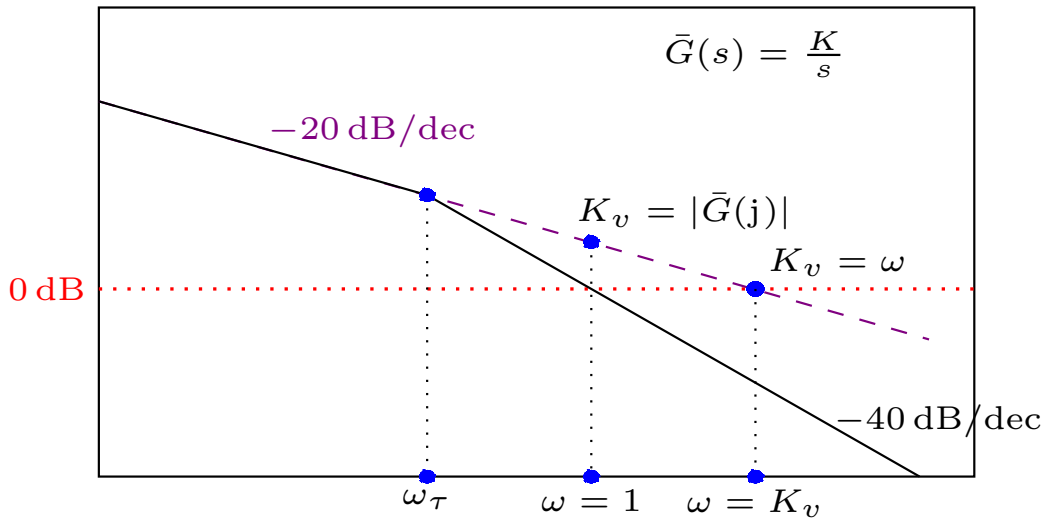
$$e_{\text{ss}} = \frac{1}{K_v} \qquad \text{com} \qquad K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = K$$

- Quando $\omega \ll 1/T_1$, tem-se

$$G(\mathrm{j}\omega) \approx \bar{G}(\mathrm{j}\omega) = \frac{K_v}{\mathrm{j}\omega} \quad \Rightarrow \quad |\bar{G}(\mathrm{j}\omega)|_{\omega=1} \approx \left|\frac{K_v}{\mathrm{j}}\right| \quad \Rightarrow \quad K_v = |\bar{G}(\mathrm{j})|$$

- Pode-se também mostrar que K_v é numericamente igual a interseção do segmento inicial de $-20\,\mathrm{dB/dec}$, ou sua extensão $\bar{G}(s)$, com o eixo $0\,\mathrm{dB}$.

$$\begin{aligned} 0\,\mathrm{dB} &= 20 \log 1 \\ &= 20 \log \left|\frac{K_v}{\mathrm{j}\omega}\right|_{\omega=K_v} \\ &= 20 \log \left|\bar{G}(\mathrm{j}\omega)\right|_{\omega=K_v} \end{aligned}$$



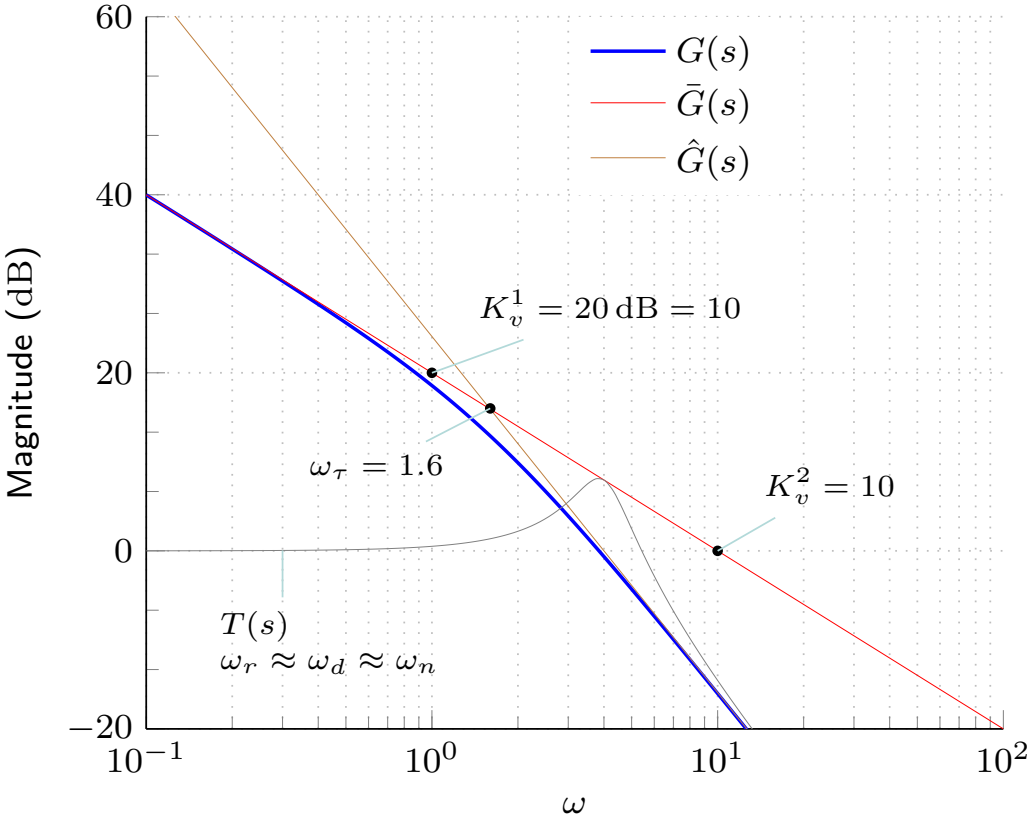
Análise de resposta em frequência

Erro estacionário

- Exemplo: Considere a planta $G(s)$ dada por

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}, \quad \text{com } \omega_n = 4 \text{ e } \zeta = 0.2$$

- Para essa planta, $K_v = \dfrac{\omega_n}{2\zeta} = 10$ e a frequência de canto é $\omega_\tau = 2\zeta\omega_n = 1.6$.
- Diagrama de Bode de G com as assíntotas $\bar{G}$ $(-20\,\mathrm{dB/dec})$ e $\hat{G}$ $(-40\,\mathrm{dB/dec})$.



$$\bar{G}(s) = \frac{K_v}{s}$$

$$\hat{G}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2}$$

$$K_v^1 = |\bar{G}(\mathrm{j}\omega)|_{\omega=1}$$

$$K_v^2 = \left\{ \omega \;\middle|\; |\bar{G}(\mathrm{j}\omega)| = 1 \right\}$$

Análise de resposta em frequência

Erro estacionário

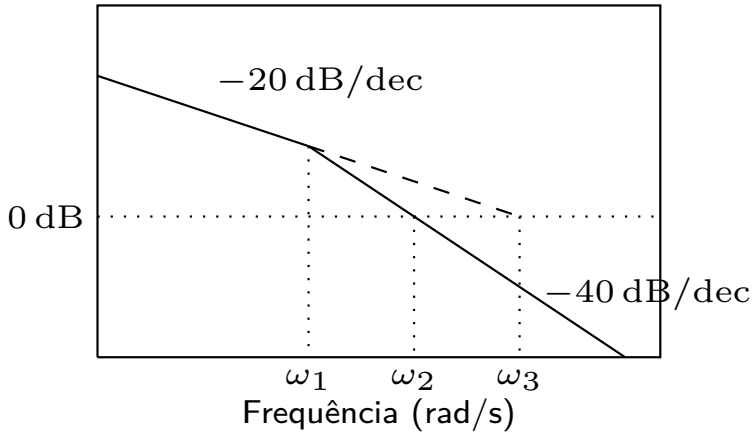
- Exemplo: A planta de um servomotor em malha aberta é dada por

$$G(s) = \frac{K}{s(Js+F)} = \frac{\omega_n^2}{s(s+F/J)}, \qquad \omega_n = \sqrt{K/J}$$

cuja função de transferência em malha fechada fica sendo

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + F/Js + \omega_n^2} \qquad \rightarrow \qquad \text{que fornece } \zeta = \frac{F}{2J\omega_n} = \frac{F}{2\sqrt{KJ}}$$

- Note que ζ pode ser determinado do diagrama de Bode como segue. Seja ω_1 a frequência de canto e ω_2 a interseção do segmento $-40\,\mathrm{dB/dec}$ com o eixo $0\,\mathrm{dB}$.



  - Note que $\omega_1 = F/J$ e $\omega_2 = \omega_n$
  - Sabendo que $\omega_3 = K_v = K/F$ tem-se

$$\omega_3\omega_1 = \omega_2^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_3/\omega_2 = \omega_2/\omega_1$$

  - No diagrama de Bode

$$\log\omega_3 - \log\omega_2 = \log\omega_2 - \log\omega_1$$

  - Portanto, ω_2 está no meio de ω_3 e ω_1

- Assim, o coeficiente de amortecimento é dado por $\zeta = \dfrac{F}{2\sqrt{KJ}} = \dfrac{\omega_1}{2\omega_2}$

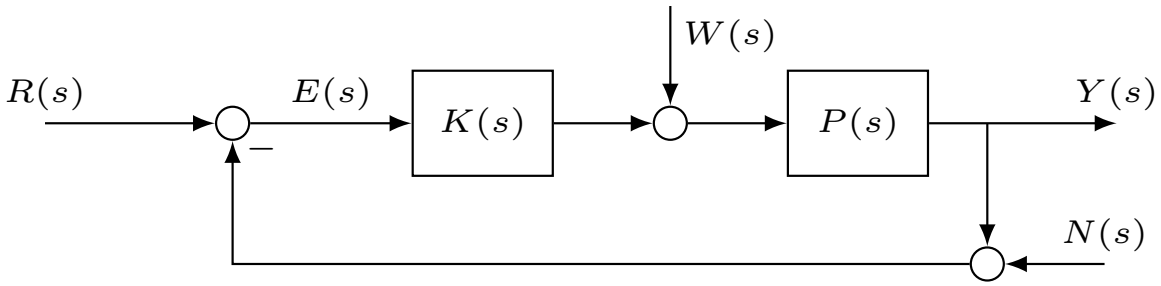
Análise de resposta em frequência

Exemplo

- Exemplo: Considere a planta $P(s)$ dada por

$$P(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)}$$

e a malha de controle apresentada abaixo.



- Especificações de desempenho:
  1. Largura de banda do sistema de malha fechada menor que 1 Hz;
  2. Sobressinal a uma entrada degrau menor que 15%;
  3. Erro estacionário nulo a uma entrada em degrau.
- Tipo do controlador $K(s)$ proposto é dado por

$$K(s) = \frac{K(s^2 + as + b)}{s + c}$$

em que K, a, b e c são os parâmetros a serem projetados. Note que para $c = 0$, obtém-se um controlador PID com $K_P = aK$, $K_D = K$, $K_I = bK$.

Análise de resposta em frequência

Exemplo

- Como $P(s)$ já é do tipo 1, basta garantir que $K(s)P(s)$ continue do tipo 1, para que o erro estacionário a entrada degrau seja nulo.
- Para um sobressinal $M_p = 15\%$, a fórmula do máximo sobressinal

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

  fornece $\zeta = 0.52$.

- Para uma largura de banda $\omega_B = 6.28$ rad/s e um fator de amortecimento $\zeta = 0.52$, a aproximação linear

$$\frac{\omega_B}{\omega_n} \approx -1.2\zeta + 1.85, \qquad \text{para } 0.3 \leq \zeta \leq 1$$

  fornece $\omega_n = 5.11$ rad/s.

- Assim, é esperado que alocando-se um par de polos complexos dominantes em

$$s = -\zeta\omega_n \pm \mathrm{j}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \qquad \text{com } \zeta = 0.52 \text{ e } \omega_n = 5.11$$

  as especificações acima sejam satisfeitas.

Análise de resposta em frequência

Exemplo

- A função de transferência em malha aberta é dada por

$$K(s)P(s) = \frac{K(s^2 + as + b)}{s(s^2 + 2s + 10)(s + c)}$$

e em malha fechada por

$$T(s) = \frac{K(s)P(s)}{1 + K(s)P(s)} = \frac{K(s^2 + as + b)}{s^4 + (2 + c)s^3 + (10 + 2c + K)s^2 + (10c + Ka)s + Kb}$$

- A equação característica é dada por:

$$s^4 + (2 + c)s^3 + (10 + 2c + K)s^2 + (10c + Ka)s + Kb = 0$$

que é de 4ª ordem e pode ser escrita como o produto de duas de 2ª ordem.

- A equação característica desejada é dada por

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s^2 + d_1 s + d_0) = 0$$

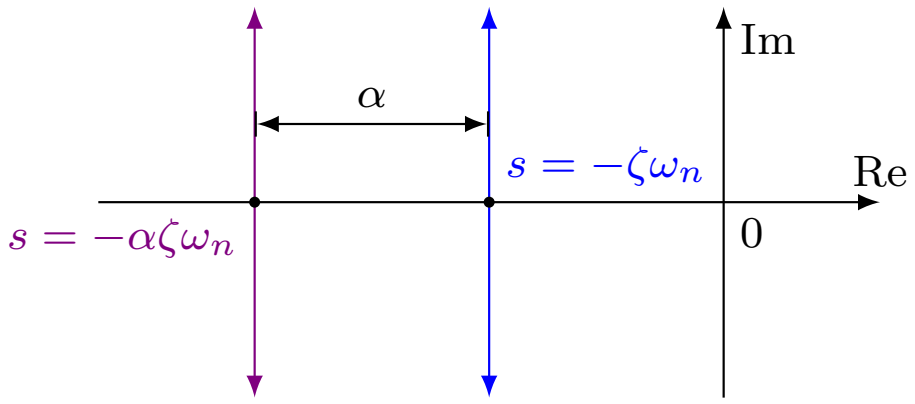
em que ζ e ω_n foram previamente selecionados.

- Para que as raízes de $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ sejam dominantes, as raízes de $s^2 + d_1 s + d_0$ devem ser posicionadas a uma distância α significativamente longe.

Análise de resposta em frequência

Exemplo

- Escolhendo $d_1 = 2\alpha\zeta\omega_n$, as raízes de $s^2 + d_1 s + d_0 = 0$ estarão na linha vertical no plano complexo dada por $s = -\alpha\zeta\omega_n$, como ilustrado na figura abaixo.



- Note que se d_0 for escolhido como sendo $d_0 = \alpha^2\zeta^2\omega_n^2$, então

$$s^2 + d_1 s + d_0 = (s + \alpha\zeta\omega_n)^2 = 0$$

e as duas raízes (idênticas) serão reais e amortecidas.

- O polinômio desejado fica sendo

$$s^4 + [2\zeta\omega_n(1+\alpha)]s^3 + [\omega_n^2(1+\alpha\zeta^2(\alpha+4))]s^2 + \cdots$$
$$+ [2\alpha\zeta\omega_n^3(1+\zeta^2\alpha)]s + \alpha^2\zeta^2\omega_n^4 = 0$$

- Os parâmetros de projeto são dados por: $\zeta = 0.52$, $\omega_n = 5.11$ e $\alpha = 12$.

Análise de resposta em frequência

Exemplo

- Comparando coeficientes de ambos os polinômios de 4ª, obtém-se

$$
\begin{aligned}
2 + c &= 2\zeta\omega_n(1+\alpha) \\
10 + 2c + K &= \omega_n^2(1+\alpha\zeta^2(4+\alpha)) \\
10c + Ka &= 2\alpha\zeta\omega_n^3(1+\zeta^2\alpha) \\
Kb &= \alpha^2\zeta^2\omega_n^4
\end{aligned}
$$

- Resolvendo esse sistema, obtém-se $a = 5.17$, $b = 21.45$, $c = 67.09$ e $K = 1238$.

- Portanto, o controlador obtido é dado por

$$K(s) = 1238\frac{s^2 + 5.17s + 21.45}{s + 67.09}$$

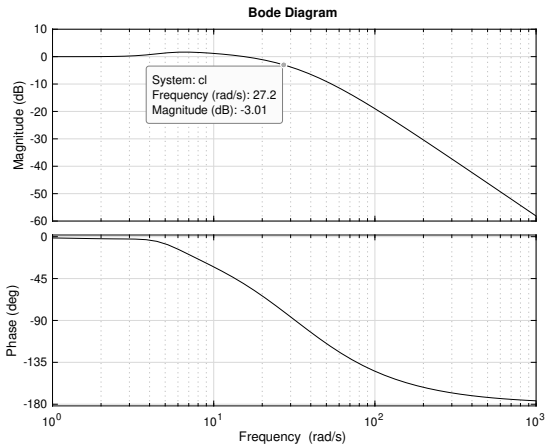
- O sistema em malha fechada fornece um sobressinal $M_p = 14.4\%$, um tempo de acomodação $t_s = 0.96$ segundos e uma banda passante $\omega_B = 27.2$ rad/s.

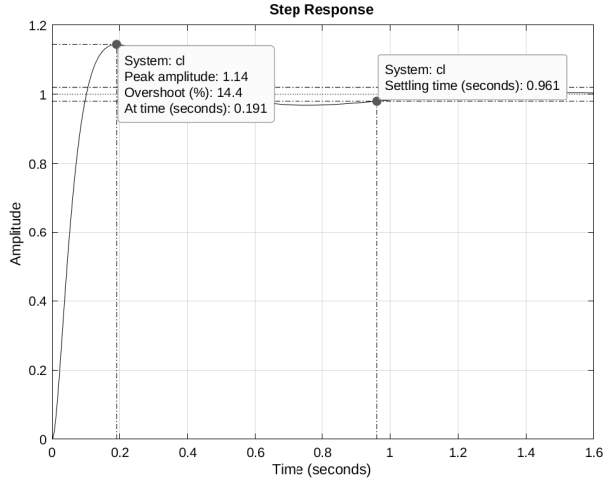
- Percebe-se que esse o controlador $K(s)$ forneceu um sobressinal adequado porém não atendeu a especificação sobre a banda passante.

Análise de resposta em frequência

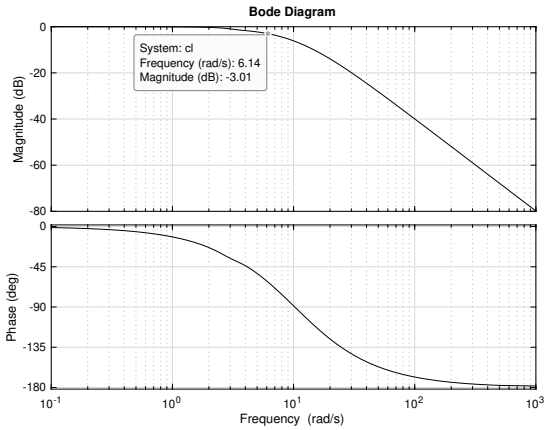
Exemplo

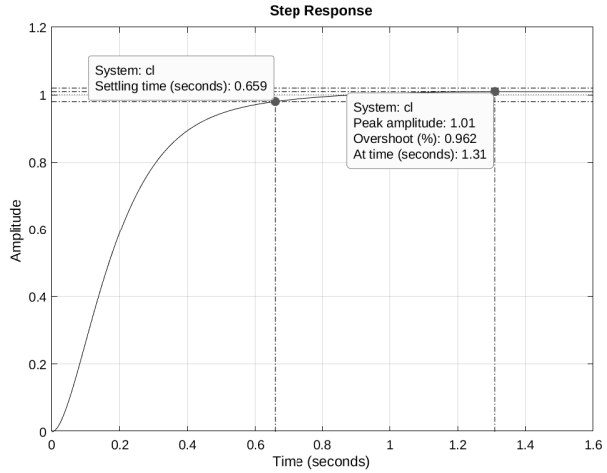
- A Figura abaixo apresenta o diagrama de Bode e a resposta ao degrau do sistema.





- Alterando os parâmetros para $\zeta = 0.3$, $\omega_n = 3.1$ e $\alpha = 11$, o controlador obtido $K(s) = 102(s^2 + 1.8s + 9.9)/(s + 20.3)$ atendeu às especificações desejadas.





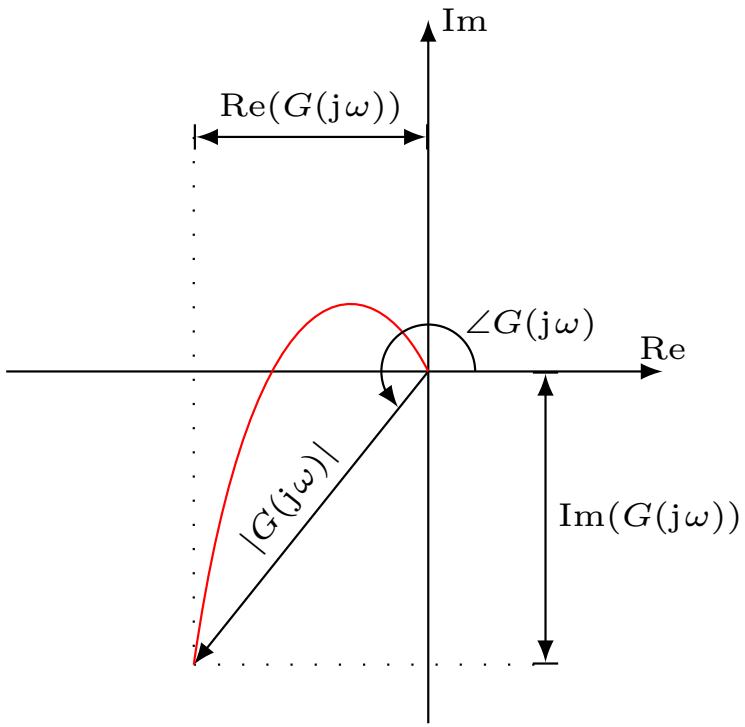
Análise de resposta em frequência

Diagrama de Nyquist

- O diagrama de Nyquist é uma representação paramétrica no plano complexo de $G(s)$ com $s = \mathrm{j}\omega$, ou seja:

$$G(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{Re}(G(\mathrm{j}\omega)) + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}(G(\mathrm{j}\omega)) = |G(\mathrm{j}\omega)|\angle G(\mathrm{j}\omega)$$

- O diagrama de Nyquist apresenta o gráfico de $\mathrm{Re}(G(\mathrm{j}\omega)) \times \mathrm{Im}(G(\mathrm{j}\omega))$ em função de $\omega \in \mathbb{R}$.



- Como ω pode assumir valores tanto positivos quanto negativos, o diagrama de Nyquist é simétrico com relação ao eixo real.

- A seguir serão apresentados exemplos de diagramas de Nyquist para sistemas padrões considerando ω positivo.
- Observação: No Matlab, o diagrama de Nyquist é obtido com o comando **nyquist(G)**.

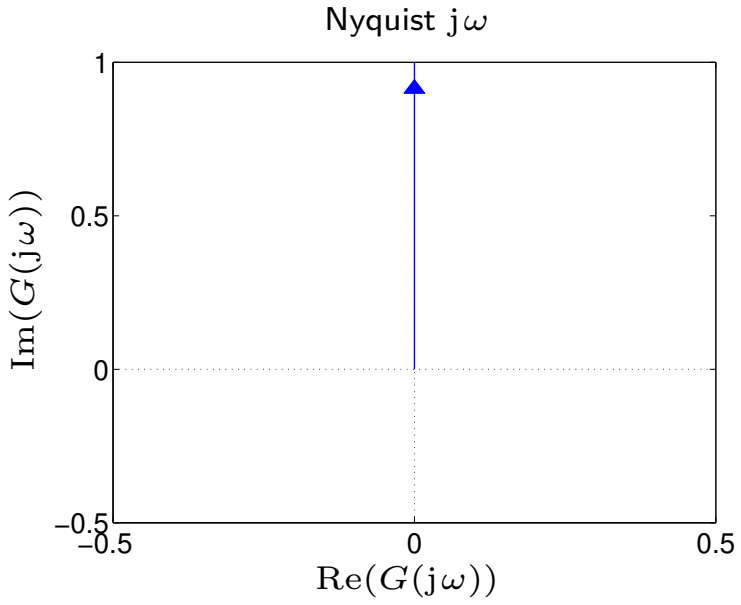
Análise de resposta em frequência

Diagrama de Nyquist

- Fator $G(s) = s$.

$$G(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega = \omega\angle 90^\circ$$

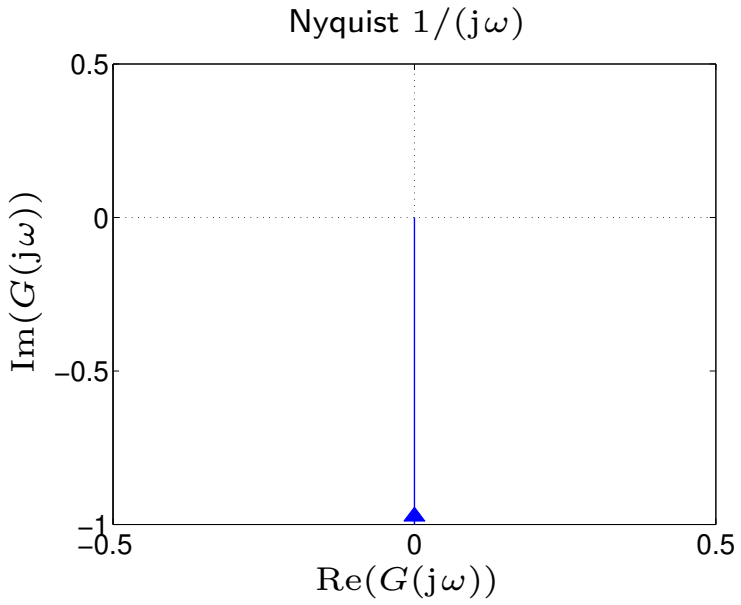
- Como $\mathrm{Re}(G(\mathrm{j}\omega)) = 0$, o diagrama de Nyquist de $G(\mathrm{j}\omega)$ é o próprio eixo imaginário.



- Fator $G(s) = 1/s$

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}\angle -90^\circ$$

- Como $\mathrm{Re}(G(\mathrm{j}\omega)) = 0$, o diagrama de Nyquist de $G(\mathrm{j}\omega)$ é o próprio eixo imaginário.



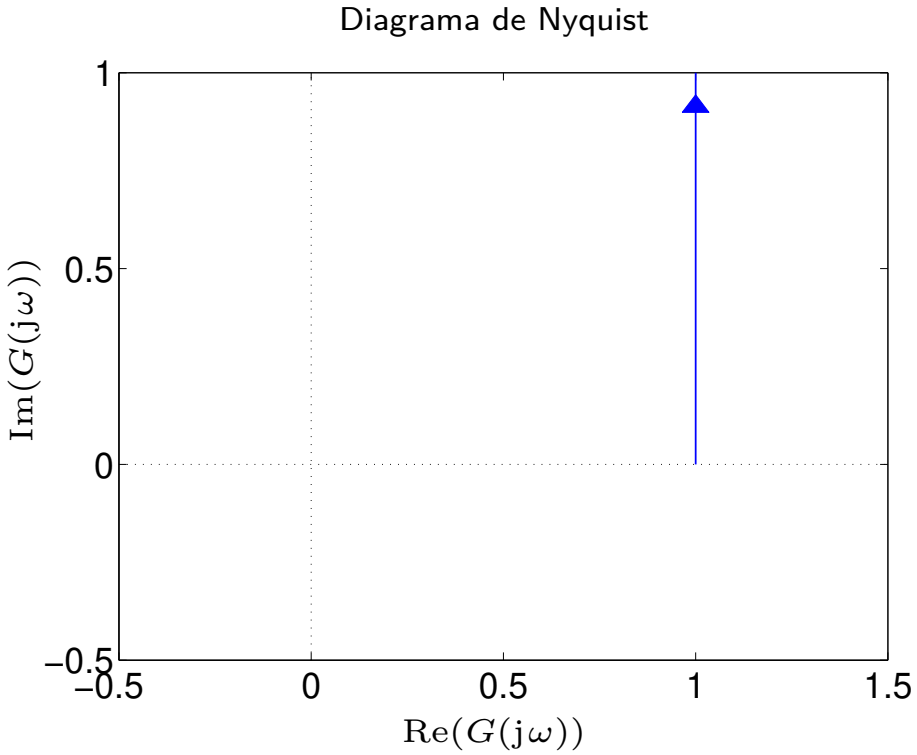
Análise de resposta em frequência

Diagrama de Nyquist

- Fator $G(s) = 1 + Ts$

$$\begin{aligned} G(\mathrm{j}\omega) &= 1 + \mathrm{j}\omega T \\ &= \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \ \angle \tan^{-1}(\omega T) \end{aligned}$$

- Como $\mathrm{Re}(G(\mathrm{j}\omega)) = 1$, o diagrama de Nyquist de $G(\mathrm{j}\omega)$ é uma reta vertical originada no eixo real em 1.

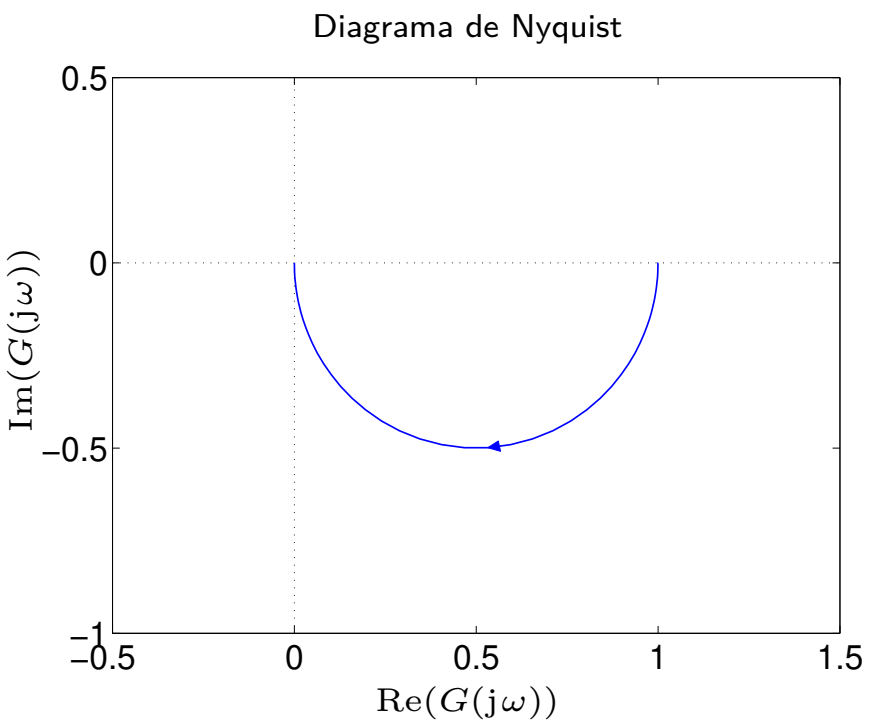


Análise de resposta em frequência

Diagrama de Nyquist

- Fator $G(s) = 1/(1+Ts)$

$$
\begin{aligned}
G(\mathrm{j}\omega) &= \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega T} \\
&= \frac{1}{1+\omega^2T^2} - \mathrm{j}\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\angle\tan^{-1}\left(\frac{-\omega T}{1}\right)
\end{aligned}
$$



- Para
  - $\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad G(\mathrm{j}0) = 1\angle 0^\circ$
  - $\omega = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad G(\mathrm{j}\frac{1}{T}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\angle -45^\circ$
  - $\omega \to \infty \quad \Rightarrow \quad G(\mathrm{j}\infty) \to 0\angle -90^\circ$

- O diagrama de Nyquist de $G(\mathrm{j}\omega)$ é uma circunferência de raio 0.5 centrada no ponto 0.5 do eixo real, já que:

$$[\mathrm{Re}(G(\mathrm{j}\omega)) - 0.5]^2 + [\mathrm{Im}(G(\mathrm{j}\omega)]^2 = 0.5^2$$

Análise de resposta em frequência

Diagrama de Nyquist

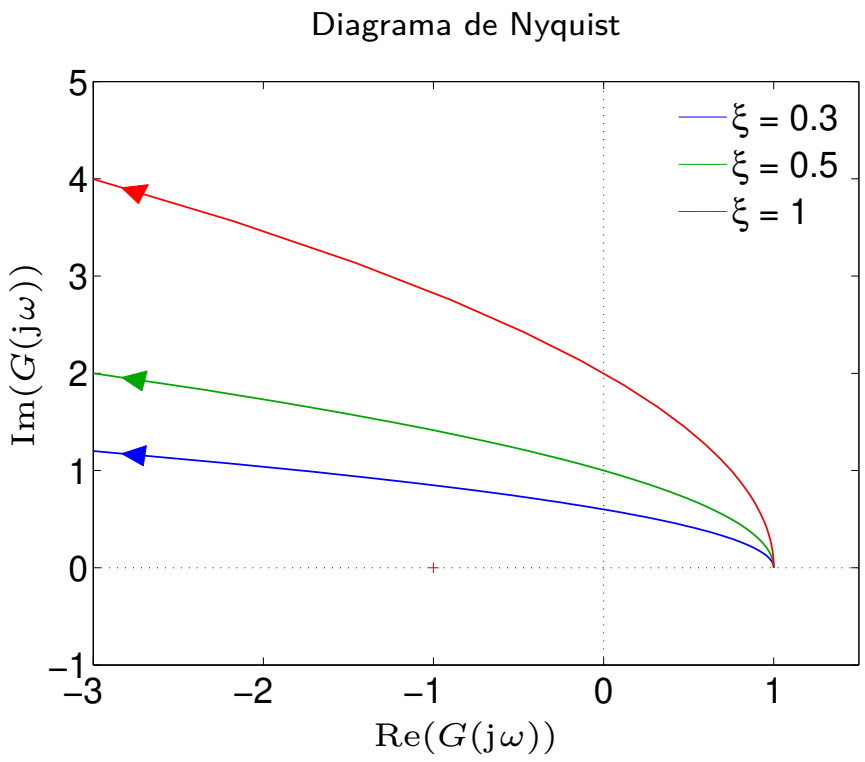
- Fator $G(s) = \dfrac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2} = \left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\dfrac{s}{\omega_n} + 1$
- Assim, para $s = \mathrm{j}\omega$, tem-se

$$G(\mathrm{j}\omega) = 1 - u^2 + \mathrm{j}2\zeta u$$

$$\angle G(\mathrm{j}\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta u}{1 - u^2}\right)$$

com $u = \omega/\omega_n$

- Para
  - $\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad G(\mathrm{j}\omega) = 1\angle 0^\circ$
  - $\omega = \omega_n \quad \Rightarrow \quad G(\mathrm{j}\omega) = 2\zeta\angle 90^\circ$
  - $\omega \to \infty \quad \Rightarrow \quad G(\mathrm{j}\omega) \to \infty\angle 180^\circ$



- O diagrama de Nyquist de $G(\mathrm{j}\omega)$ tem a forma de uma parábola negativa, com eixo de simetria paralelo ao eixo dos reais e vértice em $(\mathrm{Im}, \mathrm{Re}) = (0, 1)$.

Análise de resposta em frequência

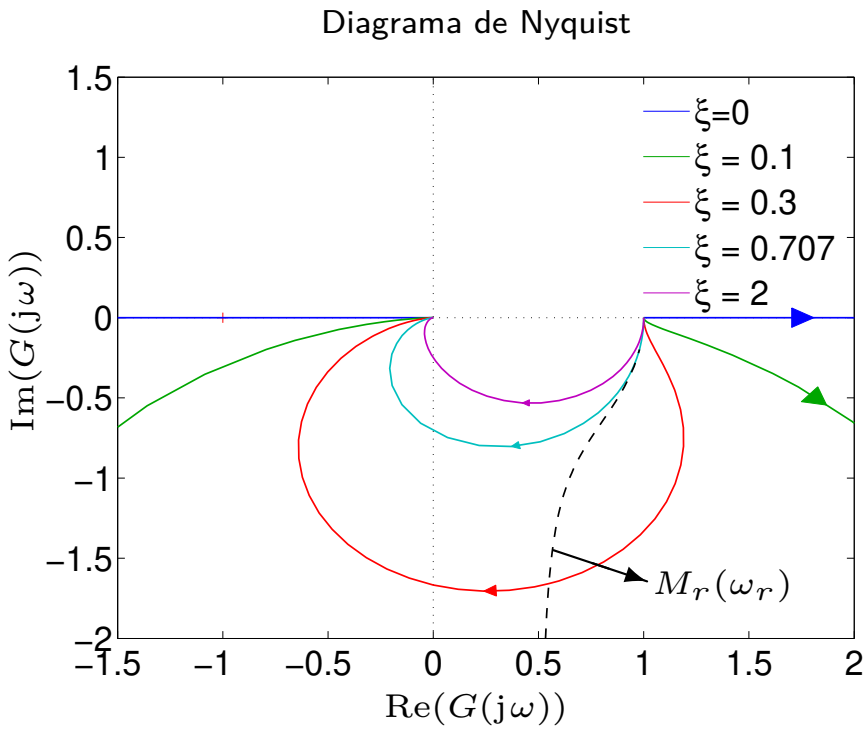
Diagrama de Nyquist

- Fator $G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \dfrac{1}{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta s/\omega_n + 1}$
- Assim, para $s = \mathrm{j}\omega$, tem-se

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 - u^2 + \mathrm{j}2\zeta u}$$

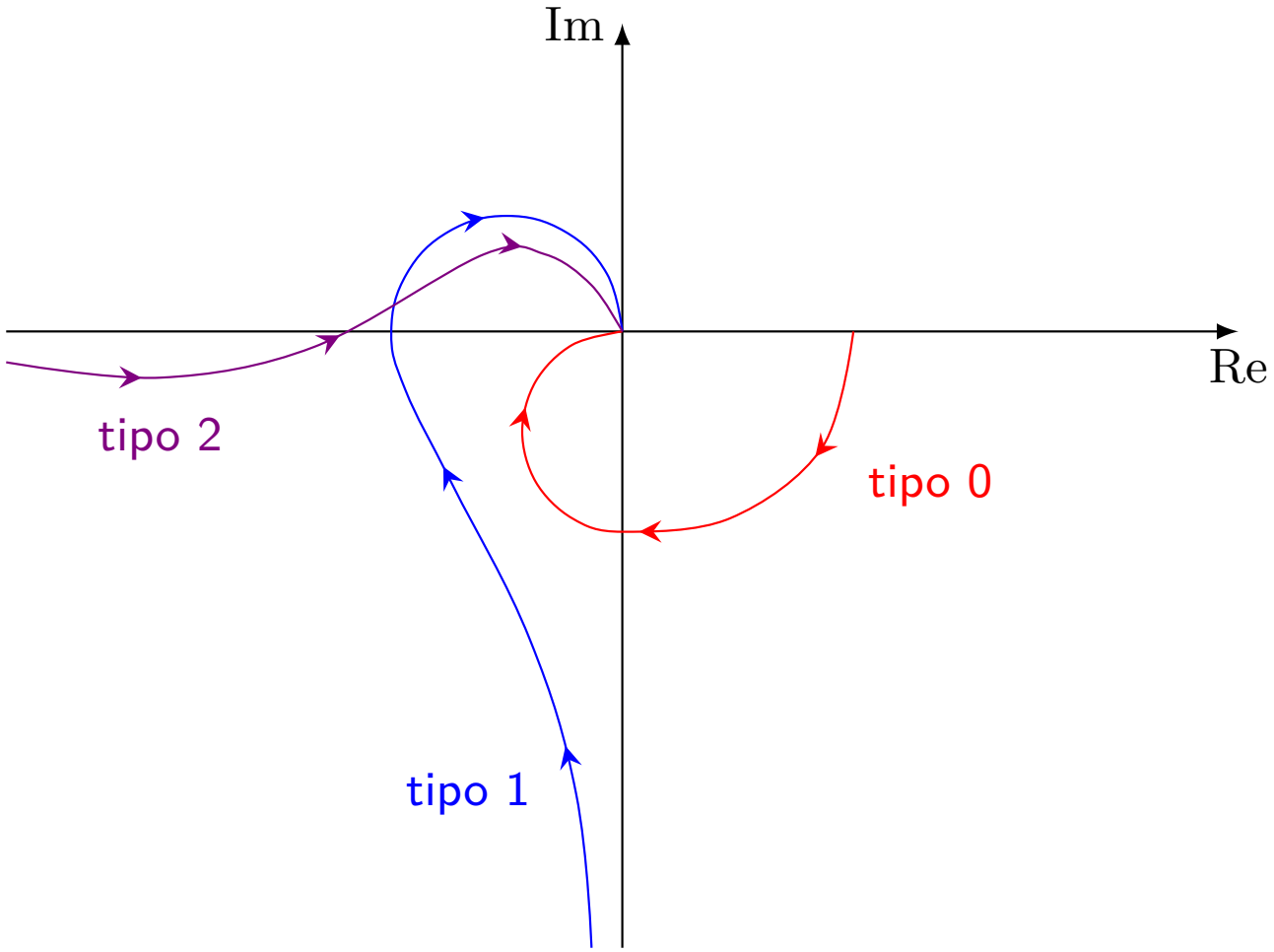
$$\angle G(\mathrm{j}\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{-2\zeta u}{1 - u^2}\right)$$

com $u = \omega/\omega_n$



- Para
  - $\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad G(\mathrm{j}\omega) = 1\angle 0^\circ$
  - $\omega = \omega_n \quad \Rightarrow \quad G(\mathrm{j}\omega_n) = \dfrac{1}{2\zeta}\angle -90^\circ$
  - $\omega \to \infty \quad \Rightarrow \quad G(\mathrm{j}\omega) \to 0\angle -180^\circ$

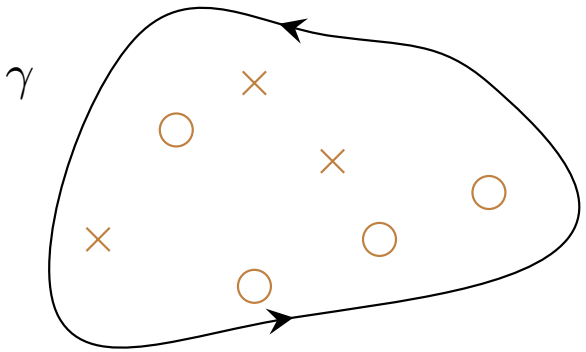
- É possível mostrar que para funções de transferência do tipo 0, 1 e 2, estritamente próprias, o diagrama de Nyquist tem a forma geral apresentada na figura abaixo.



Estabilidade de Nyquist

Princípio do argumento

- Seja $z \in \mathbb{C}$ e $f(z)$ uma função analítica num domínio D exceto nos polos de $f(z)$.
- Seja $\gamma \in D$ uma curva fechada e simples, orientada positivamente (sentido anti-horário), que não passa através dos polos e zeros de $f(z)$.



$\times$: polos; $\mathcal{P}$ = número de polos no domínio

$\bigcirc$: zeros; $\mathcal{Z}$ = número de zeros no domínio

- Pelo Teorema do Princípio do Argumento, tem-se

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{Z} - \mathcal{P}$$

- Pode-se também mostrar que

$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathrm{j} \left\{ \begin{array}{l} \text{mudança total em } \arg(f(z)) \\ \text{à medida que } z \text{ percorre } \gamma \end{array} \right\} = 2\pi \mathrm{j}\, \mathcal{W}$$

em que $\mathcal{W}$ é o número de envolvimentos anti-horário da origem.

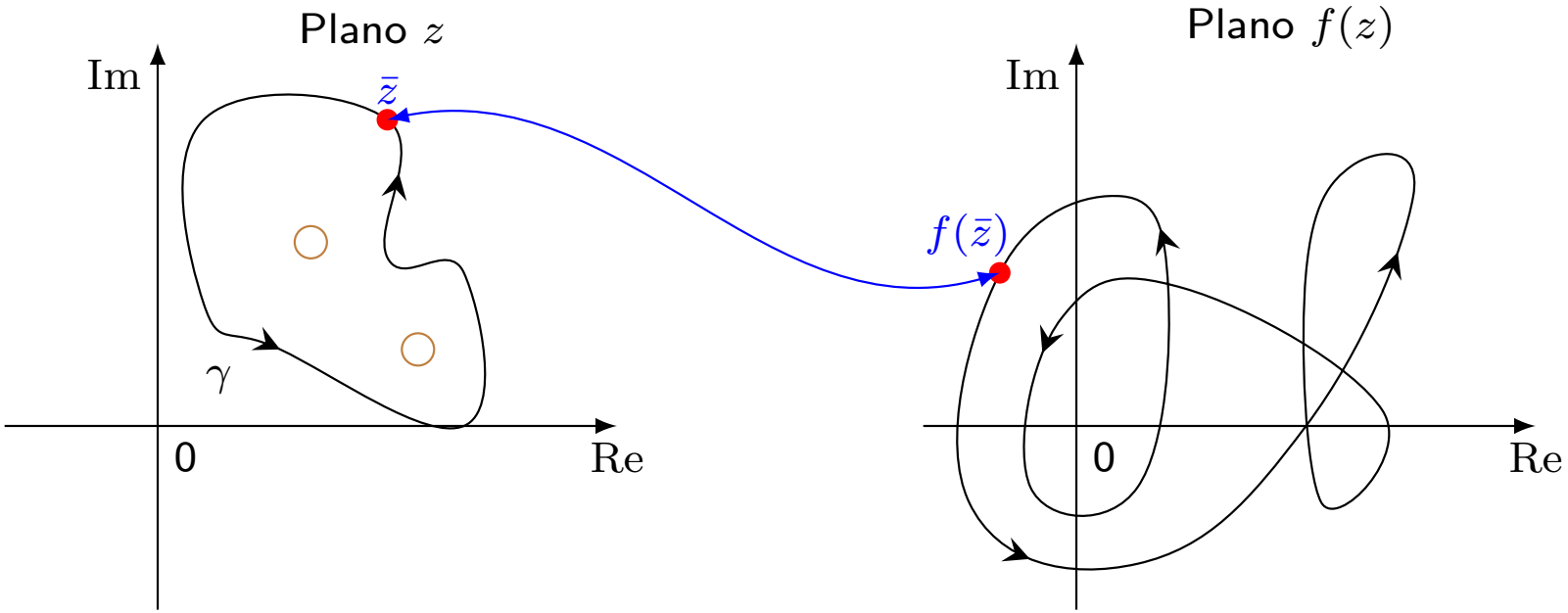
Estabilidade de Nyquist

Princípio do argumento

- Desta forma chega-se à relação:

$$\mathcal{W} = \mathcal{Z} - \mathcal{P}$$

- As figuras abaixo apresentam a região no plano z delimitada pela curva fechado γ, que contem dois zeros, e o respectivo mapeamento no plano $f(z)$ do contorno γ.

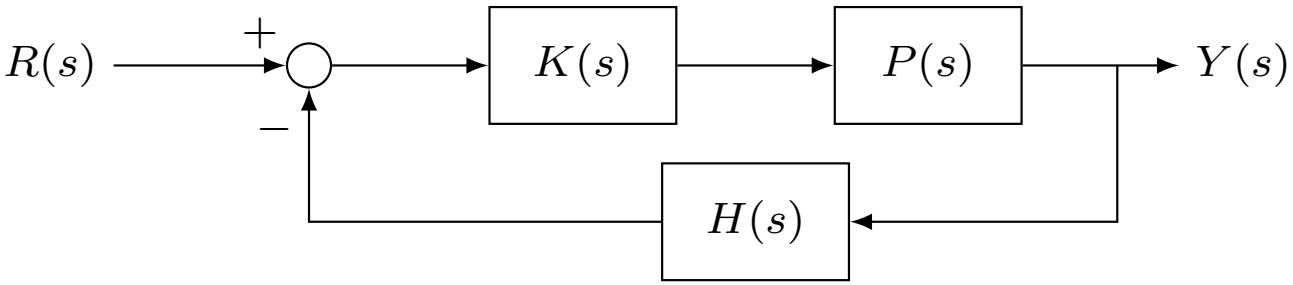


- Observe que no plano $f(z)$ houveram dois envolvimentos da origem no sentido anti-horário, o que é esperado, já que o contorno γ no plano z contem dois zeros.

Estabilidade de Nyquist

Análise de estabilidade

- Considere o diagrama abaixo.



- A equação característica do sistema em malha fechada é

$$1 + L(s) = 0 \quad \text{com} \quad L(s) = K(s)P(s)H(s)$$

ou

$$F(s) = 0 \quad \text{com} \quad F(s) = 1 + L(s)$$

- Note que os polos de $F(s) = 1 + L(s)$ são os mesmos de $L(s)$.

- Para ver esse fato, substitua $L(s) = \dfrac{n(s)}{d(s)}$ na expressão acima:

$$F(s) = 1 + \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{d(s) + n(s)}{d(s)}$$

Estabilidade de Nyquist

Análise de estabilidade

- Para que o sistema seja estável é preciso que os polos em malha fechada estejam no semi-plano esquerdo do plano complexo (SPE).
- Note que os polos da função de transferência em malha fechada são as raízes (os zeros) de $F(s) = 1 + L(s)$. Assim $F(s)$ não pode ter zeros no SPD ($\mathcal{Z} = 0$).
- Assuma que $L(s)$ não contém polos ou zeros no eixo imaginário e que o contorno γ envolve (no sentido horário) o semi-plano direito do plano complexo (SPD).
- Pode-se agora aplicar o Princípio do Argumento:

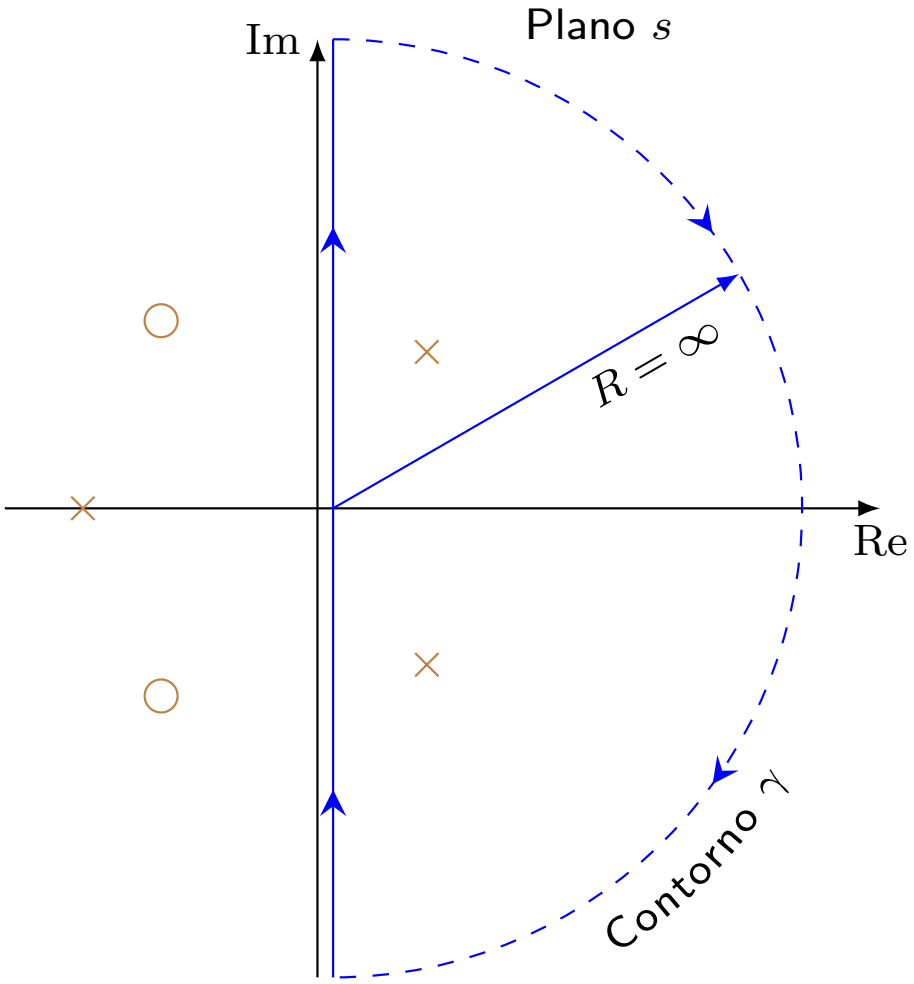
$$\mathcal{W} = \mathcal{Z} - \mathcal{P} \qquad \xrightarrow{\mathcal{Z}=0} \qquad \mathcal{W} = -\mathcal{P}$$

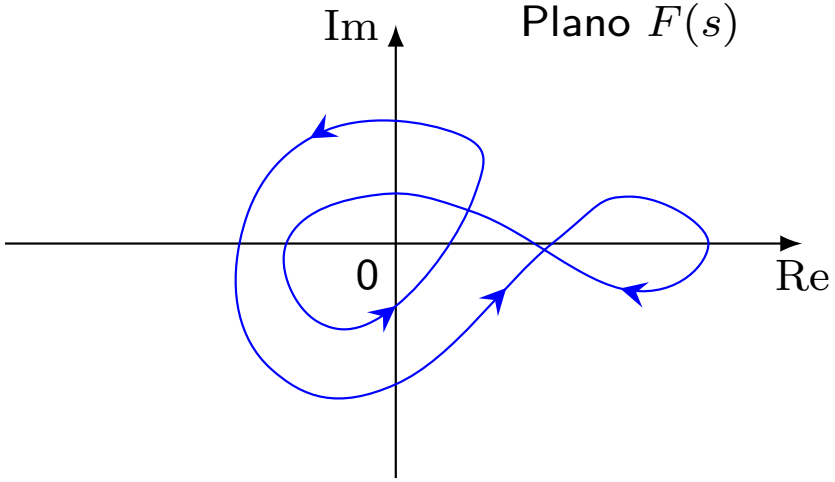
  notando que os polos de $F(s)$ são conhecidos, já que são os mesmos de $L(s)$.
- Assim, conclui-se que o sistema em malha fechada será estável se o número $\mathcal{W}$ de envolvimento do ponto -1 (no sentido anti-horário) no diagrama de Nyquist da função $L(s)$ for o mesmo que o número $\mathcal{P}$ de polos de $L(s)$ localizados no SPD.

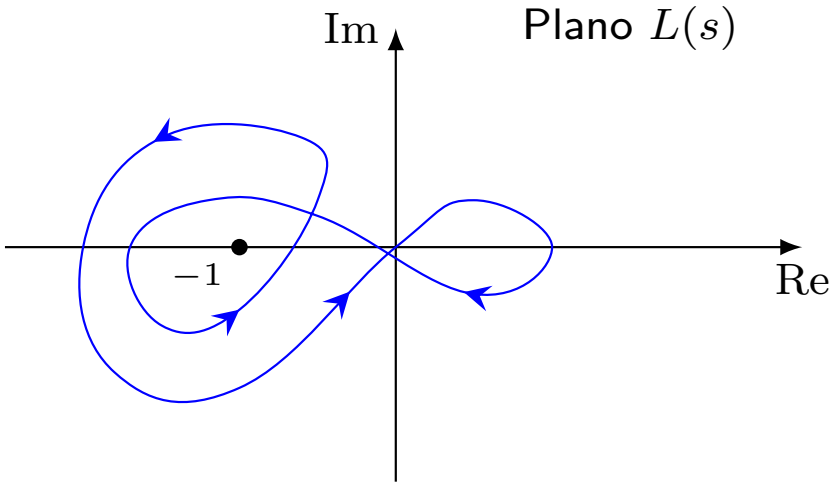
Estabilidade de Nyquist

Análise de estabilidade

- A figura abaixo apresenta um sistema estável, já que ocorreram 2 envolvimentos da origem no plano $F(s)$ (respectivamente, 2 voltas do ponto -1 no plano $L(s)$).



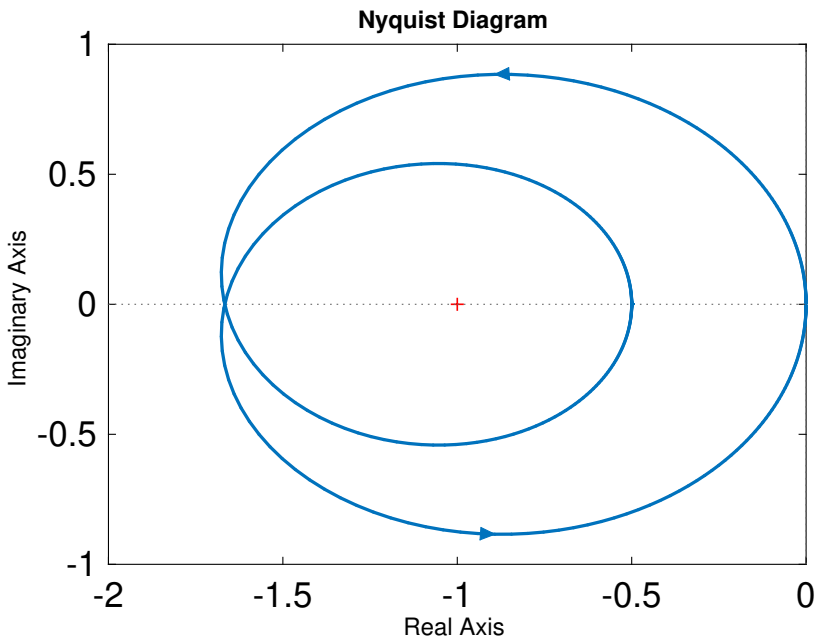




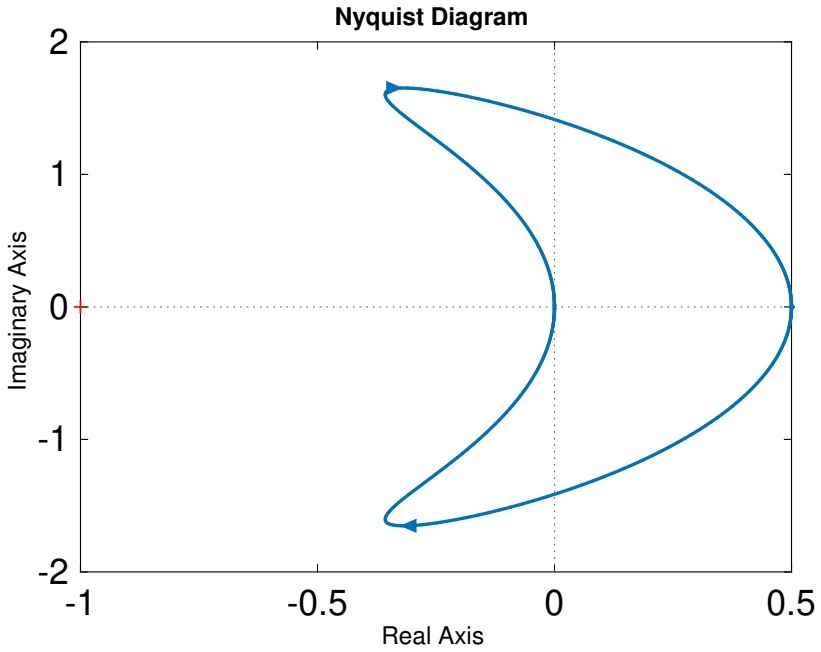
Estabilidade de Nyquist

Análise de estabilidade

- O diagrama (a) da esquerda apresenta 2 envolvimentos anti-horários do ponto -1 (assim $\mathcal{W} = -2$). Como $L(s)$ tem 2 polos no SPD, fornecendo $\mathcal{P} = 2$, conclui-se da relação $\mathcal{W} = \mathcal{Z} - \mathcal{P}$ que $\mathcal{Z} = 0$ e o sistema é portanto estável.



(a) $L(s) = \dfrac{5(s-0.2)}{(s-2)(s-1)}$



(b) $L(s) = \dfrac{5(s-0.2)}{(s-2)(s+1)}$

- Já no diagrama (b) da direita, não ocorre envolvimento do ponto -1 (assim $\mathcal{W} = 0$). Como $L(s)$ tem 1 polo no SPD, ou seja $\mathcal{P} = 1$, conclui-se que $\mathcal{Z} = 1$ e o sistema em malha fechada tem 1 polo no SPD, sendo portanto instável.

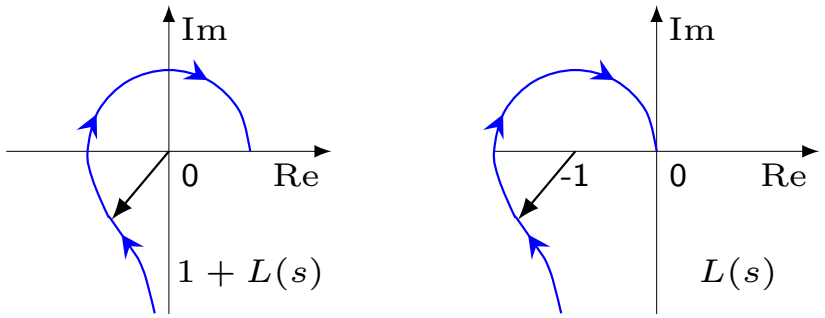
Estabilidade de Nyquist

Observações

1. Se $F(s)$ for própria (maioria dos sistemas) então $\lim_{s\to\infty} F(s)$ é finito e permanece constante à medida que γ percorre uma semi-circunferência de raio infinito.

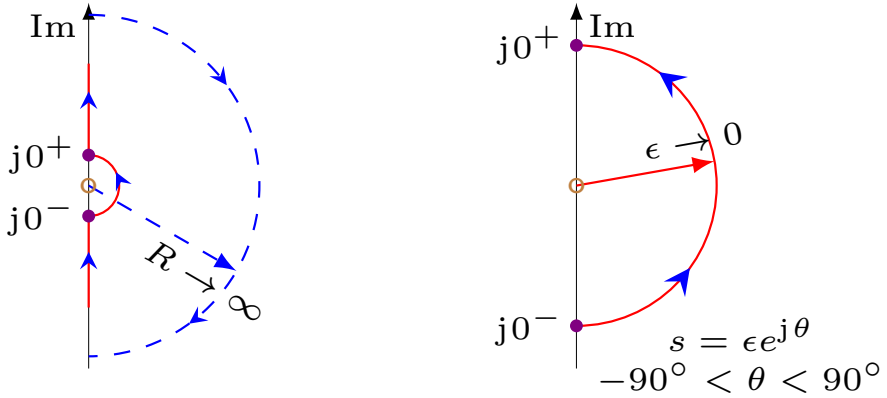
2. Assim, é preciso calcular $F(s)$ apenas no eixo imaginário, de $-\mathrm{j}\omega$ a $+\mathrm{j}\omega$ com $\omega \in [0, +\infty]$, contando que não existam zeros ou polos no eixo imaginário.

3. Note que um envolvimento da origem por $F(s) = 1 + L(s)$ é equivalente a um envolvimento do ponto -1 por $L(s)$.



4. No caso em que $L(s)$ possui polos ou zeros em $s = \mathrm{j}\omega$, modifica-se a curva envolta dos respectivos polos e zeros.

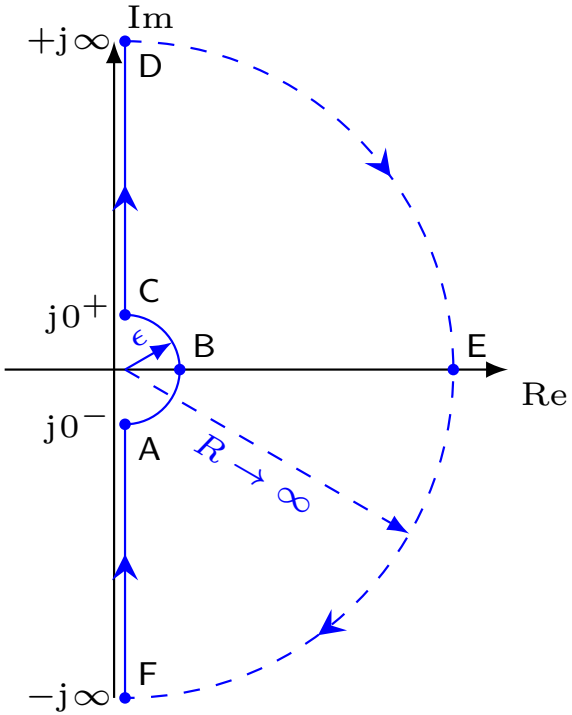
5. Pode-se optar por incluir ou não incluir (como na figura ao lado) o polo/zero dentro do contorno.

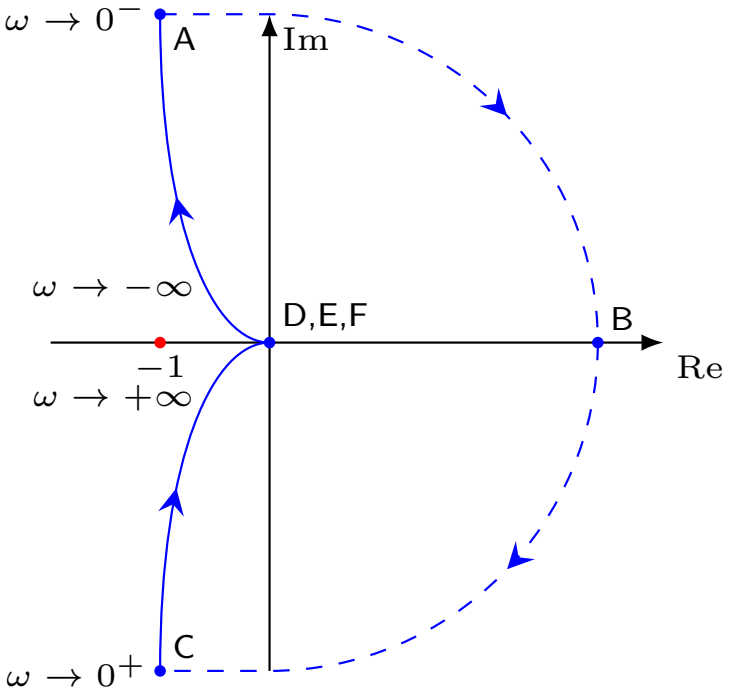


Estabilidade de Nyquist

Exemplos de polos na origem

1. Suponha que a função $L(s)$ seja dada por $L(s) = 1/(s(s+1))$.
2. Para $s = \epsilon e^{\mathrm{j}\theta}$ com $\epsilon \to 0$ e $-90^\circ < \theta < 90^\circ$, tem-se: $L(\epsilon e^{\mathrm{j}\theta}) \approx \dfrac{1}{\epsilon e^{\mathrm{j}\theta}} = \dfrac{1}{\epsilon} e^{-\mathrm{j}\theta}$
3. Portanto $1/\epsilon \to \infty$ com $\angle L(s)$ variando de 90° a -90°.
4. Dessa forma os pontos $L(\mathrm{j}0^-) \to \mathrm{j}\infty$ e $L(\mathrm{j}0^+) \to -\mathrm{j}\infty$ estão ligados por um uma semi-circunferência (à direita) de raio infinito no plano $L(s)$.





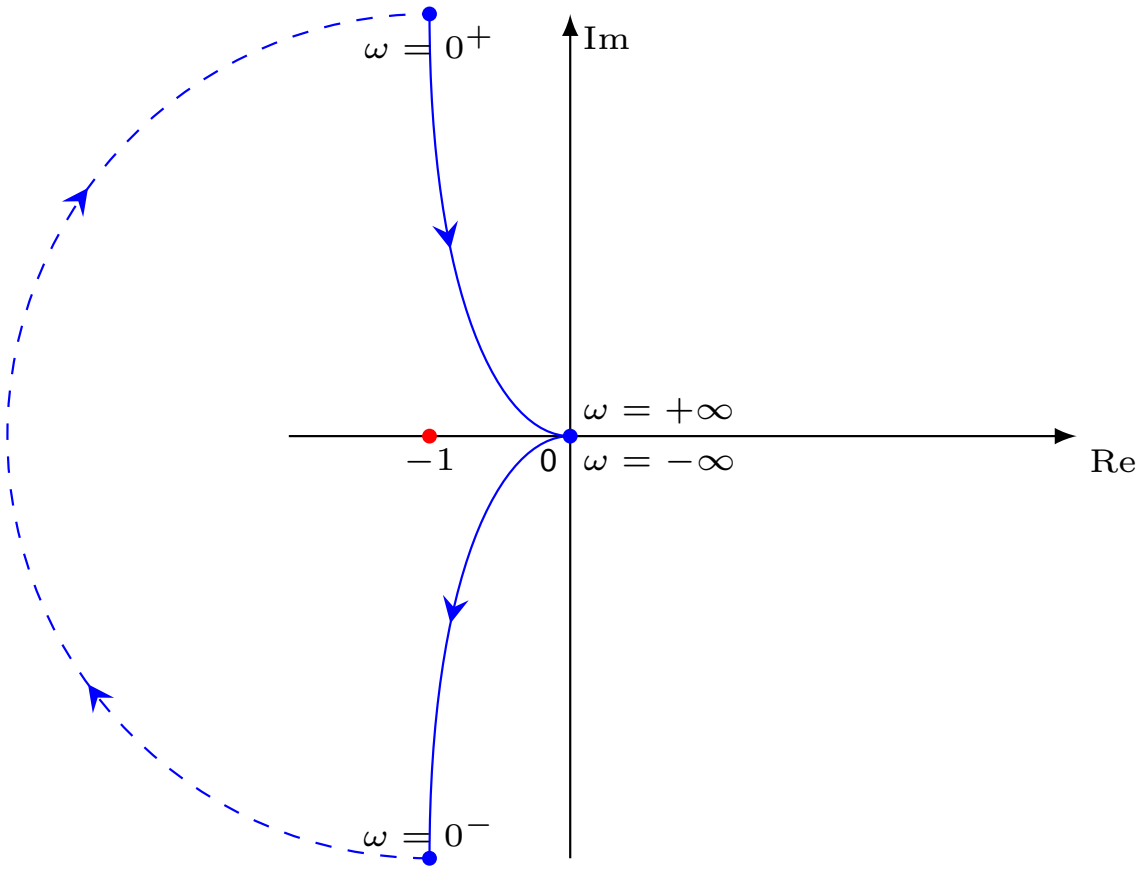
5. Como $\mathcal{P} = 0$ e $\mathcal{W} = 0$, então $\mathcal{Z} = 0$ e o sistema é estável.

Estabilidade de Nyquist

Exemplos de polos na origem

1. Suponha que a função $L(s)$ seja dada por $L(s) = 1/(s(s-1))$.

2. A figura abaixo apresenta o diagrama de Nyquist de $L(s)$.

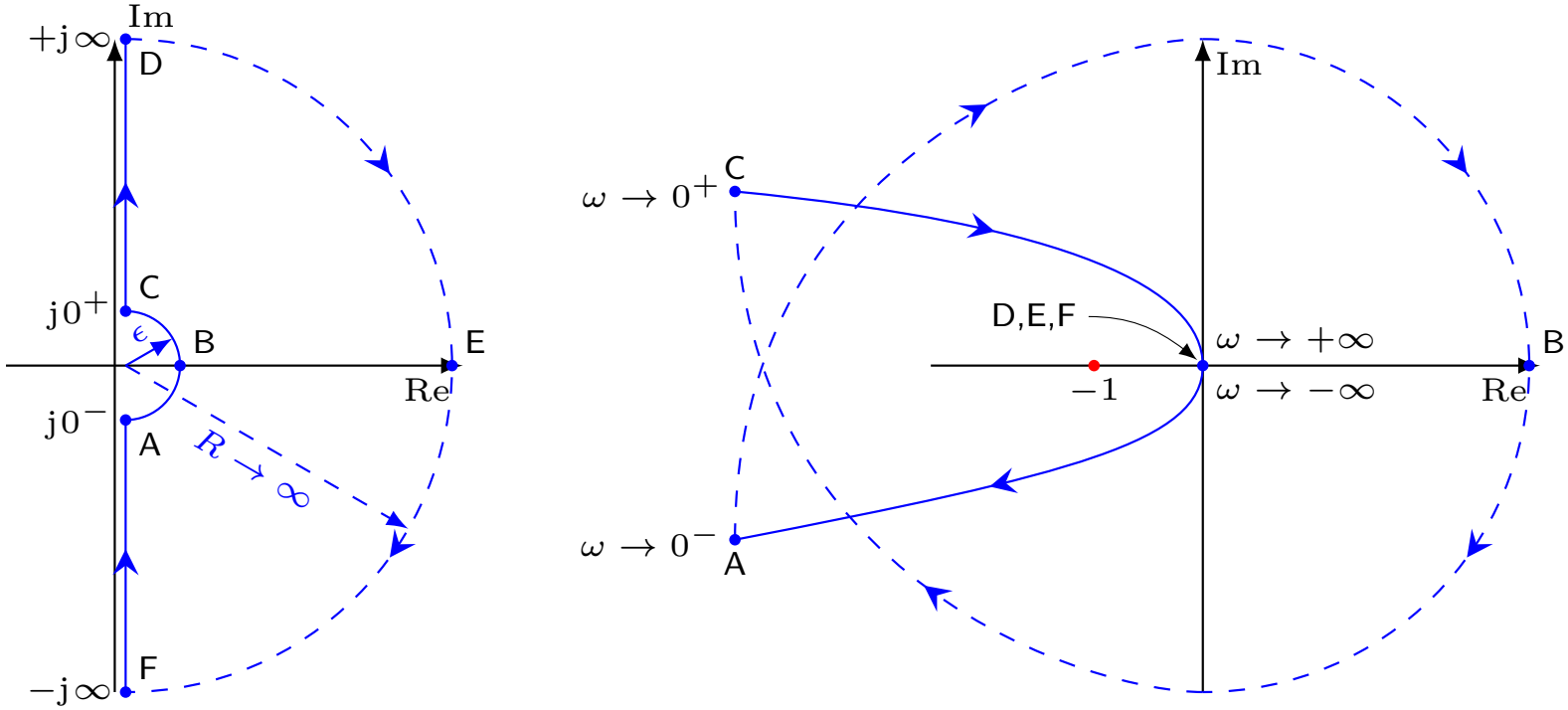


3. Como $\mathcal{P} = 1$ e $\mathcal{W} = 1$, então $\mathcal{Z} = 2$ e o sistema em malha fechada terá 2 polos no SPD e será portanto instável. Os polos em malha fechada são $s = \frac{1}{2} \pm \mathrm{j}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Estabilidade de Nyquist

Exemplos de polos na origem

1. Suponha que a função $L(s)$ seja dada por $L(s) = 1/(s^2(s+1))$.
2. Para $s = \epsilon e^{\mathrm{j}\theta}$ com $\epsilon \to 0$ e $-90^\circ < \theta < 90^\circ$, tem-se: $L(\epsilon e^{\mathrm{j}\theta}) \approx \frac{1}{\epsilon^2 e^{2\mathrm{j}\theta}} = \frac{1}{\epsilon^2} e^{-2\mathrm{j}\theta}$
3. Conforme θ varia de -90° a 90° no plano s, o ângulo $\angle L(s)$ varia de 180° a -180°.



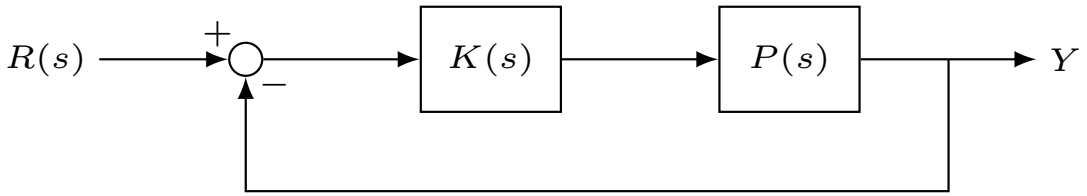
4. Exercício: Mostre o mapeamento: C em $(-\infty, +\infty)$ com $+180^\circ$; A em $(-\infty, -\infty)$ com -180°; D em $(0,0)$ com $+90^\circ$ e F em $(0,0)$ com -90°.
5. Como $\mathcal{P} = 0$ e $\mathcal{W} = 2$, então $\mathcal{Z} = 2$ e o sistema em malha fechada possui 2 polos no SPD. Portanto, o sistema é instável.

Margem de ganho e de fase

Conceitos básicos

- A Margem de Ganho (MG) e a Margem de Fase (MF) de uma planta $P(s)$ são indicadores relativos de estabilidade.

- Considere a malha de controle abaixo:



- A MG informa qual o valor máximo que um ganho estático $K(s) = K$ pode assumir sem que ocorra alteração no número de envolvimentos do ponto -1.

- A MF informa qual o valor máximo que um atraso de fase pode ser adicionado, por uma função de transferência $K(s)$ de ganho unitário, sem que ocorra alteração no número de envolvimentos do ponto -1 no diagrama de Nyquist.

- Tanto a MG como a MF podem ser determinados através dos diagramas de Bode e de Nyquist. No root locus, a MG indicará a interseção com o eixo imaginário.

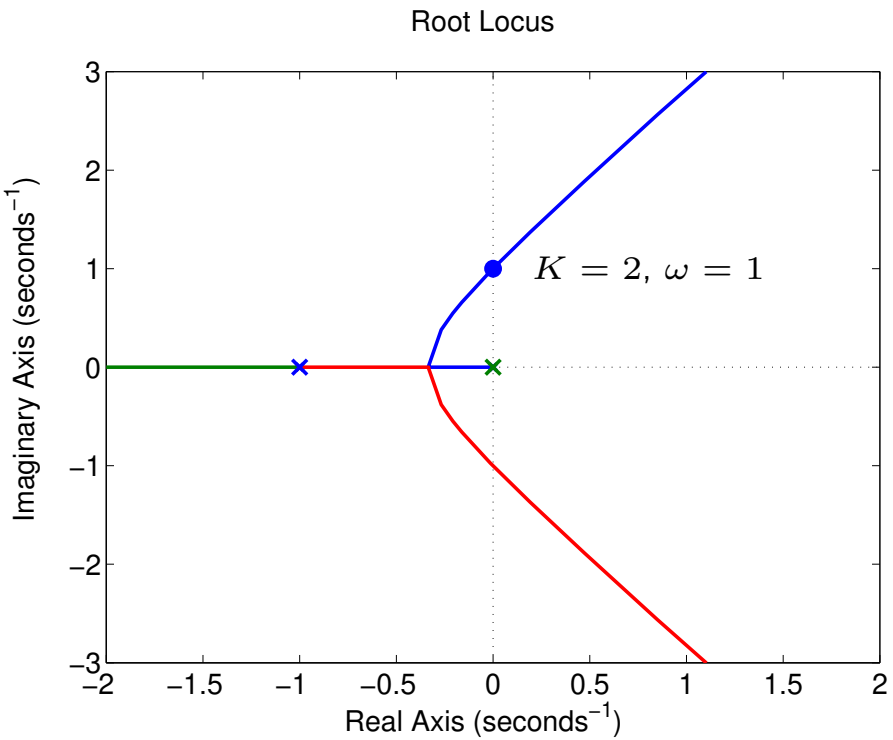
- Note que se o sistema já for estável em malha fechada (com $K(s) = 1$), então:
  - o sistema permanecerá estável se $K(s) = K$ for um ganho limitado a $K \in (0, \mathrm{MG})$;
  - ou se $K(s)$ for uma função de ganho unitário com atraso de fase limitado a MF.

Margem de ganho e de fase

Conceitos básicos

- Considere o root locus da planta:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$



- A equação característica é dada por:

$$1 + KP(s) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} |KP(s)| = 1 \\ \angle P(s) = -180^\circ \end{cases}$$

- O ponto de interseção do root locus com o eixo imaginário pode ser determinado diretamente da equação característica, fazendo-se $s = \mathrm{j}\omega$.

- Para a planta $P(s)$ acima, K e ω no eixo imaginário são dados por

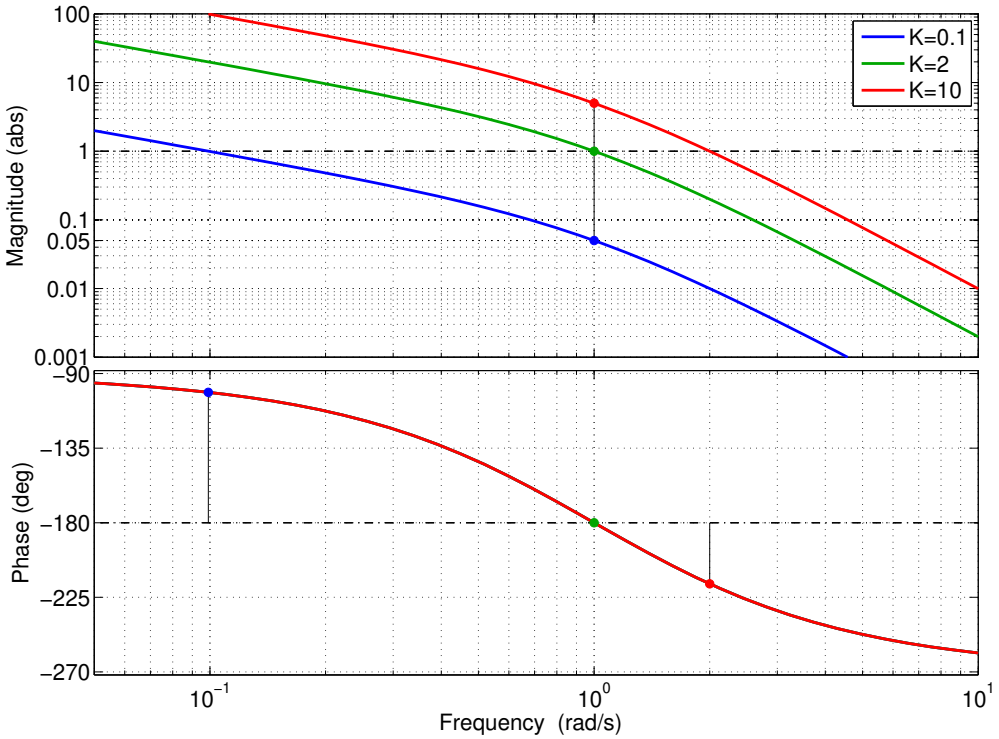
$$1 + \frac{K}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+1)^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (K - 2\omega^2) - \mathrm{j}\omega(\omega^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 2,\ \omega = 1$$

- Assim, $\mathrm{MG} = 2$ e o sistema será estável para $0 < K < 2$ e instável para $K > 2$.

Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Bode

Diagrama de Bode de $K/(s(s+1)^2)$

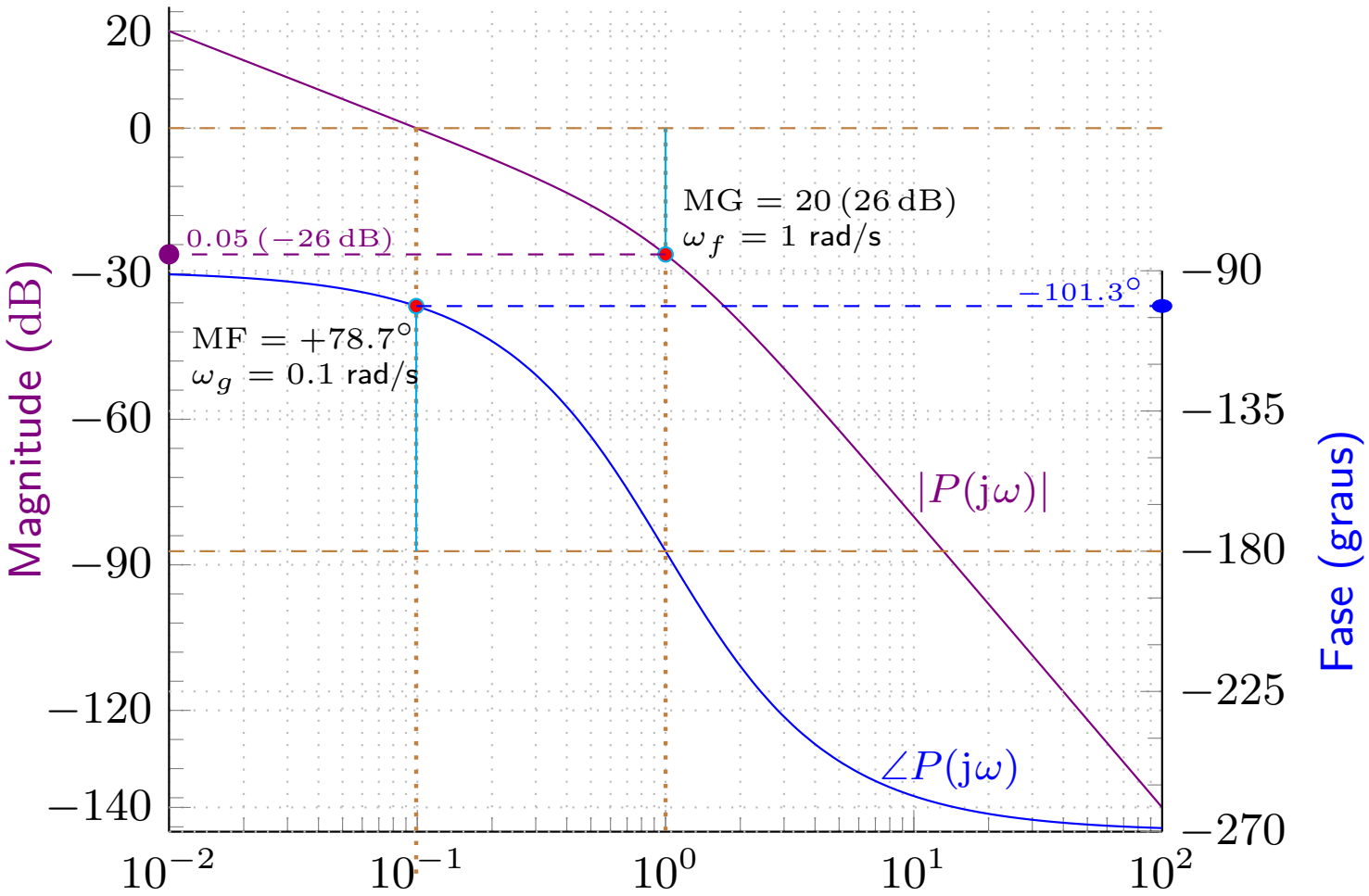


- Para $K = 0.1$, o sistema é estável, já que:
  - $1/\,\mathrm{MG} = 0.05$ e assim $\mathrm{MG} = 20\ (26\,\mathrm{dB})$ na frequência de cruzamento de fase $\omega_f = 1$.
  - $\mathrm{MF} = 78.7^\circ$ na frequência de cruzamento de ganho $\omega_g = 0.1$ rad/s.
- Para $K = 2$, $\mathrm{MG} = 1\,(0\,\mathrm{dB})$ e $\mathrm{MF} = 0$, com $\omega_f = \omega_g = 1$ rad/s.
- Para $K = 10$, $1/\,\mathrm{MG} = 5$ e assim $\mathrm{MG} = 0.2\,(-14\,\mathrm{dB})$ na frequência $\omega_f = 1$ rad/s. $\mathrm{MF} = -36.9^\circ$ na frequência $\omega_g = 2$ rad/s. Portanto, o sistema é instável.

Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Bode

- A figura abaixo apresenta o diagrama de Bode de $P(s) = \dfrac{0.1}{s(s+1)^2}$.



- Observação: Os comandos **margin(H)** e **allmargin(H)** fornecem as margens de ganho e de fase, e as respectivas frequências de corte.

Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Bode

- A margem de ganho MG é dada por $\mathrm{MG} = 1/|P(\mathrm{j}\omega_f)|$

  em que a frequência de cruzamento de fase ω_f satisfaz:

$$\angle P(\mathrm{j}\omega_f) = -180^\circ(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

- A margem de fase está sempre no intervalo $\mathrm{MF} \in [-180^\circ, +180^\circ]$ e é dada por:

$$\begin{cases} \mathrm{MF} = +180^\circ + \angle P(\mathrm{j}\omega_g) & \text{, se } \angle P(\mathrm{j}\omega_g) < 0 \\ \mathrm{MF} = -180^\circ + \angle P(\mathrm{j}\omega_g) & \text{, se } \angle P(\mathrm{j}\omega_g) > 0 \end{cases}$$

  em que a frequência de cruzamento de ganho ω_g satisfaz $|P(\mathrm{j}\omega_g)| = 0\,\mathrm{dB}$.

- Para o cálculo de MF usando a fórmula acima, a fase de $P(s)$ deve variar entre:

$$\angle P(\mathrm{j}\omega_g) \in [-360^\circ, +360^\circ]$$

- Se a fase estiver fora desse intervalo será necessário adicionar múltiplos de $\pm 360^\circ$:

$$\begin{cases} \mathrm{MF} = +180^\circ(2n+1) + \angle P(\mathrm{j}\omega_g) & \text{, se } \angle P(\mathrm{j}\omega_g) < 0 \\ \mathrm{MF} = -180^\circ(2n+1) + \angle P(\mathrm{j}\omega_g) & \text{, se } \angle P(\mathrm{j}\omega_g) > 0 \end{cases}$$

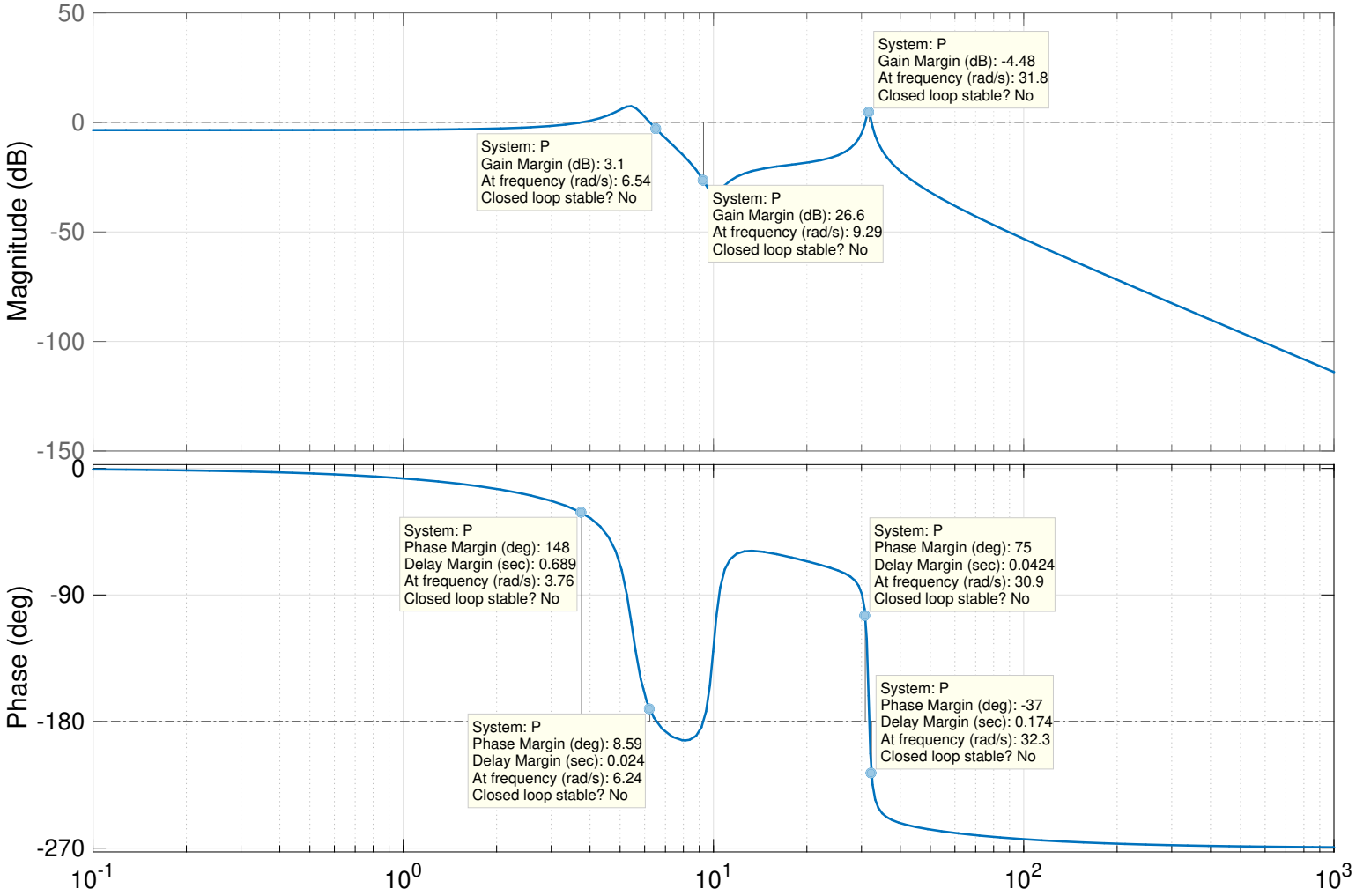
- Note que uma planta $P(s)$ pode ter vários MG e MF, dependendo do número de cruzamentos dos pontos -180° e $0\,\mathrm{dB}$, respectivamente. Assim, poderão haver múltiplos ω_f e ω_g, relacionados aos respectivos MG e MF.

Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Bode

- A figura abaixo apresenta o diagrama de Bode da planta $P(s)$ dada por:

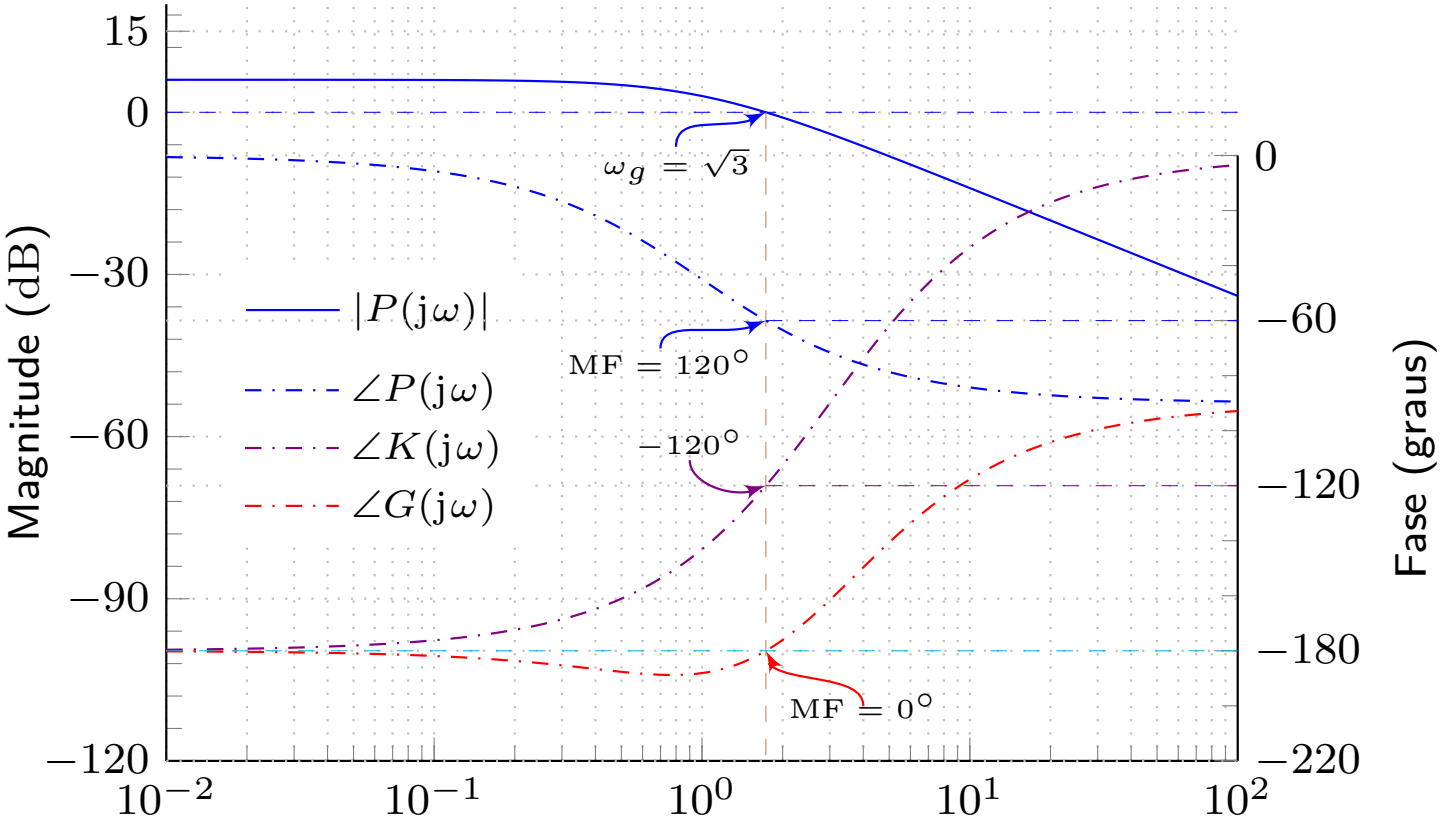
$$P(s) = 2000\frac{s^2 + s + 100}{(s+10)(s^2+s+30)(s^2+s+1000)}$$



Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Bode

- O diagrama de Bode de $P(s) = 2/(s+1)$ apresentado abaixo fornece $\mathrm{MF} = 120^\circ$ em $\omega_g = \sqrt{3}$. Esse sistema é estável em malha fechada com ganho unitário.
- Portanto, $K(s)$ pode fornecer um atraso de fase de até $\angle K(\mathrm{j}\omega_g) = -120^\circ$.
- Escolhendo $K(s) = (s+3)/(s-3)$, que fornece $K(\mathrm{j}\omega_g) = -120^\circ$, em $\omega_g = \sqrt{3}$, com $|K(\mathrm{j}\omega)| = 1$, $\forall w$, então $G(s) = K(s)P(s)$ terá $\mathrm{MF} = 0^\circ$.



Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Bode

- É possível que o sistema tenha $\mathrm{MG} = \infty$ ou $\mathrm{MF} = \infty$, como apresentado abaixo:
  - $P(s) = 2/(s+1)$, com $\mathrm{MG} = \infty$ e $\mathrm{MF} = 120°$.
  - $P(s) = 0.2/(s+1)$, com $\mathrm{MG} = \infty$ e $\mathrm{MF} = \infty$.
  - $P(s) = 0.2/(s+1)^3$, com $\mathrm{MG} = 32\,\mathrm{dB}$ e $\mathrm{MF} = \infty$.

- É preciso ter cautela ao analisar a estabilidade usando MG e MF. O mais aconselhável é utilizar sempre o diagrama de Nyquist:
  - $P(s) = 2(s+1)/(s(s-1))$ é estável com $\mathrm{MG} = -6\,\mathrm{dB}$ e $\mathrm{MF} = 37°$.
  - $P(s) = 2(s-0.5)/(s+2)$ é estável com $\mathrm{MG} = 6\,\mathrm{dB}$ e $\mathrm{MF} = -90°$.
  - $P(s) = 5(s+10)^2/(s+1)^3$ é estável com $\mathrm{MG} = \{-26, -10\}\,\mathrm{dB}$ e $\mathrm{MF} = 16.8°$.
  - $P(s) = 10(s-1)/(s+1)^4$ é instável com $\mathrm{MG} = \{-20, 10\}\,\mathrm{dB}$ e $\mathrm{MF} = 48°$.
  - $P(s) = -(s-3)^2/(s(2s+1))$ é instável com $\mathrm{MG} = 6\,\mathrm{dB}$ e $\mathrm{MF} = 100°$.

- Porém, para uma planta $P(s)$, estável, de fase mínima, com $P(0) > 0$, o sistema em malha fechada (com $K(s) = 1$) será estável sempre que:

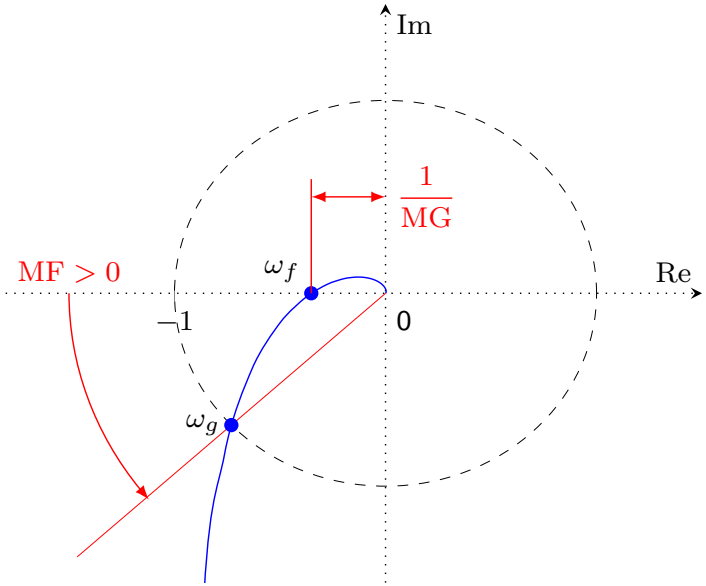
  todas as margens de ganho MG *e de fase* MF *forem positivas.*

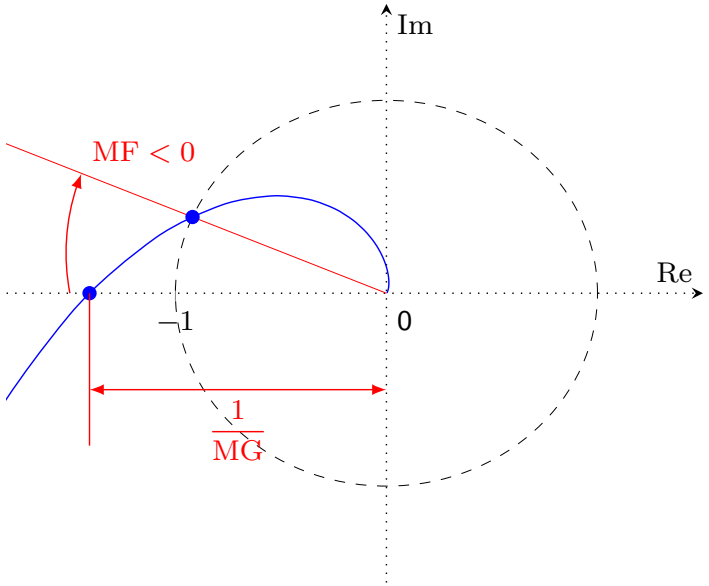
- Notação: a frequência de cruzamento (ganho ou fase) também é chamada de frequência de corte (ou *crossover frequency*).

Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Nyquist

- A MG e a MF podem ser determinadas a partir do diagrama de Nyquist.
- Foi visto que a margem de ganho MG é dada por $\mathrm{MG} = 1/|P(\mathrm{j}\omega_f)|$ em que a frequência de cruzamento de fase ω_f satisfaz $\angle P(\mathrm{j}\omega_f) = -180^\circ(2n+1)$, $n \geq 0$.
- A margem de fase MF é calculada na frequência de cruzamento de ganho ω_g em que $|P(\mathrm{j}\omega_g)| = 1\,(0\,\mathrm{dB})$, ou seja, na interseção com o círculo unitário.
- A figura a esquerda apresenta uma planta em que $\mathrm{MF} > 0$ e $\mathrm{MG} > 0\,\mathrm{dB}$.





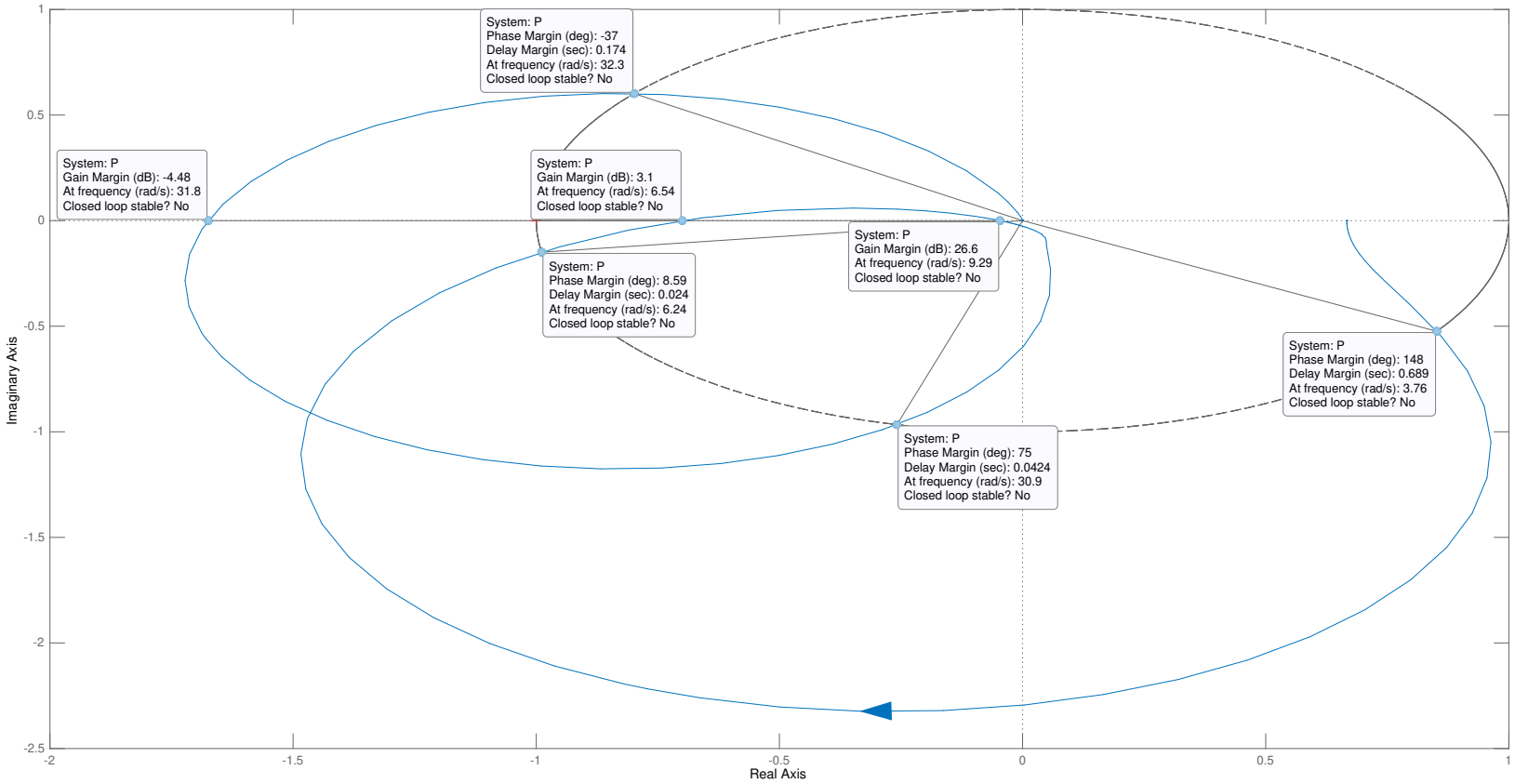
- A figura a direita apresenta uma planta em que $\mathrm{MF} < 0$ e $\mathrm{MG} < 0\,\mathrm{dB}$.

Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Nyquist

- A figura abaixo apresenta o diagrama de Nyquist (para $\omega > 0$) da planta

$$P(s) = 2000\frac{s^2 + s + 100}{(s+10)(s^2+s+30)(s^2+s+1000)}$$

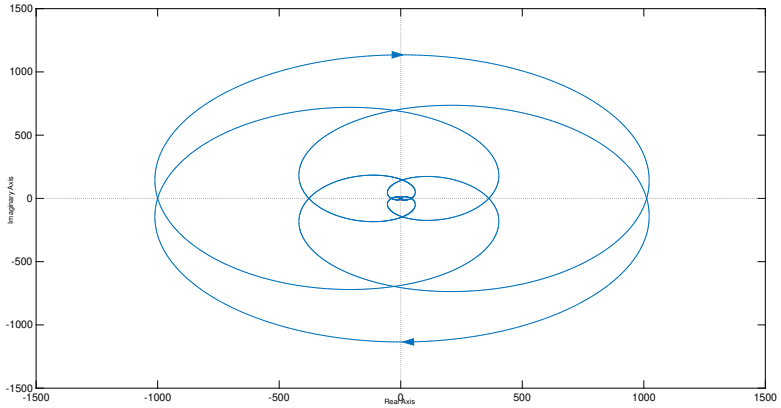


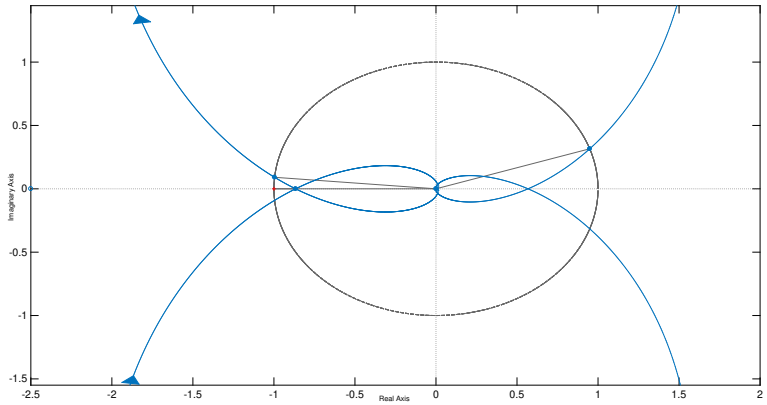
- O sistema apresentará (incluindo o trecho $\omega < 0$) duas voltas no sentido horário em volta do ponto -1. Assim, existem dois polos instáveis em malha fechada.

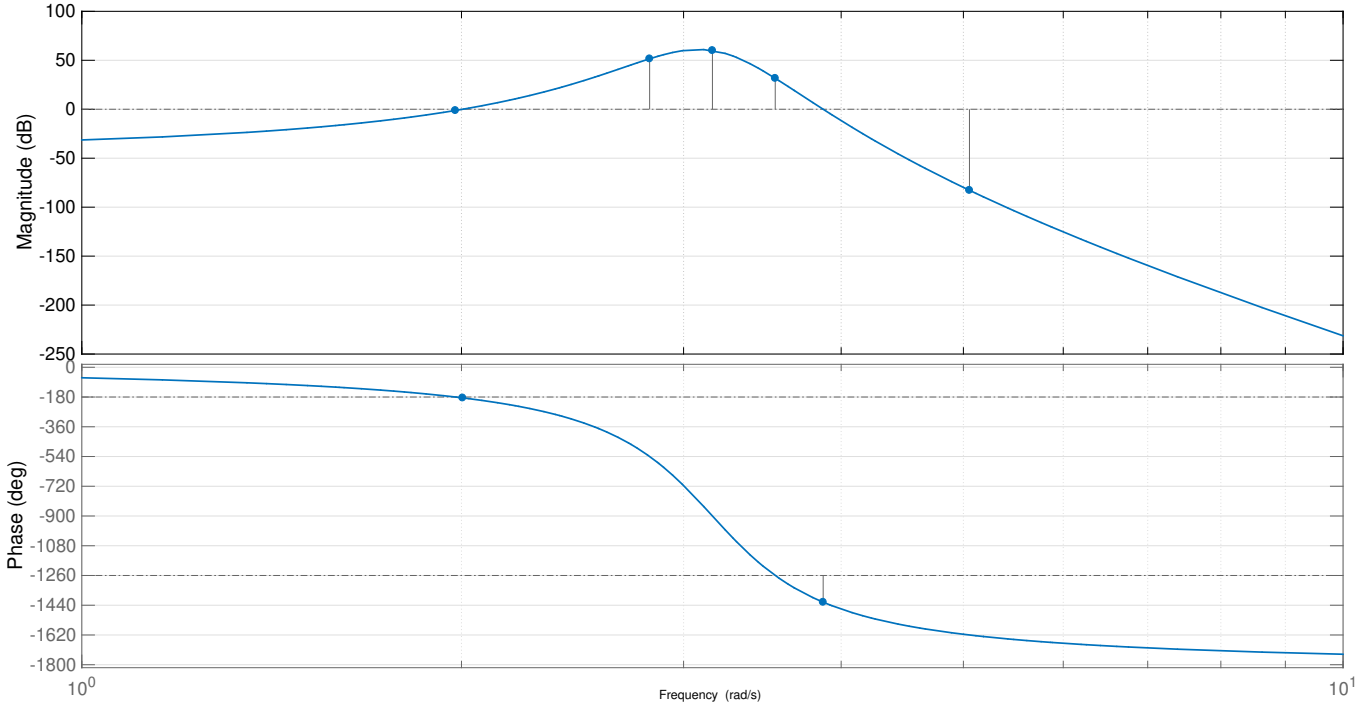
Margem de ganho e de fase

MG e MF no diagrama de Nyquist

- Diagramas de Nyquist e de Bode da planta $P(s) = \dfrac{10^8}{(s^2+s+10)^{10}}$.







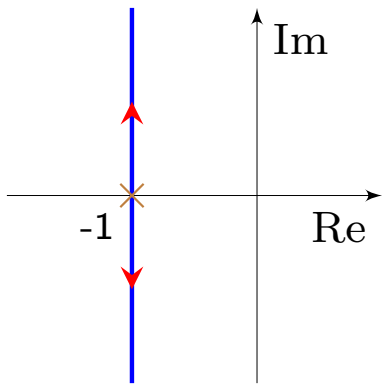
Margem de ganho e de fase

Projeto de um ganho estático usando MG e MF

- Exemplo: Determine a estabilidade do sistema para $K(s) = K$ e $P(s) = 1/(s+1)^2$

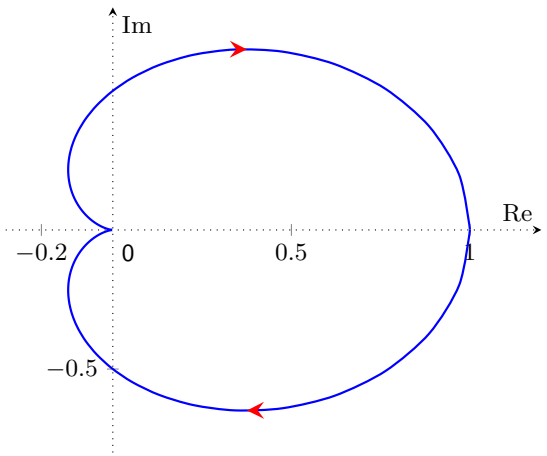
$$P(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{(\mathrm{j}\omega+1)^2} = \frac{(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2} - \mathrm{j}\,\frac{2\omega}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2}$$

- O root locus assegura que o sistema é estável para $K > 0$.



- Do diagrama de Bode, nota-se que $|P(\mathrm{j}\omega)| < 0\,\mathrm{dB}$ e $\angle P(\mathrm{j}\omega) \in (0^\circ, -180^\circ)$ para $0 < \omega < \infty$. Assim, $\mathrm{MG} = \infty$.

- O diagrama de Nyquist está apresentado ao lado.



- Note que 1 envolvimento de $KP(s)$ em torno de -1 corresponde a 1 envolvimento de $P(s)$ em torno de $-1/K$.

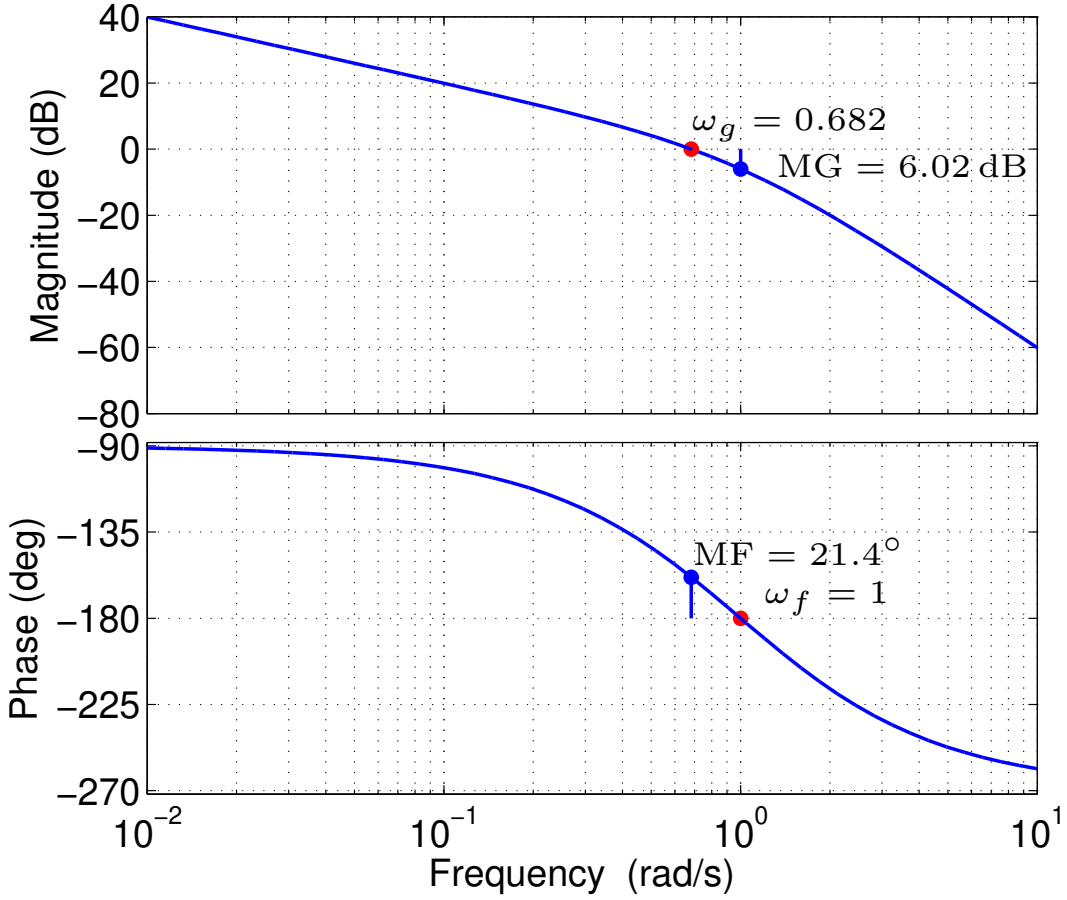
- Portanto, o sistema será estável sempre que $-1/K$ estiver fora do contorno do Nyquist de $P(s)$, ou seja:

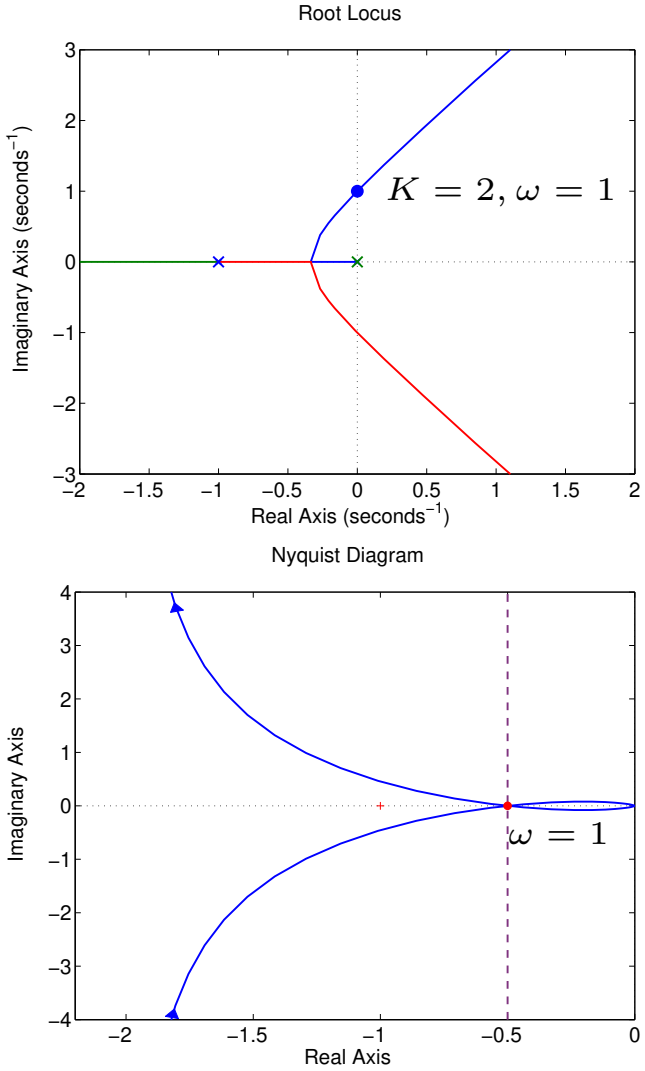
$$\begin{cases} -1/K < 0 & \Rightarrow \quad K > 0 \\ -1/K > 1 & \Rightarrow \quad -1 < K < 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad K > -1$$

Margem de ganho e de fase

Projeto de um ganho estático usando MG e MF

- Exemplo: Considere a planta $P(s) = \dfrac{1}{s(s+1)^2}$





- Percebe-se que o sistema será estável sempre que $-1/K < -1/2$, ou seja, $0 < K < 2\,(6.02\,\mathrm{dB})$.

Margem de ganho e de fase

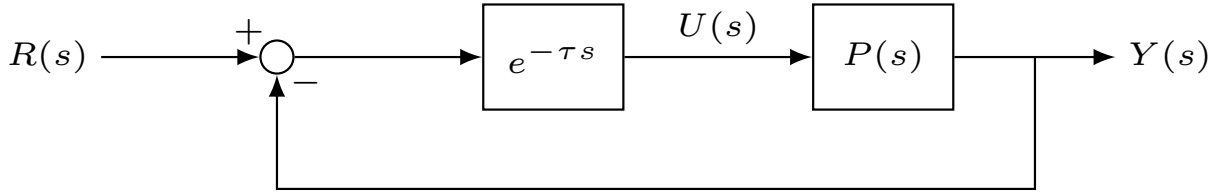
Margem de atraso (MA)

- A Margem de Atraso (MA) é caracterizada pelo máximo atraso $\tau > 0$ que pode ocorrer no sinal $u(t)$ na entrada da planta $P(s)$ antes do sistema tornar-se instável.

- Note que um atraso τ no sinal $u(t)$, corresponde no domínio da frequência ao produto por $e^{-\tau s}$, ou seja:

$$\mathcal{L}[u(t-\tau)\mu(t-\tau)] = e^{-\tau s}\mathcal{L}[u(t)]$$

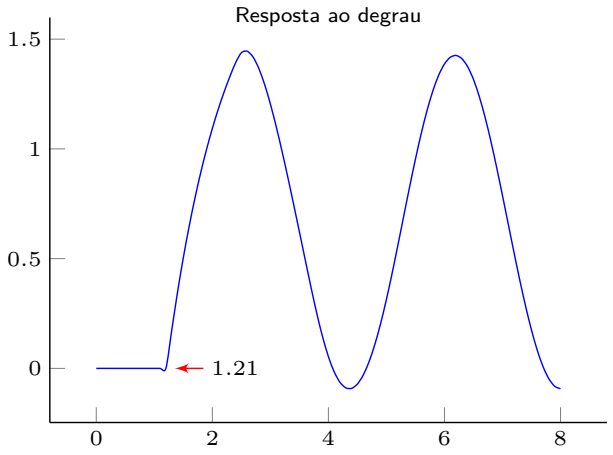
como ilustrado na figura abaixo.



- MA, em segundos, é dada por $\mathrm{MA} = \dfrac{\mathrm{MF}}{\omega_g}\dfrac{[\mathrm{rad}]}{[\mathrm{rad/s}]}$.

- A planta $P(s) = 2/(s+1)$, com $\mathrm{MF} = 120^\circ$ em $\omega_g = \sqrt{3}\,\mathrm{rad/s}$, fornece $\mathrm{MA} = 1.21\,\mathrm{s}$.

- A figura apresenta a resposta ao degrau em malha fechada com $\tau = 1.21$ (no limite da estabilidade).



Margem de ganho e de fase

Relação da MF com o fator de amortecimento ζ

- Suponha que a malha aberta $G(s) = K(s)P(s)$ seja dada pelo sistema padrão:

$$G(s) = \omega_n^2/(s(s + 2\zeta\omega_n))$$

- Como MF é calculada na frequência em que $|G(\mathrm{j}\omega_g)| = 1(0\,\mathrm{dB})$, tem-se

$$\omega_g = \omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}$$

- Nessa frequência, o ângulo de $G(s)$ é dado por

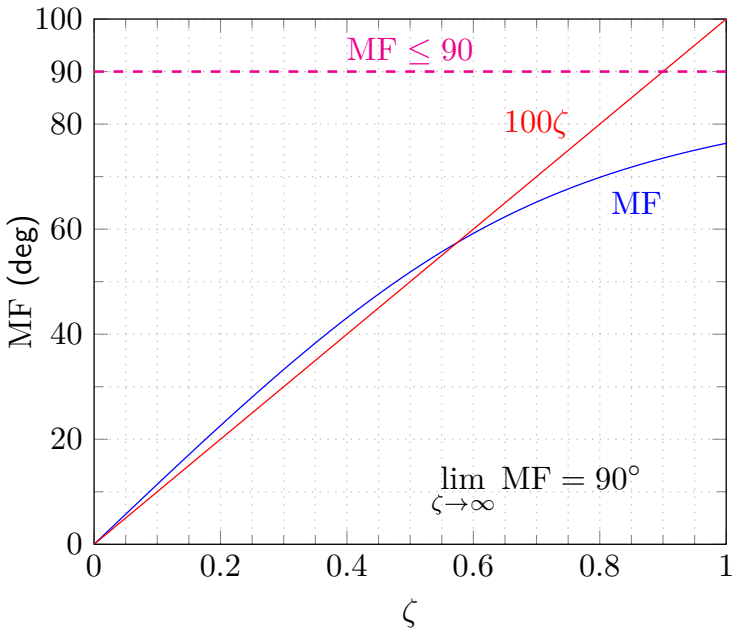
$$\angle G(\mathrm{j}\omega_g) = -\angle \mathrm{j}\omega_g - \angle(\mathrm{j}\omega_g + 2\zeta\omega_n) = -90^\circ - \arctan\frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}{2\zeta}$$

- Portanto, a margem de fase fica sendo:

$$\begin{aligned}\mathrm{MF} &= 180^\circ + \angle G(\mathrm{j}\omega_g)\\ &= \arctan\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}\end{aligned}$$

- Assim, na faixa $0 \le \zeta \le 0.7$, uma aproximação bastante razoável é dada por

$$\mathrm{MF} \approx 100\zeta$$



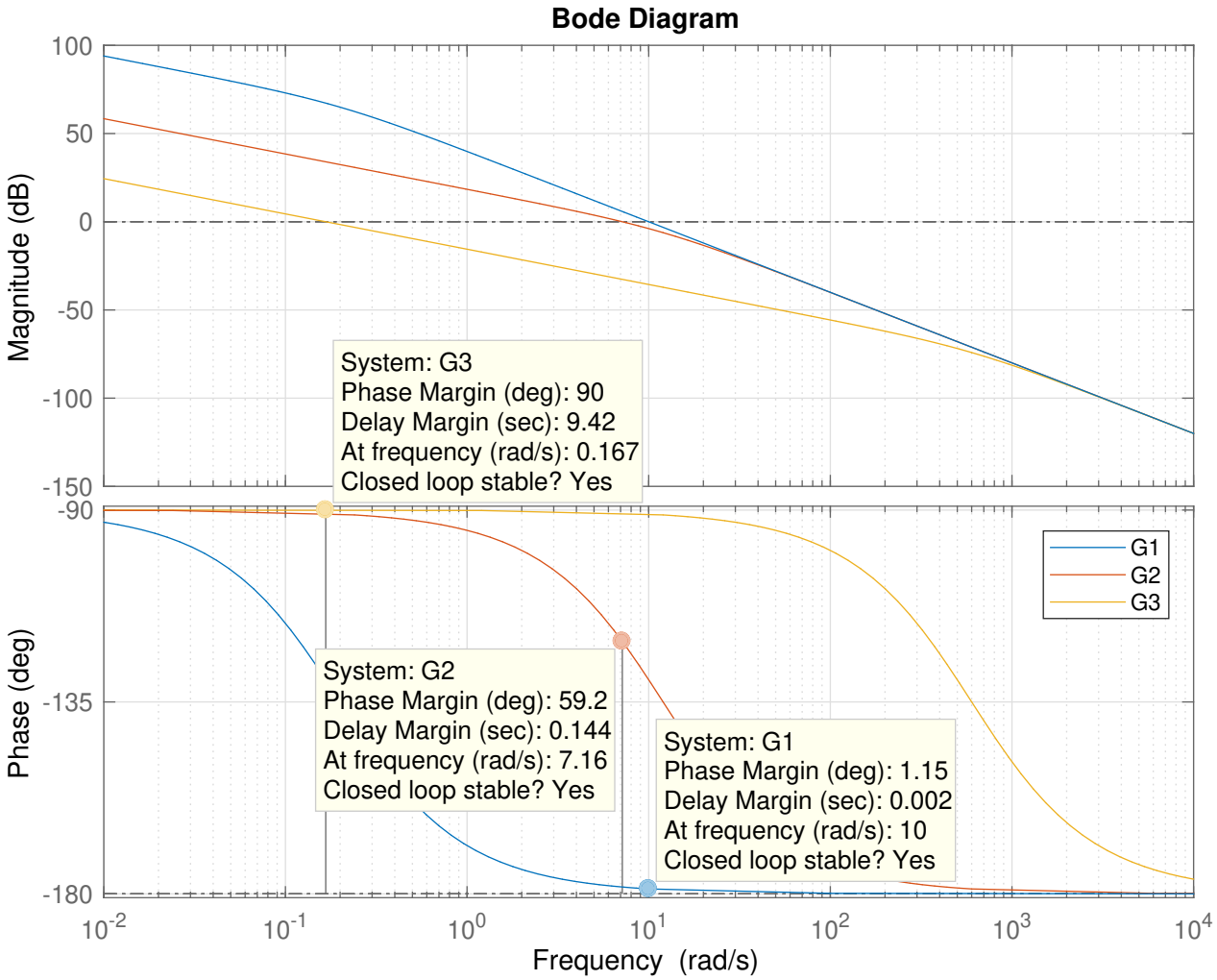
Margem de ganho e de fase

Relação da MF com o fator de amortecimento ζ

- Exemplo: A figura abaixo apresenta MF para as três plantas

$$G_i(s) = \omega_n^2/(s(s+2\zeta_i\omega_n)), \qquad i = 1, 2, 3$$

em que $\zeta_1 = 0.01$, $\zeta_2 = 0.6$ e $\zeta_3 = 30$, com $\omega_n = 10$.



Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

- O compensador por avanço de fase é dado por

$$\mathcal{K}(s) = \hat{K}\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = \frac{\hat{K}}{\alpha}\frac{s+z}{s+p}, \qquad \text{com } 0<\alpha<1 \quad \text{e} \quad p>z>0$$

- Note a relação entre z, p, e α dada por: $z = 1/T$, $p = 1/(\alpha T)$ e $\alpha p = z$.
- O ângulo de fase de $\mathcal{K}(s)$ é dado por $\phi(\omega) = \arctan(\omega T) - \arctan(\alpha T\omega)$
$$= -\tan^{-1}\left(T\omega(\alpha-1)/(1+\alpha T^2\omega^2)\right)$$
- Frequência em que a fase é máxima:

$$\omega_{\phi_{\max}} = \sqrt{zp} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

- A fase máxima $\phi_{\max}$ é dada por:

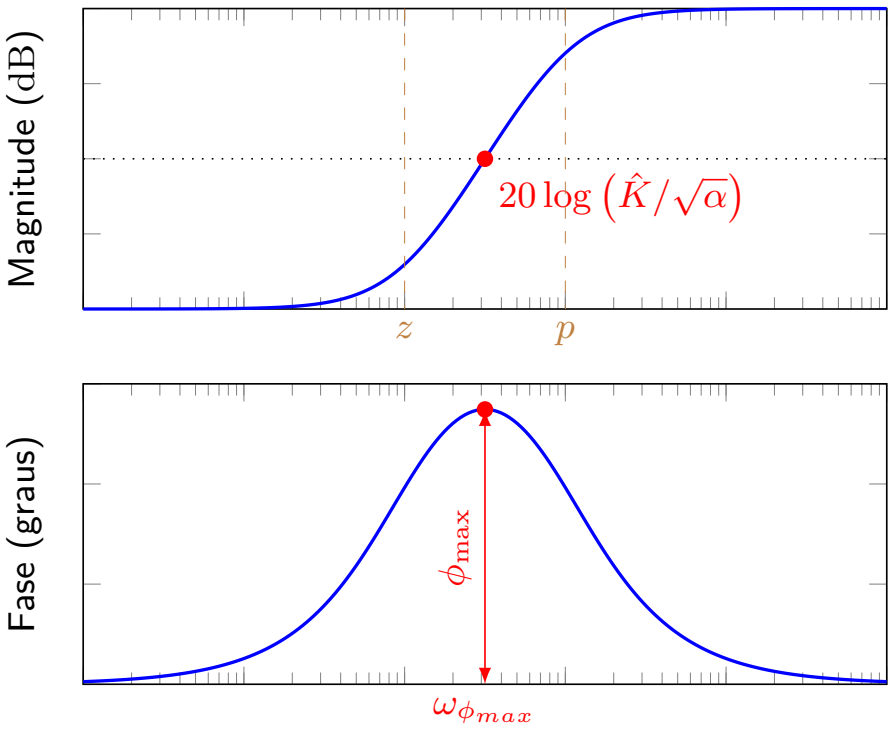
$$\sin\phi_{\max} = (1-\alpha)/(1+\alpha)$$

Equivalentemente:

$$\alpha = (1-\sin\phi_{\max})/(1+\sin\phi_{\max})$$

- O ganho em $\omega_{\phi_{\max}}$ é justamente:

$$|\mathcal{K}(\mathrm{j}\omega_{\phi_{\max}})| = 20\log\left(\hat{K}/\sqrt{\alpha}\right)\,\mathrm{dB}$$



Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

- Exemplo: Considere a malha de controle padrão com a planta $P(s) = 1/(s(s+1))$.
- O desempenho desejado em malha fechada é dado por:
  - erro estacionário à entrada rampa menor que 0.1;
  - Sobressinal (overshoot) menor que 20%.
- Solução: Calculando o erro estacionário à rampa $R(s) = 1/s^2$, tem-se

$$e_{\text{ss}} = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\mathcal{K}(s)P(s)}R(s) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s+\frac{\mathcal{K}(s)}{s+1}} = \frac{1}{\mathcal{K}(0)}$$

- Como $e_{\text{ss}} \leq 0.1$, o ganho estático do controlador, dado por $\mathcal{K}(0) = \hat{K}$, deve satisfazer $\mathcal{K}(0) \geq 10$. Assim, o ganho é escolhido como sendo $\hat{K} = 10$.
- O sobressinal desejado $M_p < 20\%$ implica que $\zeta \geq 0.45$, que por sua vez implica uma margem de fase desejada $\text{MF} \geq 45°$.
- A frequência de cruzamento de ganho ω_g para $\hat{K}P(s)$ é dada por

$$|\hat{K}P(\mathrm{j}\omega_g)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10}{|\mathrm{j}\omega_g||\mathrm{j}\omega_g+1|} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_g^2(\omega_g^2+1) = 100$$

- Resolvendo essa equação, obtém-se $\omega_g = 3.08\ \text{rad/s}$.

Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

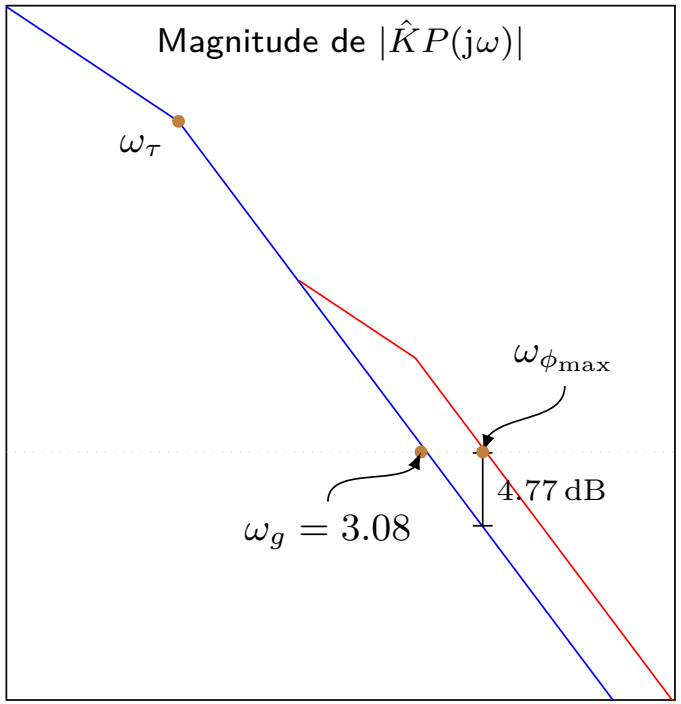
- A fase de $\hat{K}P(s)$ na frequência ω_g é dada por

$$\phi(\omega_g) = \angle \hat{K}P(\mathrm{j}\omega_g) = -90^\circ - 72^\circ = -162^\circ$$

- Portanto, a malha aberta $\hat{K}P(s)$ possui $\mathrm{MF} = 18^\circ$.
- Para se obter $\mathrm{MF} \geq 45^\circ$, é necessário adicionar pelo menos 27°.
- Uma vez decidido o valor, por exemplo $\phi_{\max} = 30^\circ$, o parâmetro α é dado por:

$$\sin\phi_{\max} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

- Na frequência $\omega_{\phi_{\max}}$, o aumento em magnitude de $\hat{K}P(s)$ será $20\log(1/\sqrt{\alpha}) = 4.77\,\mathrm{dB}$.



- Para se determinar $\omega_{\phi_{\max}}$ é preciso agora calcular a nova frequência de cruzamento de ganho $\bar{\omega}$ tal que $|\hat{K}P(\mathrm{j}\bar{\omega})| = -4.77\,\mathrm{dB} = 1/\sqrt{3}$, como segue:

$$\frac{10}{|\mathrm{j}\bar{\omega}||\mathrm{j}\bar{\omega}+1|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad 10\sqrt{3} = \bar{\omega}\sqrt{\bar{\omega}^2+1} \quad \Rightarrow \quad \omega_{\phi_{\max}} = \bar{\omega} = 4.1$$

Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

- Note que a fase de $P(s)$, em $\bar{\omega} = 4.1\,\mathrm{rad/s}$, é dada por $\angle P(\mathrm{j}\bar{\omega}) = -166.3^\circ$. Assim, a adição de 30° exatamente nessa frequência, fornecerá $\mathrm{MF} = 43.7^\circ$.

- O zero do compensador está localizado em

$$z = \omega_{\phi_{\max}}\sqrt{\alpha} = 4.1/\sqrt{3} = 2.37$$

- O polo do compensador está localizado em

$$p = z/\alpha = 2.37 \times 3 = 7.11$$

- O compensador fica sendo:

$$\mathcal{K}(s) = \frac{\hat{K}}{\alpha}\frac{s+z}{s+p} = 30\frac{s+2.37}{s+7.11}$$

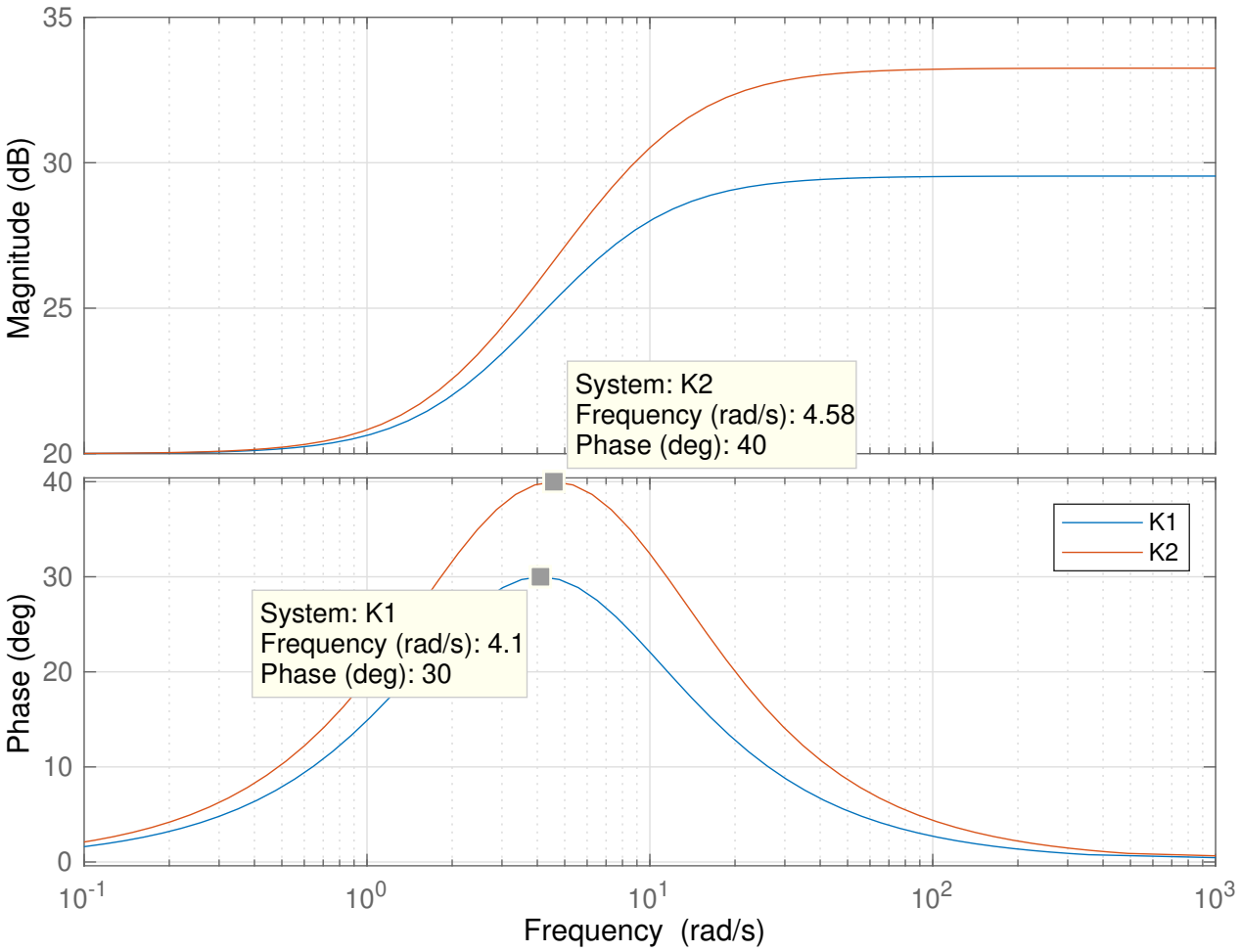
- Com esse compensador, $\mathrm{MF} = 43.7^\circ$, como esperado, e o sobressinal foi de aproximadamente 29%.

- Usando $\phi_{\max} = 40^\circ$, foi obtido o compensador $\mathcal{K}(s) = 46\dfrac{s+2.13}{s+9.82}$ que fornece um sobressinal de 20% e $\mathrm{MF} = 52.3^\circ$ em $\omega_{\phi_{\max}} = \omega_g = 4.58\,\mathrm{rad/s}$.

Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

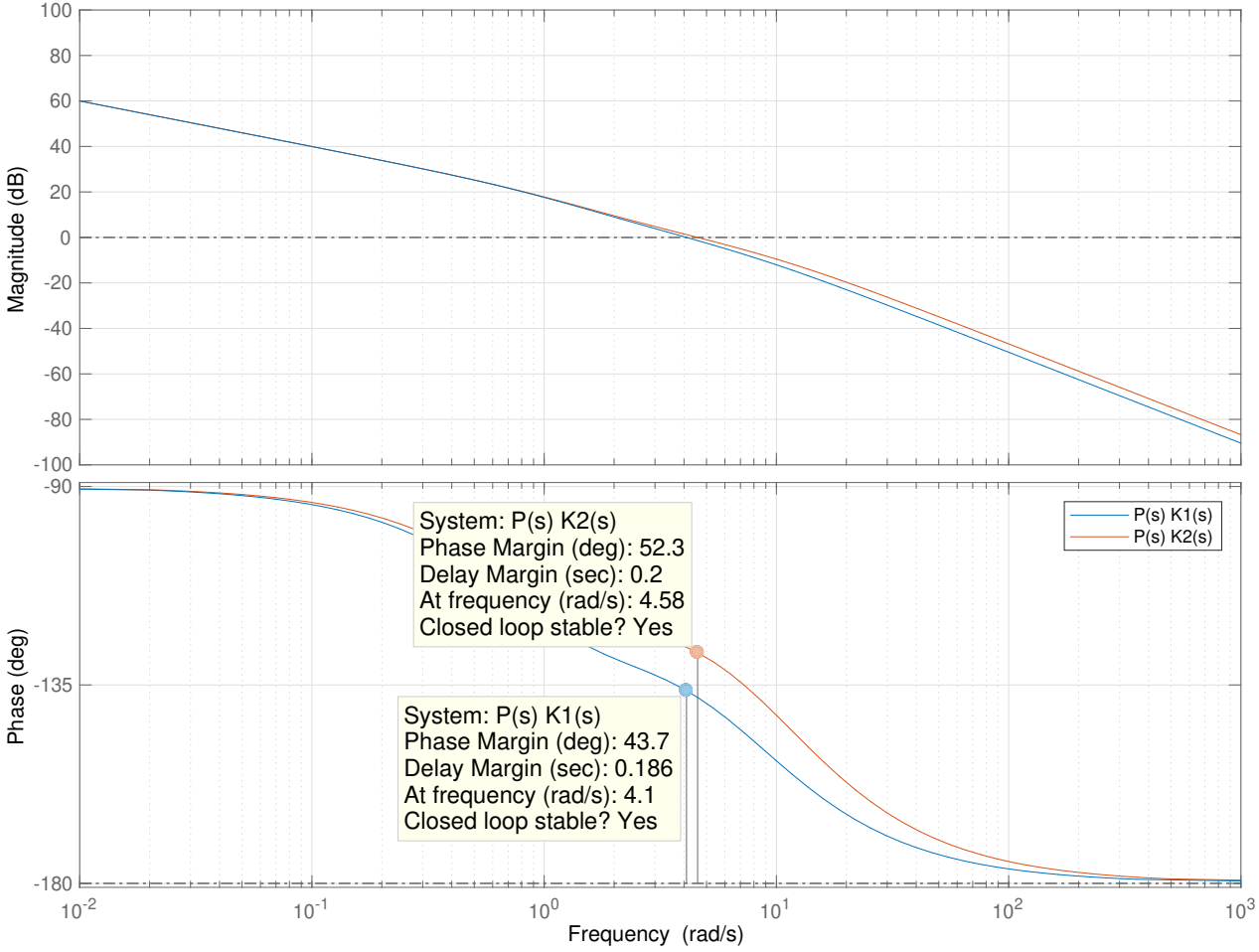
- Diagrama de Bode dos compensadores $\mathcal{K}_1(s) = 30\dfrac{s+2.37}{s+7.11}$ e $\mathcal{K}_2(s) = 46\dfrac{s+2.13}{s+9.82}$



Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

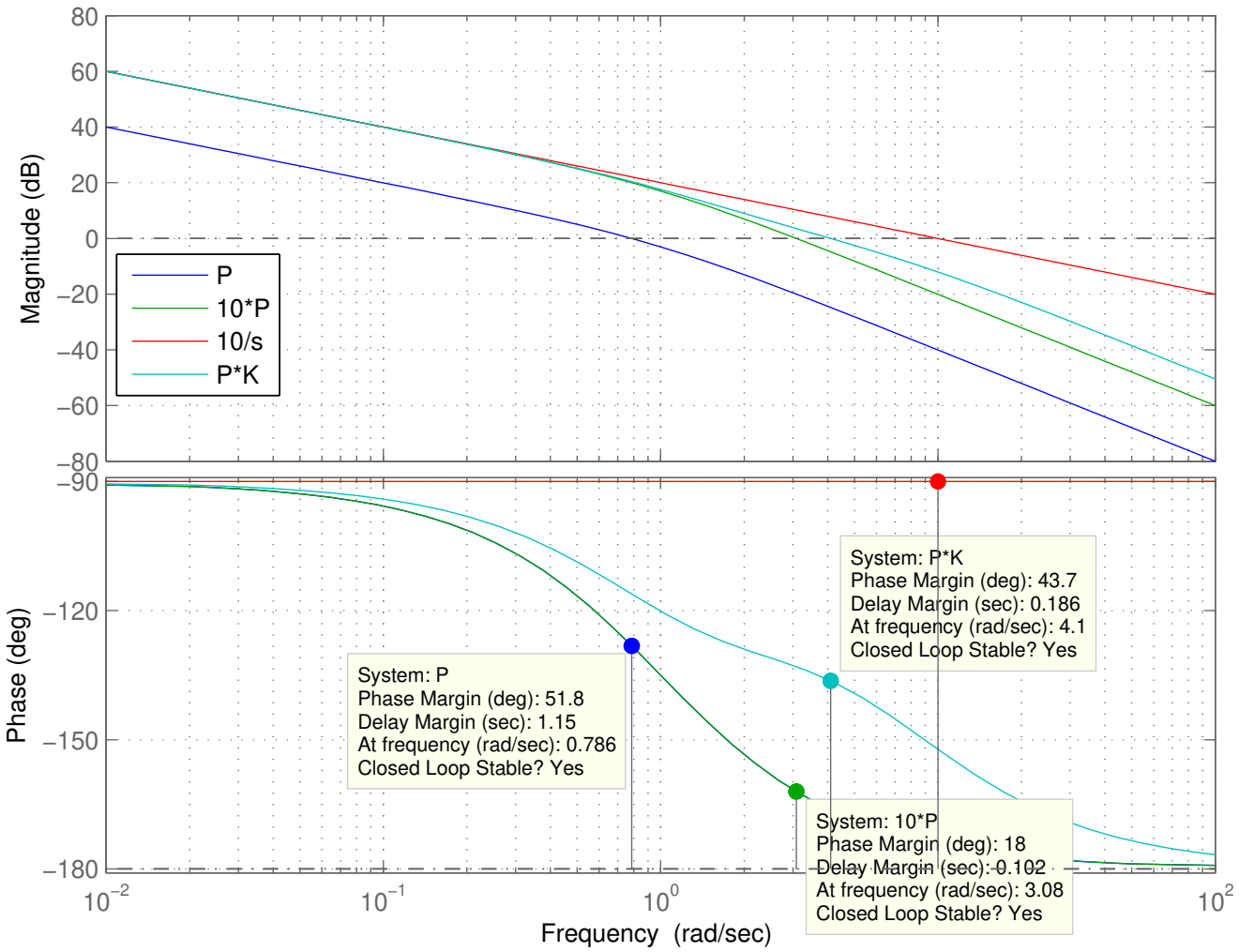
- Diagrama de Bode da malha aberta usando ambos os controladores $\mathcal{K}_1(s)$ e $\mathcal{K}_2(s)$



Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

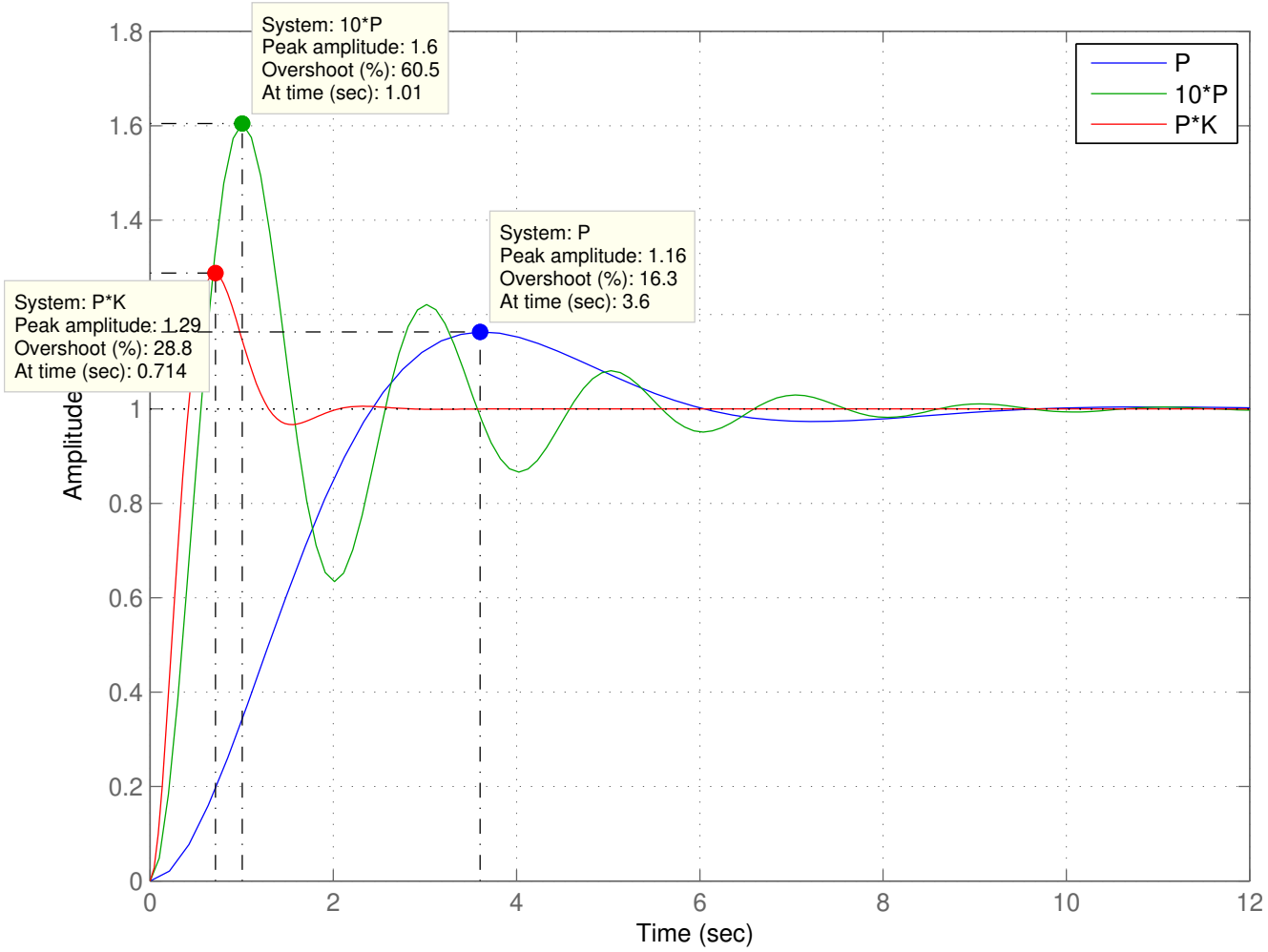
- A figura baixo apresenta o diagrama de Bode de $P(s)$, de $10P(s)$, de $10/s$ e de $\mathcal{K}(s)P(s)$ com $\mathcal{K}(s) = 30(s + 2.37)/(s + 7.11)$



Projeto de controladores na frequência

Compensação por avanço de fase

- A figura abaixo apresenta a resposta ao degrau para o sistema em malha fechada usando: $P(s)$, $10P(s)$ e $\mathcal{K}(s)P(s)$, com $\mathcal{K}(s) = 30(s + 2.37)/(s + 7.11)$



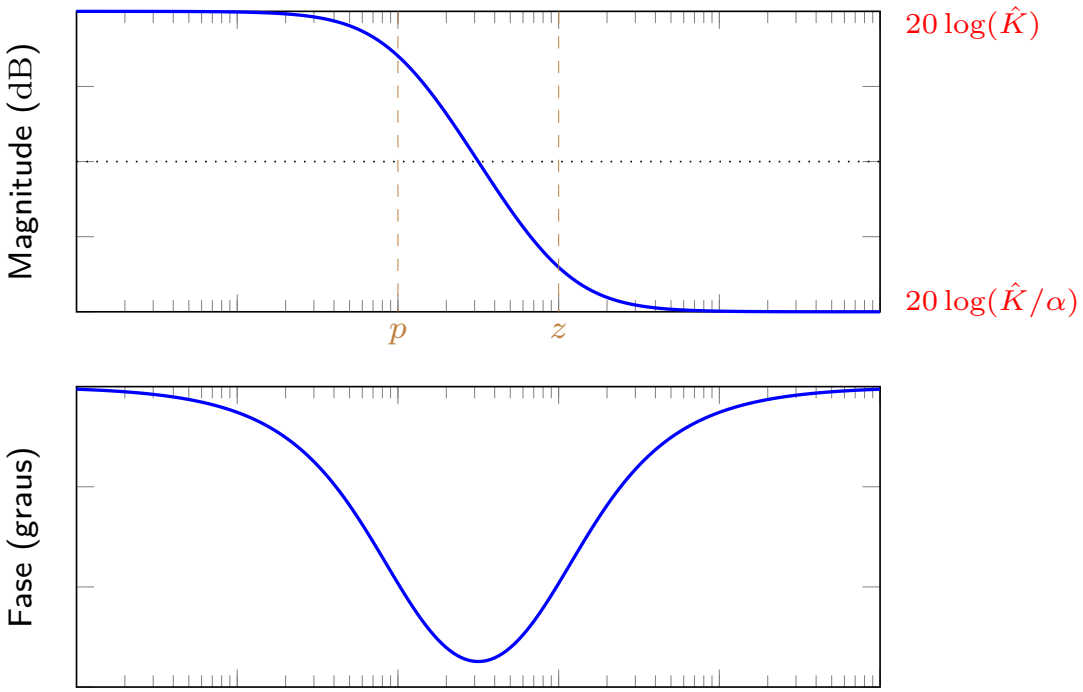
Projeto de controladores na frequência

Compensação por atraso de fase

- Para o compensador em atraso de fase, as fórmulas anteriores se mantêm válidas, porém $\alpha > 1$:

$$\mathcal{K}(s) = \hat{K}\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = \frac{\hat{K}}{\alpha}\frac{s+z}{s+p}, \qquad \text{com } \alpha > 1 \quad \text{e} \quad z > p > 0$$

- A forma do diagrama de Bode está apresentada na figura abaixo.



- Com esse compensador, é possível aumentar o ganho estático da malha aberta sem alterar a frequência de cruzamento de ganho, mantendo assim a MF original.

Projeto de controladores na frequência

Compensação por atraso de fase

- Exemplo: Repetir o problema anterior em que $P(s) = 1/(s(s+1))$ usando o controlador em atraso de fase.

- O ganho estático para garantir um erro estacionário de 0.1 tinha sido determinado como sendo $\mathcal{K}(0) = 10$. Assim $\hat{K} = 10$.

- Notando que $P(s)$ tem $\mathrm{MF} = 51.8^\circ$ em $\omega_g = 0.786$, que já atende a especificação $\zeta \geq 0.45$, pode-se então escolher $\alpha = 10$ de forma a manter ω_g e MF inalterados.

- A escolha de T determina a localização do polo e do zero. Para não alterar ω_g e MF, o ideal é alocar o polo e o zero bem abaixo da frequência de cruzamento de ganho.

- Escolhendo $T = 100$, tem-se $z = 1/T = 0.01$ e $p = 1/(\alpha T) = 0.001$, fornecendo:

$$\mathcal{K}_1(s) = \frac{\hat{K}}{\alpha}\frac{s+z}{s+p} = \frac{s+0.01}{s+0.001}$$

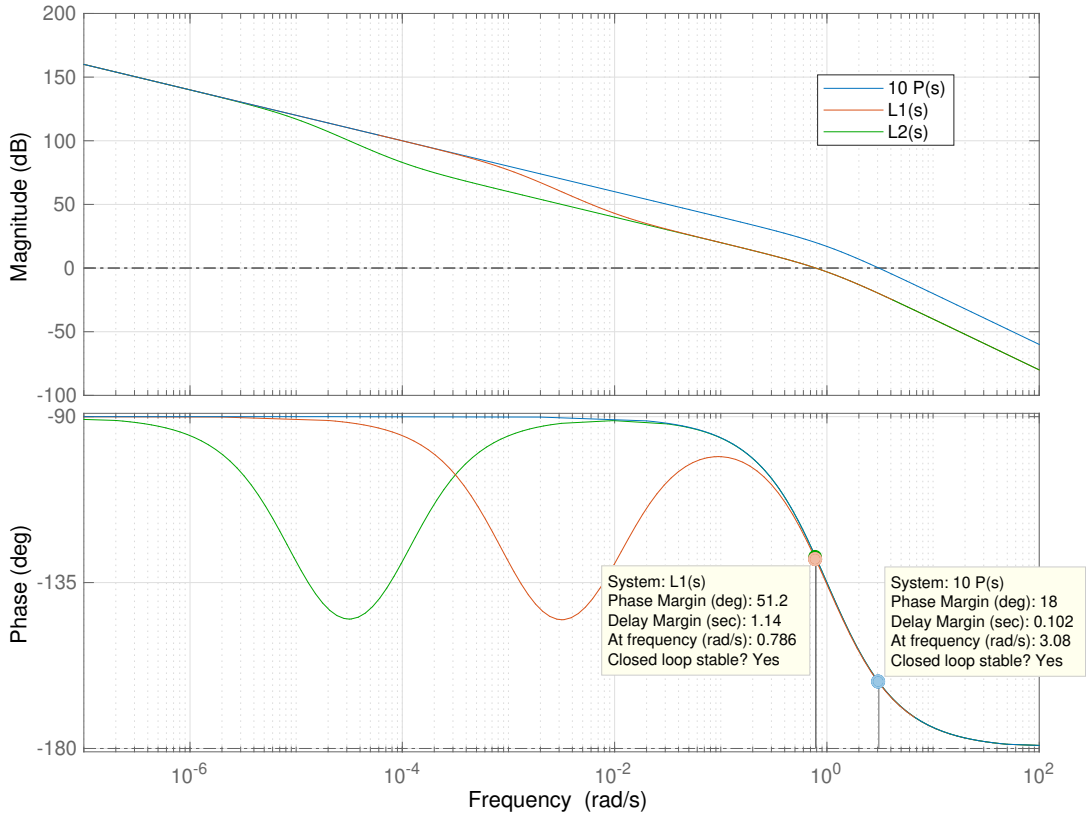
- Observação: Não deve-se selecionar a localização dos polos numa frequência mais baixa do necessário, como por exemplo, o compensador abaixo:

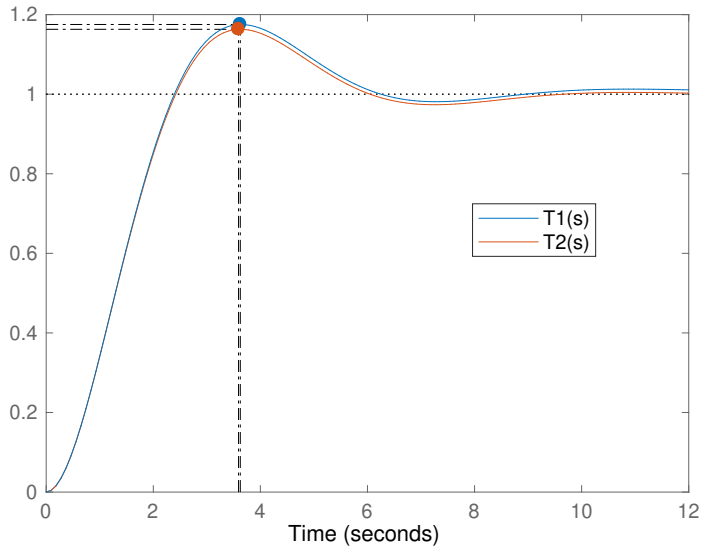
$$\mathcal{K}_2(s) = \frac{s+10^{-4}}{s+10^{-5}}$$

Projeto de controladores na frequência

Compensação por atraso de fase

- Diagrama de Bode de $10P(s)$, $L_1(s) = \mathcal{K}_1(s)P(s)$ e $L_2(s) = \mathcal{K}_2(s)P(s)$.





- Percebe-se que ambos os controladores forneceram as especificações desejadas.
- No entanto, o compensador $\mathcal{K}_2(s)$ possui polos muito mais próximos do eixo imaginário; o que não é algo desejável.

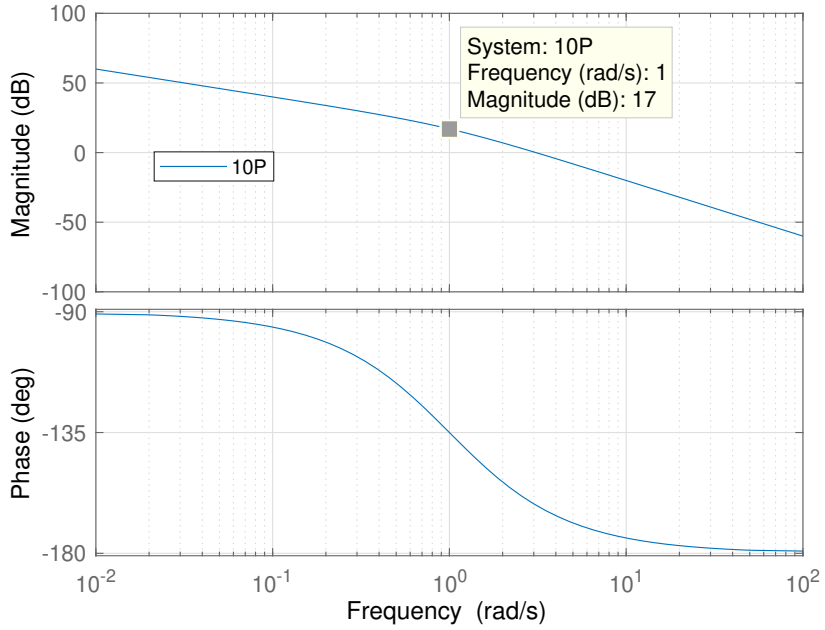
Projeto de controladores na frequência

Compensação por atraso de fase

- Exemplo: É possível calcular $\mathcal{K}(s)$ para fornecer MF de forma quase exata.
- Suponha que se deseje uma margem de fase $\mathrm{MF} = 45^\circ$ para o exemplo anterior em que a planta é dada por $P(s) = 1/(s(s+1))$ e $\hat{K} = 10$, para fornecer K_v adequado.
- Assim, o ângulo na (nova) frequência de cruzamento de ganho ω_g deverá ser

$$\angle P(\mathrm{j}\omega_g) = -180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$$

- Como a fase de $10P(s)$ já passa em -135°, basta agora determinar a frequência corresponde de forma a fazer com que seja ω_g.



Projeto de controladores na frequência

Compensação por atraso de fase

- A frequência de cruzamento de ganho ω_g é determinada como segue:

$$-135^\circ = \angle P(\mathrm{j}\omega_g) = -\angle \mathrm{j}\omega_g - \angle \mathrm{j}\omega_g + 1 = -90^\circ - \tan^{-1}\omega_g \quad \Longrightarrow \quad \omega_g = 1\,\mathrm{rad/s}$$

- Nessa frequência, considerando que $\hat{K} = 10$, a magnitude é

$$\left|10P(\mathrm{j}\omega_g)\right|_{\omega_g=1} = 5\sqrt{2} = 17\,\mathrm{dB}$$

- Assim, $\mathcal{K}(s)$ precisa remover exatamente $-20\log_{10}(5\sqrt{2}) = -17\,\mathrm{dB}$ para que a nova frequência de cruzamento de ganho esteja exatamente em $\omega_g = 1\,\mathrm{rad/s}$.

- Como o ganho total (desconsiderando $\hat{K}$) de $\mathcal{K}(s)$ é $-20\log_{10}(\alpha)$, tem-se $\alpha = 5\sqrt{2}$.

- Escolhendo-se a localização do compensador, significativamente abaixo da nova frequência de corte, por exemplo, em $\omega_{\phi_{\max}} = \omega_g/200 = 0.005\,\mathrm{rad/s}$, tem-se:

$$T = 1/(\omega_{\phi_{\max}}\sqrt{\alpha}) = 75.2121, \quad z = 1/T = 0.0133 \quad \text{e} \quad p = 1/(\alpha T) = 0.0019$$

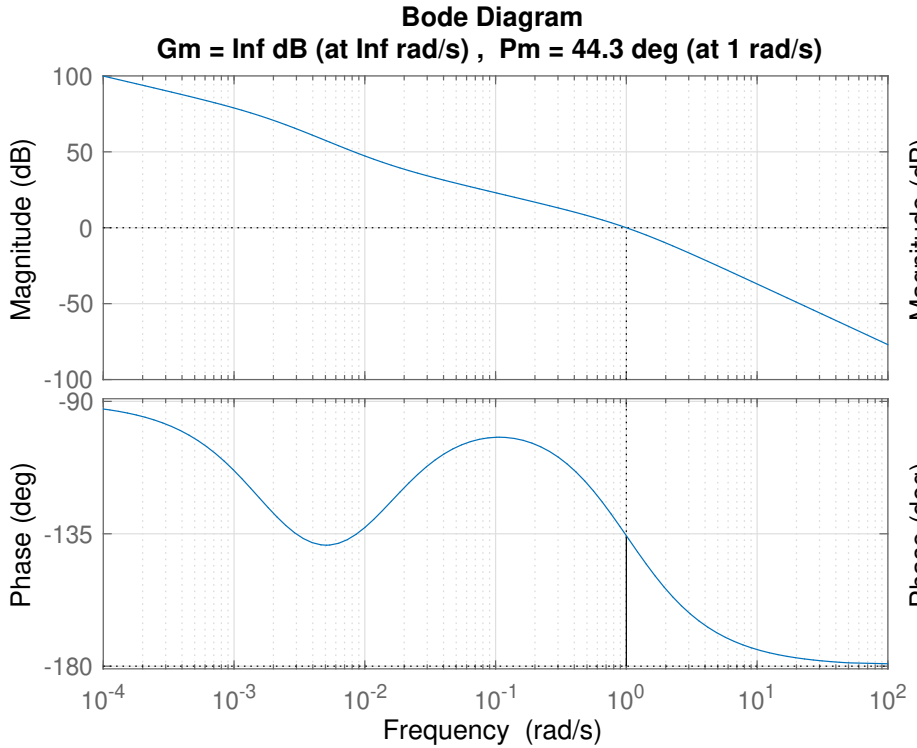
- Assim, o controlador fica sendo: $\mathcal{K}(s) = \dfrac{\hat{K}}{\alpha}\dfrac{(s+z)}{(s+p)} = \dfrac{10}{5\sqrt{2}}\dfrac{(s+0.0133)}{(s+0.0019)}$

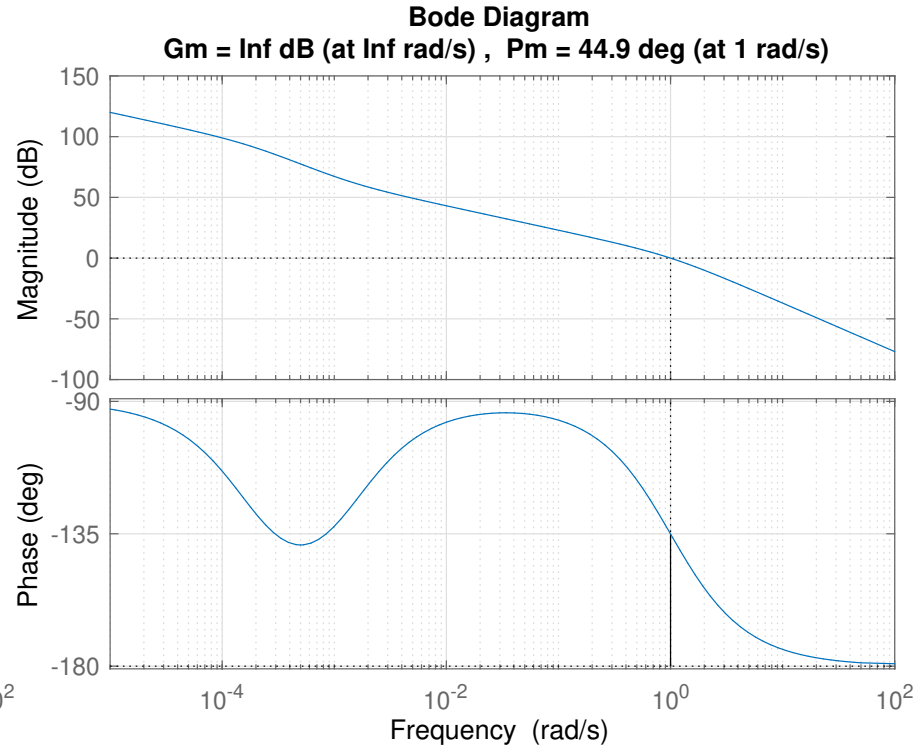
Projeto de controladores na frequência

Compensação por atraso de fase

- A figura (esquerda) apresenta o diagrama de Bode de $L(s) = K(s)P(s)$ em que:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{K}(s) = \frac{10}{5\sqrt{2}}\frac{(s+0.0133)}{(s+0.0019)}$$





- A margem de fase obtida foi $\mathrm{MF} = 44.3^\circ$ ao invés de $\mathrm{MF} = 45^\circ$. Note que que esse controlador contribui com uma fase negativa (embora pequena) em torno de ω_g.
- A figura (direita) apresenta o diagrama de Bode com o compensador projetado usando-se $\omega_{\phi_{\max}} = \omega_g/2000 = 0.0005\,\mathrm{rad/s}$, que fornece $\mathrm{MF} = 44.9^\circ$.

Projeto de controladores na frequência

Projeto de forma a garantir MF e ω_g exatos

- Exemplo: Também é possível efetuar o projeto de $K(s)$ de forma a fornecer precisamente uma margem de fase MF desejada numa frequência específica ω_g.
- Considere o problema anterior em que $P(s) = 1/(s(s+1))$ com a seguinte especificação: $\mathrm{MF} = 63^\circ$ em $\omega_g = 3.08\,\mathrm{rad/s}$.
- Suponha que o controlador tenha a seguinte forma:

$$K(s) = K\frac{s+z}{s+p}$$

- As equações que fornecem $\mathrm{MF} = 63^\circ$ em $\omega_g = 3.08$ rad/s são dadas por:

$$|K(s)P(s)|_{s=\mathrm{j}\omega_g} = 1\,(0\,\mathrm{dB}) \qquad \text{e} \qquad \angle K(s)P(s)\Big|_{s=\mathrm{j}\omega_g} = -117^\circ$$

- A primeira equação fornece

$$\left|K\frac{s+z}{s+p}P(s)\right|_{s=\mathrm{j}\omega_g} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad K\left|\frac{\mathrm{j}\omega_g+z}{\mathrm{j}\omega_g+p}\right||P(\mathrm{j}\omega_g)| = 1$$

- Como $|P(\mathrm{j}\omega_g)| = 0.1026$, tem-se assim:

$$K\frac{|\mathrm{j}\omega_g+z|}{|\mathrm{j}\omega_g+p|} = 1/|P(\mathrm{j}\omega_g)| = 9.974$$

Projeto de controladores na frequência

Projeto de forma a garantir MF e ω_g exatos

- Da condição $\angle K(s)P(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega_g} = -117^\circ$ com $\angle P(s)|_{s=\mathrm{j}\omega_g} = -162^\circ$, obtém-se

$$\angle K(\mathrm{j}\omega_g) = \angle(\mathrm{j}\omega_g + z) - \angle(\mathrm{j}\omega_g + p) = \beta = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \arctan\frac{\omega_g}{p} = \arctan\frac{\omega_g}{z} - 45^\circ$$

- Aplicando a relação trigonométrica (notando que $\tan^{-1}(\tan(x)) \not\equiv x$)

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

com $\alpha = \arctan\omega_g/z$ e $\beta = 45^\circ$ $(\tan 45^\circ = 1)$, obtém-se

$$\boxed{\frac{\omega_g}{p} = \frac{\omega_g/z - \tan\beta}{1 + (\omega_g/z)\tan\beta} = \frac{\omega_g - z\tan\beta}{z + \omega_g\tan\beta}} \qquad \Longrightarrow \qquad p = \frac{\omega_g(\omega_g\tan\beta + z)}{\omega_g - z\tan\beta}$$

- Escolhendo $z = \omega_g/3 = 1.03$, tem-se $p = 2\omega_g = 6.16$. O ganho K é obtido de

$$K\frac{|\mathrm{j}\omega_g + z|}{|\mathrm{j}\omega_g + p|} = 9.974 \quad \Rightarrow \quad 0.4714\,K = 9.974 \quad \Rightarrow \quad K = 21.16$$

- O controlador, que fornece exatamente $\mathrm{MF} = 63^\circ$ em $\omega_g = 3.08$ rad/s, é dado por

$$K(s) = 21.158\frac{s + 1.027}{s + 6.16}$$

- Nesse projeto, o ganho estático $\hat{K}$ não pode ser arbitrariamente especificado.

Projeto de controladores na frequência

Projeto de forma a garantir MF e ω_g exatos

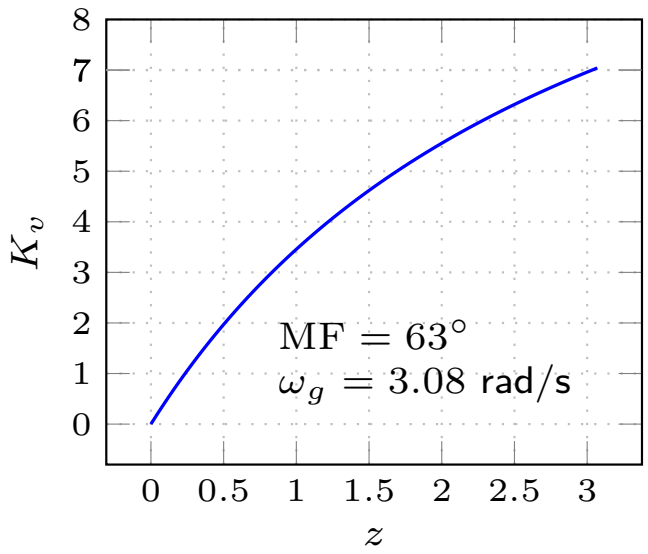
- Para dados ω_g e β, a relação entre p e z é dada por

$$p = \frac{\omega_g(\omega_g \tan\beta + z)}{\omega_g - z\tan\beta} \qquad \text{e} \qquad z = \frac{\omega_g(p - \omega_g \tan\beta)}{\omega_g + p\tan\beta}$$

  com β o ângulo que o controlador $K(s)$ deve fornecer para garantir MF e ω_g.

- Note que z está limitado por $z < \omega_g/\tan\beta$. O valor de z que produz o maior ganho estático é obtido no limite com $z \to \omega_g/\tan\beta$ e $p \to +\infty$.

Planta $P(s) = 1/(s(s+1))$



Controlador: $K(s) = K\dfrac{s+z}{s+p}$