EM707 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

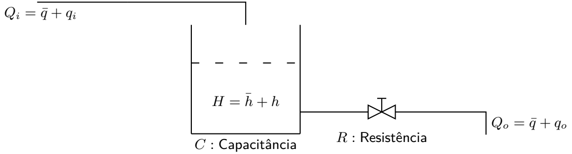
Nota ao leitor

- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4^a edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
- Material suplementar:
  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8^a edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

Conceitos de modelagem de sistemas

Sistema de nível de líquido

- Para o sistema abaixo, $\bar{h}$ é a altura em regime permanente constante e $h(t)$ sua variação. De forma similar, $\bar{q}$ é a vazão em regime permanente constante e $q_i(t)$ e $q_o(t)$ são as variações nas vazões de entrada e de saída, respectivamente.



- A capacitância C $[m^2]$ é a variação no volume $[m^3]$ pela variação na altura $[m]$.

- Como o fluxo de entrada $\bar{q} + q_i$ menos o fluxo de saída $\bar{q} + q_o$ durante um intervalo de tempo $\mathrm{d}t$ é igual à quantidade adicional armazenada no reservatório, tem-se

$$C\mathrm{d}H = (Q_i - Q_o)\mathrm{d}t$$

- A resistência R, em $[s/m^2]$, representa a variação na altura $[m]$ pela variação na vazão em volume $[m^3/s]$. Essa relação é dada por:

$$Q_o = \frac{H^\beta}{R}, \quad 0 < \beta \leq 1, \qquad \begin{cases} \beta = 1 & \text{, para regime laminar} \\ \beta = 1/2 & \text{, para regime turbulento} \end{cases}$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Sistema de nível de líquido

- Portanto, as equações que governam esse sistema são:

$$C\mathrm{d}H = (Q_i - Q_o)\mathrm{d}t \qquad \text{e} \qquad RQ_o = H^\beta$$

- Substituindo $H = \bar{h} + h$ e $Q_i = \bar{q} + q_i$, obtém-se

$$C\mathrm{d}h = (\bar{q} + q_i - H^\beta/R)\mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad RC\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = R\bar{q} + Rq_i - H^\beta$$

- A função H^β linearizada no ponto $\bar{H} = \bar{h}$ (regime permanente) é dada por

$$H^\beta \approx \bar{H}^\beta + \beta\bar{H}^{(\beta-1)}(H - \bar{H}) = \bar{h}^\beta + \beta\bar{h}^{(\beta-1)}h$$

  que substituída na equação do tanque, fornece:

$$RC\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = R\bar{q} + Rq_i - \bar{h}^\beta - \beta\bar{h}^{(\beta-1)}h$$

- Como em regime permanente $\bar{h}^\beta = R\bar{q}$ (já que $q_o = q_i = h = 0$), tem-se

$$RC\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = Rq_i - \beta\bar{h}^{(\beta-1)}h \quad \Longrightarrow \quad \tau\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \alpha h = Rq_i, \quad \begin{cases} \tau = RC \\ \alpha = \beta\bar{h}^{(\beta-1)} \end{cases}$$

- Substituindo a linearização de H^β na relação $RQ_o = H^\beta$, tem-se

$$R(\bar{q} + q_o) = \bar{h}^\beta + \beta\bar{h}^{(\beta-1)}h \quad \Longrightarrow \quad Rq_o = \alpha h$$

- Foi visto que a dinâmica do sistema fluídico é dada pela seguinte equação diferencial:

$$\tau \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \alpha h = R q_i, \qquad \begin{cases} \beta = 1 & \text{, para regime laminar} \\ \beta = 1/2 & \text{, para regime turbulento} \end{cases}$$

- Para o caso turbulento, com $\beta = 1/2$ e $\alpha = \beta \bar{h}^{(\beta-1)} = 1/\sqrt{4\bar{h}}$, tem-se

$$\tau \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \alpha h = R q_i, \qquad \text{com } \tau = RC \text{ a constante de tempo.}$$

  Assim, a função de transferência entre $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$ e $Q_i(s) = \mathcal{L}[q_i(t)]$ é

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{\tau s + \alpha} \quad \Longrightarrow \quad \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\alpha}{\tau s + \alpha}$$

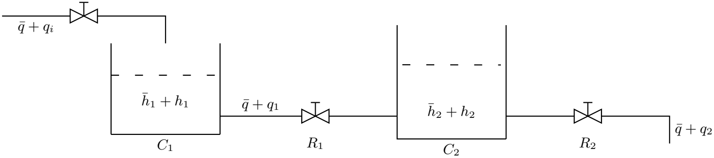
- Para o caso laminar, com $\beta = 1$ e $\alpha = 1$, tem-se

$$\tau \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h = R q_i, \qquad \tau = RC$$

  cuja função de transferência é dada por

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{\tau s + 1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

- Exemplo: Considere o sistema (em regime laminar) contendo dois tanques.



- Para o primeiro tanque, a relação entre as vazões, fornece:

$$C_1 \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = q_i - q_1$$

Para o segundo tanque, tem-se:

$$C_2 \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = q_1 - q_2$$

- As vazões que fluem pelas resistências R_1 e R_2 são dadas por

$$h_1 - h_2 = R_1 q_1 \qquad \text{e} \qquad h_2 = R_2 q_2$$

- Portanto, a função de transferência entre a entrada q_i e a saída q_2 é dada por:

$$\frac{Q_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)s + 1}$$

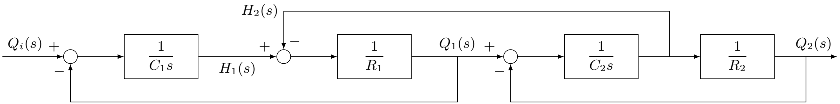
Conceitos de modelagem de sistemas

Sistema de nível de líquido

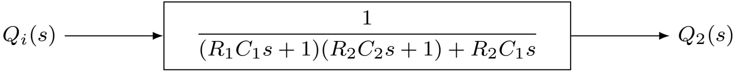
- Obtendo a função de transferência através dos diagramas de bloco dos subsistemas.
- Para as relações $h_1 - h_2 = R_1 q_1$ e $h_2 = R_2 q_2$, tem-se respectivamente:

- As relações $C_1 \mathrm{d}h_1 = (q_i - q_1)\mathrm{d}t$ e $C_2 \mathrm{d}h_2 = (q_1 - q_2)\mathrm{d}t$ fornecem respectivamente:

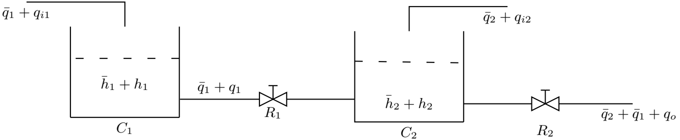
- Conectando-se os diagramas de bloco, obtém-se:



- Que após algumas simplificações, fornece a seguinte função de transferência:



- Exemplo: Considere o sistema (em regime laminar) contendo duas entradas.



- Para esse sistema, as equações são dadas por:

$$C_1 \mathrm{d}h_1 = (q_{i1} - q_1)\mathrm{d}t \qquad h_1 - h_2 = R_1 q_1$$
$$C_2 \mathrm{d}h_2 = (q_1 + q_{i2} - q_o)\mathrm{d}t \qquad h_2 = R_2 q_o$$

- Eliminando-se o estado intermediário q_1 das equações acima, obtém-se:

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C_1}\left(q_{i1} - \frac{h_1 - h_2}{R_1}\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C_2}\left(\frac{h_1 - h_2}{R_1} + q_{i2} - \frac{h_2}{R_2}\right)$$

- Exercício: Mostre que essas equações fornecem a seguinte função de transferência:

$$Q_o(s) = \frac{Q_{i1}(s) + (C_1 R_1 s + 1)\, Q_{i2}(s)}{C_1 C_2 R_1 R_2 s^2 + (C_1 R_1 + C_1 R_2 + C_2 R_2)s + 1}$$