EM707 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

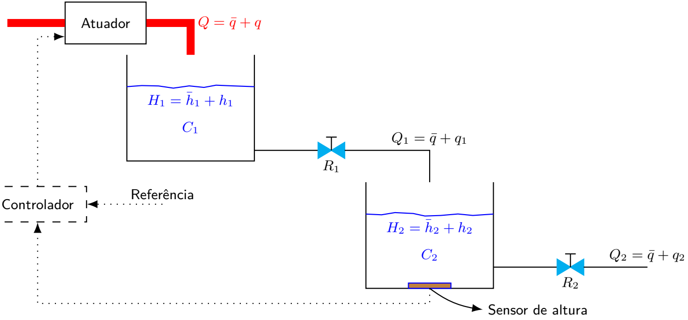
DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

Nota ao leitor

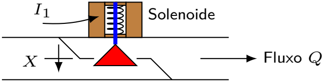
- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4^a edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
- Material suplementar:
  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8^a edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

- **Exemplo:** A figura abaixo apresenta um sistema de controle de nível de fluído, que pode ser dividido em 3 partes principais: planta, atuador e sensor.



- A planta (o processo) é o conjunto composto pelos 2 tanques.
- No tanque 1, a vazão de entrada é $Q = \bar{q} + q$ e a vazão de saída, através da resistência R_1, é $Q_1 = \bar{q} + q_1$, com $\bar{q}$ a vazão em regime permanente.
- No tanque 2, a vazão de entrada é Q_1 e de saída, através da resistência R_2, é $Q_2 = \bar{q} + q_2$.

- O atuador é composto por uma válvula solenoide que controla a quantidade de fluxo (a vazão Q) que alimenta o primeiro tanque.



- O solenoide desloca de uma distância X um êmbolo de massa m aplicando uma força magnética F, proporcional à corrente I_1 de comando:

$$F(X, I_1) = \frac{\delta\, I_1(t)^2}{(\epsilon + \gamma X(t))^2} \qquad \text{(eq 1)}$$

com δ, ϵ e γ constantes que dependem da propriedade do material.

- A equação que governa o êmbolo da válvula, acionado pelo solenoide, é dada por

$$m\ddot{X} + b\dot{X} + kX = F \qquad \text{(eq 2)}$$

com m, b e k, respectivamente, a massa, o amortecimento e a rigidez do sistema.

- A relação entre a vazão Q e o deslocamento do êmbolo X é dada por

$$Q(X) = Q_{\max}\left(1 - e^{-\phi X / X_{\max}}\right) \qquad \text{(eq 3)}$$

com $Q_{\max}$ a vazão máxima, $X_{\max}$ o deslocamento máximo e ϕ uma constante.

- A planta é composta dos 2 tanques. Para o primeiro tanque, a vazão de entrada é Q e de saída é Q_1. Para o segundo tanque, a vazão de entrada é Q_1 e de saída é Q_2.

- Para o tanque 1, cujo escoamento turbulento é dado por

$$H_1^{\beta} = Q_1 R_1, \qquad \beta = 1/2, \qquad H_1 = \bar{h}_1 + h_1,$$

com $\bar{h}_1$ a altura do tanque em regime permanente, tem-se

$$C_1 \frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}t} = Q - Q_1 \quad \Longrightarrow \quad C_1 \frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}t} + \frac{H_1^{\beta}}{R_1} = Q \qquad \text{(eq 4)}$$

- Para o tanque 2, cujo escoamento laminar é dado por

$$H_2 = Q_2 R_2, \qquad H_2 = \bar{h}_2 + h_2,$$

com $\bar{h}_2$ a altura do tanque em regime permanente, tem-se

$$C_2 \frac{\mathrm{d}H_2}{\mathrm{d}t} = Q_1 - Q_2, \quad \Longrightarrow \quad C_2 \frac{\mathrm{d}H_2}{\mathrm{d}t} + \frac{H_2}{R_2} = \frac{H_1^{\beta}}{R_1} \qquad \text{(eq 5)}$$

- A dinâmica **não linear** desse sistema, (eq 1)-(eq 5), é dada por

$$m\ddot{X} + b\dot{X} + kX = \frac{\delta\, I_1(t)^2}{(\epsilon + \gamma X(t))^2}$$

$$C_1\dot{H}_1 + H_1^{\beta}/R_1 = Q_{\max}\left(1 - e^{-\phi X/X_{\max}}\right)$$

$$C_2\dot{H}_2 + H_2/R_2 = H_1^{\beta}/R_1$$

- Os parâmetros numéricos para esse sistema são:

$$m = 0.2 \text{ [Kg]}, \quad k = 5900 \text{ [N/m]}, \quad b = 30 \text{ [N.m/s]}$$

$$\delta = 2 \times 10^{-1}, \quad \epsilon = 25 \times 10^{-3}, \quad \gamma = 300, \quad \beta = 1/2$$

$$R_1 = 800 \text{ [s/m}^2\text{]}, \quad R_2 = 500 \text{ [s/m}^2\text{]}$$

$$C_1 = 7 \times 10^{-2} \text{ [m}^2\text{]}, \quad C_2 = 5 \times 10^{-2} \text{ [m}^2\text{]}$$

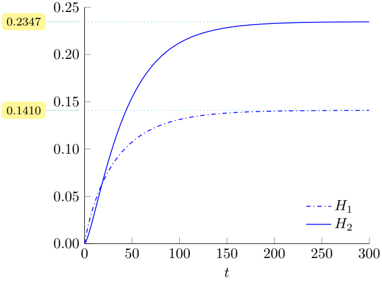
$$Q_{\max} = 4 \times 10^{-3} \text{ [m}^3\text{/s]}, \quad X_{\max} = 5 \times 10^{-3} \text{ [m]}, \quad \phi = 0.7$$

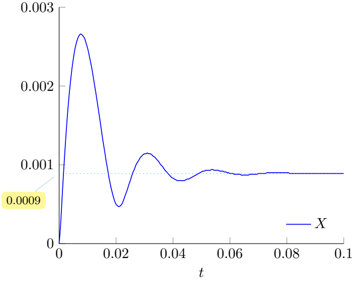
- O sistema não linear é simulado usando o pacote *ode suite* do matlab, usando a representação na forma de estado, com $x_1 = X$, $x_2 = \dot{X}$, $x_3 = H_1$ e $x_4 = H_2$.

- Um trecho do código teria a forma:

```
function dx = tanque_nao_lin(t,x)
...
dx1 = x(2);
dx2 = -b/m*x(2)-k/m*x(1)+delta*I1(t)^2/((epsilon+gamma*x(1))^2*m);
dx3 = -x(3)^beta/(C1*R1)+Qmax*(1-exp(-phi*x(1)/Xmax))/C1;
dx4 = -x(4)/(C2*R2)+x(3)^beta/(C2*R1);
```

- As figuras abaixo apresentam H_1, H_2 e X para a entrada $I_1(t) = 1.5$ [A].





- Suponha agora que se deseje um modelo linear. Assim, é preciso escolher o ponto em que o sistema não linear será linearizado.

- O mais usual é linearizar a dinâmica não linear em torno de seu regime permanente.

- Assim, em regime permanente, as variáveis do sistema passam a ser constantes e serão denotadas por: $\bar{\imath}_1$, $\bar{x}$, $\bar{q}$, $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, $\bar{p}_2$.

- A equação da força do solenoide em regime permanente é dada por

$$\bar{F} = \frac{\delta\,\bar{\imath}_1^2}{(\epsilon + \gamma\bar{x})^2}$$

- A equação da parte mecânica da válvula, em regime permanente, passa a ser

$$k\bar{x} = \bar{F} \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{x}(\epsilon + \gamma\bar{x})^2 = \delta\,\bar{\imath}_1^2/k$$

- Assim, dada uma entrada em corrente $\bar{\imath}_1$ [A] constante, pode-se determinar o deslocamento correspondente do êmbolo $\bar{x}$ [m] em regime permanente.

- Lembrando que $k = 5900$, $\delta = 0.2$, $\epsilon = 0.025$ e $\gamma = 300$, tem-se:

$\bar{\imath}_1 = 1$ [A] produzirá um deslocamento $\bar{x} = 6.677 \times 10^{-4}$ [m]

- A equação da vazão em regime permanente, passa a ser

$$\bar{q} = Q(\bar{x}) = Q_{\max}\left(1 - e^{-\phi\bar{x}/X_{\max}}\right)$$

- Note que em regime permanente, as vazões são dadas por $Q = Q_1 = Q_2 = \bar{q}$.
- Lembrando que os parâmetros da válvula são:

$$Q_{\max} = 4 \times 10^{-3}\ [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}], \qquad X_{\max} = 5 \times 10^{-3}\ [\mathrm{m}] \qquad \text{e} \qquad \phi = 0.7$$

- Assim, uma corrente $\bar{i}_1 = 1$ [A], que gera um deslocamento $\bar{x} = 6.677 \times 10^{-4}$ [m], produzirá uma vazão em regime permanente de

$$\bar{q} = 3.57 \times 10^{-4}\ [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$$

- Para o tanque 1, em que o regime é turbulento $(\beta = 1/2)$ tem-se

$$\sqrt{\bar{h}_1} = \bar{q}R_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{h}_1 = (\bar{q}R_1)^2$$

- Notando que $R_1 = 800$ [s/m^2], tem-se $\bar{h}_1 = 0.082$ [m].
- Para o tanque 2, em que o regime é laminar, com $R_2 = 500$ [s/m^2], tem-se

$$\bar{h}_2 = \bar{q}R_2 = 0.18\ [\mathrm{m}]$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Sensores e atuadores

- De posse dos valores em regime permanente, é possível agora linearizar as equações envolvidas através da aproximação de 1ª ordem da série de Taylor num ponto $\bar{x}$:

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})$$

- Assim, a linearização da força $F = \frac{\delta\, I_1(t)^2}{(\epsilon+\gamma X(t))^2}$ em torno do equilíbrio, fornecerá

$$F \approx F(\bar{x}, \bar{\imath}_1) + \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{\substack{X=\bar{x}\\ I_1=\bar{\imath}_1}} (X - \bar{x}) + \left.\frac{\partial F}{\partial I_1}\right|_{\substack{X=\bar{x}\\ I_1=\bar{\imath}_1}} (I_1 - \bar{\imath}_1)$$

  em que $X = \bar{x} + x$ com $\bar{x}$ o regime permanente e x a variação em torno desse equilíbrio. De forma análoga, $\bar{\imath}_1$ é o equilíbrio e i_1 a variação em torno desse ponto.

- Calculando as derivadas, tem-se finalmente

$$F \approx \bar{F} + \lambda_1\, x + \lambda_2\, i_1, \qquad \lambda_1 = -\frac{2\delta\, \gamma \bar{\imath}_1^2}{(\epsilon + \gamma\bar{x})^3}, \quad \lambda_2 = \frac{2\delta\, \bar{\imath}_1}{(\epsilon + \gamma\bar{x})^2}$$

- Assim, a equação da parte mecânica fica sendo:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + k(\bar{x} + x) = F, \qquad k\bar{x} = \bar{F}$$

$$\Longrightarrow \qquad m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \lambda_1\, x + \lambda_2\, i_1$$

- A equação da vazão $Q = Q_{\max}\left(1 - e^{-\phi \frac{X}{X_{\max}}}\right)$ linearizada (exercício) fica sendo:

$$Q \approx \bar{q} + q, \qquad q = \eta\, x, \qquad \eta = Q_{\max}\frac{\phi}{X_{\max}} e^{-(\phi \bar{x}/X_{\max})}$$

- A equação do tanque 1, cujo escoamento é turbulento, foi calculada como sendo

$$\tau_1 \frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}t} + \sqrt{H_1} = R_1 Q, \qquad \tau_1 = R_1 C_1, \qquad H_1 = \bar{h}_1 + h_1$$

- Lembrando que a linearização de $\sqrt{H_1}$ em torno de $\bar{h}_1$ fornece

$$\sqrt{H_1} \approx \sqrt{\bar{h}_1} + \mu h_1, \qquad \mu = 1/(2\sqrt{\bar{h}_1})$$

  e que $\sqrt{\bar{h}_1} = \bar{q} R_1$, obtém-se finalmente:

$$\tau_1 \dot{h}_1 + \mu h_1 = R_1 q \qquad \rightarrow \qquad \tau_1 \dot{h}_1 + \mu h_1 = R_1 \eta\, x$$

- A equação do tanque 2 foi calculada como sendo

$$C_2 \frac{\mathrm{d}H_2}{\mathrm{d}t} + \frac{H_2}{R_2} = \frac{\sqrt{H_1}}{R_1}, \qquad H_2 = \bar{h}_2 + h_2$$

- Usando a linearização acima e notando que $\bar{h}_2 = \bar{q} R_2$, obtém-se

$$\tau_2 \dot{h}_2 + h_2 = \mu (R_2/R_1) h_1, \qquad \tau_2 = R_2 C_2$$

- O conjunto de equações linearizadas que governa esse sistema é dado por

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= \lambda_1 x + \lambda_2 i_1 \\
\tau_1 \dot{h}_1 + \mu h_1 &= \eta R_1 x \\
\tau_2 \dot{h}_2 + h_2 &= \mu (R_2/R_1) h_1
\end{aligned}
\qquad \text{(eq 6)}
$$

com

$$
\tau_1 = R_1 C_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2, \quad \mu = \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1}}, \quad \eta = \frac{\phi\, Q_{\max}}{X_{\max}} e^{-(\phi \bar{x}/X_{\max})}
$$

e

$$
\lambda_1 = -\frac{2\delta\, \gamma \bar{\imath}_1^2}{(\epsilon + \gamma \bar{x})^3}, \qquad \lambda_2 = \frac{2\delta\, \bar{\imath}_1}{(\epsilon + \gamma \bar{x})^2}
$$

- As funções de transferências, relacionadas com (eq 6), são dadas por

$$
\frac{X(s)}{I_1(s)} = \frac{\lambda_2}{ms^2 + bs + k - \lambda_1}, \qquad \frac{H_1(s)}{X(s)} = \frac{\eta R_1}{\tau_1 s + \mu}, \qquad \frac{H_2(s)}{H_1(s)} = \frac{\mu (R_2/R_1)}{\tau_2 s + 1}
$$

- Exercício: Determine a função de transferência $H_2(s)/I_1(s)$.

- A função de transferência que relaciona a entrada i_1 com a saída h_2 é dada por

$$\frac{H_2(s)}{I_1(s)} = \frac{\eta\lambda_2\mu R_2}{a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}$$

$$a_0 = m\tau_1\tau_2, \quad a_4 = (k-\lambda_1)\mu, \qquad a_2 = m\mu + b(\tau_1 + \mu\tau_2) + (k-\lambda_1)\tau_1\tau_2$$
$$a_1 = m(\tau_1 + \mu\tau_2) + b\tau_1\tau_2, \qquad a_3 = b\mu + (k-\lambda_1)(\tau_1 + \mu\tau_2)$$

- A função de transferência entre i_1 e h_1 é obtida de $H_2(s)$ como segue:

$$H_1(s) = F(s)H_2(s) \quad \text{com} \quad F(s) = \frac{R_1}{R_2}\frac{(\tau_2 s + 1)}{\mu}$$

- As condições iniciais para a simulação numérica desse sistema, são:

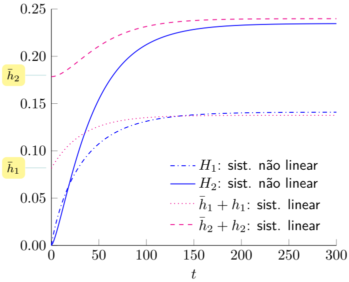
$$h_{10} = h_{20} = 0, \qquad x_0 = 0, \qquad \dot{x}_0 = 0$$

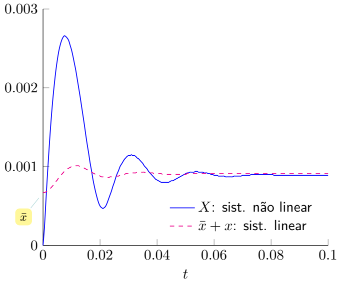
- O sistema é linearizado em torno do regime permanente $\bar{i}_1 = 1$ [A].

- Todos os outros equilíbrios em regime, $\bar{x}$, $\bar{h}_1$, etc, são obtidos diretamente de $\bar{i}_1$.

- Para o sistema não linear, a entrada é $I_1(t) = 1.5$ [A]. Para o linear, a entrada é $i_1(t) = 0.5$ [A], já que o sistema foi linearizado em torno do regime $\bar{\imath}_1 = 1$ [A].

- Para simular o sistema linear (eq 6), pode-se usar $H_1(s)$ e $H_2(s)$, fornecidos anteriormente, ou pode-se usar o *ode suite*, com a equação na forma de estado.





- Usando (exercício) o teorema do valor final, tem-se

$$x(\infty) = \frac{\lambda_2 \bar{\imath}_1}{k - \lambda_1}, \qquad h_1(\infty) = \frac{\eta R_1 \lambda_2 \bar{\imath}_1}{\mu(k - \lambda_1)}, \qquad h_2(\infty) = \frac{\eta \lambda_2 R_2 \bar{\imath}_1}{k - \lambda_1}$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Sensores e atuadores

- O sensor mede a altura do líquido no segundo tanque, fornecendo uma corrente proporcional à pressão, que por sua vez é proporcional à altura.

- A pressão é dada por
$$P_2 = \rho g H_2$$
com $\rho = 10^3$ [Kg/m^3] a densidade e $g = 9.81$ [m/s^2] a gravidade.

- O sinal de saída fornecido pelo sensor deve ser *"condicionado"* para 4-20 [mA]:
$$I_2 = \alpha P_2 + \beta$$
em que $\alpha = (20 - \beta)/P_{\max}$ [mA/Pa], com $P_{\max} = 20$ [kPa] a maior pressão esperada e $\beta = 4$ [mA] a menor corrente desejável quando $P_2 = 0$.

- Substituindo a pressão P_2 na equação da corrente I_2, tem-se
$$I_2 = \alpha \rho g H_2 + \beta$$

- Note que os sinais consistem de um regime permanente e uma parcela variante
$$I_2 = \bar{\imath}_2 + i_2, \qquad P_2 = \bar{p}_2 + p_2 \qquad \text{e} \qquad H_2 = \bar{h}_2 + h_2$$

- Da expressão $P_2 = \rho g H_2$, a pressão $\bar{p}_2$ em regime permanente fica sendo

$$\bar{p}_2 = \rho g \bar{h}_2$$

- Da equação que relaciona a corrente I_2 com a altura H_2, dada por

$$I_2 = \alpha \rho g H_2 + \beta$$

obtém-se

$$\bar{\imath}_2 + i_2 = \alpha \rho g (\bar{h}_2 + h_2) + \beta$$

- Assim, em regime permanente, tem-se

$$\bar{\imath}_2 = \alpha \rho g \bar{h}_2 + \beta$$

- Substituindo essa expressão na equação anterior, obtém-se

$$i_2 = \alpha \rho g h_2$$

que relaciona a variação da corrente i_2 pela variação da altura h_2.

- Para uma simulação numérica do sistema, pode-se escolher a saída como sendo tanto a altura h_2 como a corrente i_2.