EM707 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

Nota ao leitor

- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4^a edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
- Material suplementar:
  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8^a edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

- A série de Taylor da função $f(x)$ no ponto $\bar{x}$ é dada por

$$f(x) = f(\bar{x}) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x}) + \frac{1}{2!}\left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x})^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left.\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x})^n + \cdots$$

- Assim, a aproximação de primeira ordem (linearização) é dada por

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x})$$

- Funções de várias variáveis. Expansão de $f(x_1, x_2)$ em torno de $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$:

$$f(x_1, x_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \sum_{i=1}^{2} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=\bar{x}}(x_i - \bar{x}_i) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x=\bar{x}}(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) + \cdots$$

- Assim, a aproximação de primeira ordem em $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ é dada por

$$f(x_1, x_2) \approx f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{2} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=\bar{x}}(x_i - \bar{x}_i)$$

- A seguir, são apresentados alguns exemplos:

a) Linearizar $f(\theta) = \cos(\theta)$ em $\bar{\theta}$:

$$f(\theta) \approx \cos(\bar{\theta}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\cos(\theta)\bigg|_{\theta=\bar{\theta}}(\theta - \bar{\theta}) = \cos(\bar{\theta}) - (\theta - \bar{\theta})\sin(\bar{\theta})$$

b) Seja $f(\theta) = \sin(\theta)$. Então:

$$f(\theta) \approx \sin(\bar{\theta}) + (\theta - \bar{\theta})\cos(\bar{\theta})$$

c) Seja $f(\theta, \dot{\theta}) = \dot{\theta}^2 \sin(\theta)$. Então:

$$f(\theta, \dot{\theta}) \approx \dot{\bar{\theta}}^2 \sin(\bar{\theta}) + \frac{\partial}{\partial\theta}\dot{\theta}^2\sin(\theta)\bigg|_{\substack{\theta=\bar{\theta}\\ \dot{\theta}=\dot{\bar{\theta}}}}(\theta - \bar{\theta}) + \frac{\partial}{\partial\dot{\theta}}\dot{\theta}^2\sin(\theta)\bigg|_{\substack{\theta=\bar{\theta}\\ \dot{\theta}=\dot{\bar{\theta}}}}(\dot{\theta} - \dot{\bar{\theta}})$$

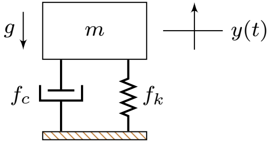
Assim,

$$f(\theta, \dot{\theta}) = \dot{\bar{\theta}}^2 \sin(\bar{\theta}) + \cos(\bar{\theta})\dot{\bar{\theta}}^2(\theta - \bar{\theta}) + 2\dot{\bar{\theta}}\sin(\bar{\theta})(\dot{\theta} - \dot{\bar{\theta}})$$

d) Linearizar $f(\theta, \ddot{\theta}) = \ddot{\theta}\cos(\theta)$:

$$f(\theta, \ddot{\theta}) \approx \ddot{\bar{\theta}}\cos(\bar{\theta}) + \cos(\bar{\theta})(\ddot{\theta} - \ddot{\bar{\theta}}) - \ddot{\bar{\theta}}\sin(\bar{\theta})(\theta - \bar{\theta})$$

- Exemplo: Considere o sistema massa-mola-amortecedor abaixo, sujeito à ação da gravidade g, com $f_c = c\dot{y}$ e $f_k = ky^3$ a força não linear da mola.



- Considerando que $y = 0$ é a posição de equilíbrio antes da deflexão da mola, a equação de movimento é dada por

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky^3 + mg = 0$$

- Devido à ação da gravidade, a mola se deflete e a nova posição de equilíbrio estático, denotada pela constante $\bar{y}$, fica sendo

$$k\bar{y}^3 = -mg$$

- Para obter a equação de movimento linear, deve-se linearizar y^3 em torno de $\bar{y}$, como segue

$$y^3 \approx \bar{y}^3 + 3\bar{y}^2(y - \bar{y}) = \bar{y}^3 + 3\bar{y}^2 y - 3\bar{y}^3$$

- Substituindo essa aproximação na equação diferencial, tem-se

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k\bar{y}^3 + 3k\bar{y}^2 y - 3k\bar{y}^3 + mg = 0$$

- Usando o fato de $k\bar{y}^3 = -mg$, chega-se finalmente ao sistema linearizado:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + 3k\bar{y}^2 y - 3k\bar{y}^3 = 0$$

- Note que essa equação diferencial possui um termo forçante $-3k\bar{y}^3$. Assim, aplicando a mudança de variável:

$$x = y - \bar{y}, \qquad \dot{x} = \dot{y}, \qquad \ddot{x} = \ddot{y}$$

  tem-se

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + 3k\bar{y}^2 x = 0$$

- Observação: Resultado idêntico é obtido se a mudança de variável $x = y - \bar{y}$ for aplicada de início, ou seja, se a equação de movimento for dada por

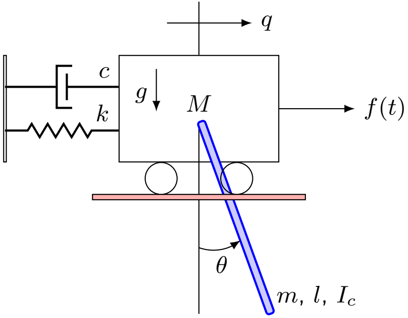
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x + \bar{y})^3 + mg = 0$$

- Como linearizar y em torno de $\bar{y}$ é equivalente a linearizar x em torno de $\bar{x} = 0$:

$$(x + \bar{y})^3 \approx (\bar{x} + \bar{y})^3 + 3(\bar{x} + \bar{y})^2 (x - \bar{x}) = \bar{y}^3 + 3\bar{y}^2 x$$

- Obtém-se diretamente a equação de movimento anterior $m\ddot{x} + c\dot{x} + 3k\bar{y}^2 x = 0$

- Exercício: Linearize o sistema carro-pêndulo abaixo, em que $c = k = 0$.



- A equação de movimento não linear é dada por

$$(M+m)\ddot{q} + 1/2ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = f(t)$$

$$\left(I_c + 1/4ml^2\right)\ddot{\theta} + 1/2ml(\ddot{q}\cos\theta + g\sin\theta) = 0$$

- A equação linearizada na origem com $I_c = ml^2/12$ é dada por

$$\hat{M}\ddot{q} - 3/4mg\theta = f(t), \qquad \hat{M} = M + 1/4m$$

$$2/3\hat{M}l\ddot{\theta} + \bar{M}g\theta = -f(t), \qquad \bar{M} = M + m$$

Conceitos de modelagem de sistemas

Representação no espaço de estado

- Pode ser necessário "desacoplar" o sistema para representá-lo no espaço de estado.
- Considere o sistema de equações dado por

$$\begin{aligned}\ddot{q}(t) + \ddot{w}(t) - \dot{w}(t) &= u(t)\\ \ddot{q}(t) - \ddot{w}(t) + q(t) &= u(t)\end{aligned}$$

- Como a derivada de maior ordem aparece em ambas as variáveis numa mesma equação, não é possível diretamente representar o sistema no espaço de estado.
- Porém, isolando o termo $\ddot{q}(t)$ da primeira equação e substituindo-o na segunda e fazendo o processo inverso com $\ddot{w}(t)$, obtém-se

$$\begin{aligned}2\ddot{q}(t) + q(t) - \dot{w}(t) &= 2u(t)\\ 2\ddot{w}(t) - \dot{w}(t) - q(t) &= 0\end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned}\ddot{q}(t) &= \frac{1}{2}(\dot{w}(t) - q(t)) + u(t)\\ \ddot{w}(t) &= \frac{1}{2}(\dot{w}(t) + q(t))\end{aligned}$$

- Perceba que este desacoplamento pode ser realizado de forma matricial como segue:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}(t)\\ \ddot{w}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u(t) + \dot{w}(t)\\ u(t) - q(t)\end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix}\ddot{q}(t)\\ \ddot{w}(t)\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(t) + \dot{w}(t)\\ u(t) - q(t)\end{bmatrix}$$