EM707 – Controle de Sistemas Mecânicos

Camino, J. F.

DSI / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, Campinas, SP, 13083-860, Brasil
camino@fem.unicamp.br

Campinas, 10 de dezembro de 2021

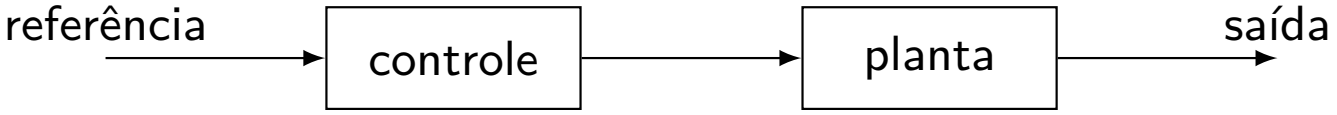
Nota ao leitor

- Estas notas são baseadas principalmente nas referências:
  - K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, 4ª edição, Pearson Education do Brasil, 2003.
  - G. F. Franklin and J. D. Powell and A. E.-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th Ed., P.-Hall, 2010.
- Material suplementar:
  - R. C. Dorf and R. H. Dorf, *Sistemas de controle Modernos*, 8ª edição, LTC Livros Técnicos e científicos, 2001.
  - J. R. Rowland, *Linear Control Systems: Modeling, analysing, and design*, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
  - B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 7th edition, Prentice Hall, 1994.

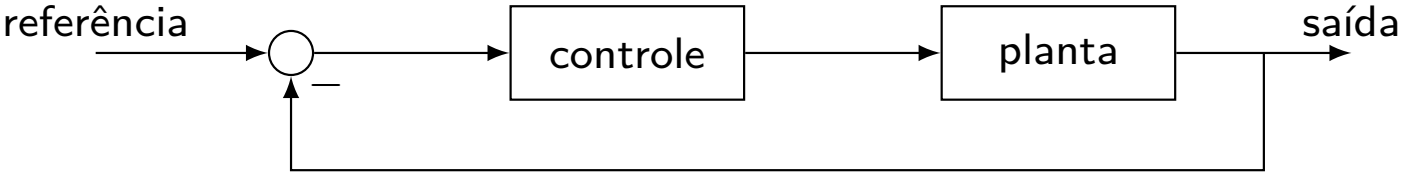
Introdução

Conceitos básicos

- Controle: é o processo que leva variáveis de um sistema a se ajustarem a valores desejados, chamados de valores de referência.
- Controle automático: não há interferência humana. Por exemplo, no controle de temperatura cuja ação de controle (liga/desliga) é regulada por um termostato.
- Planta: representa o modelo do sistema físico em estudo.
- Sistema em malha aberta: controle de tráfego, máquina de lavar roupa, etc.

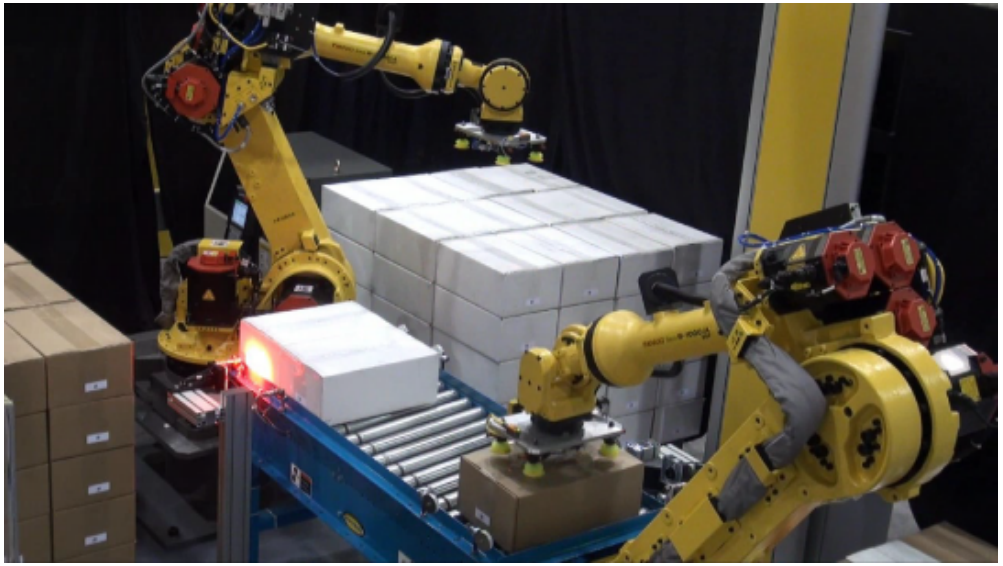


- Realimentação: é o processo de medir a variável de controle (por exemplo, a temperatura da sala) e usar essa informação para influenciar na ação de controle.
- Sistema em malha fechada: controle de velocidade de um motor, controle de navegação de um avião, etc.



Introdução

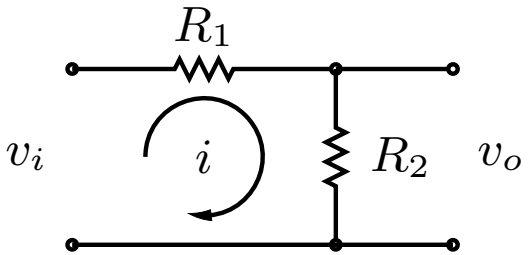
Aplicações industriais



Introdução

Sistema de controle em malha aberta

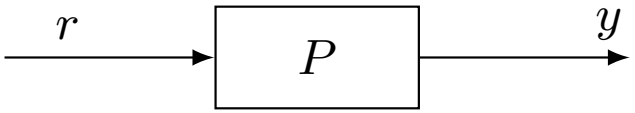
- Considere o seguinte exemplo de um sistema em malha aberta, em que v_i é uma tensão de entrada, v_o é a tensão de saída e R_i são resistências.



- Definindo $r = v_i$, $y = v_o$ e P por

$$P = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

o diagrama de bloco para esse circuito é

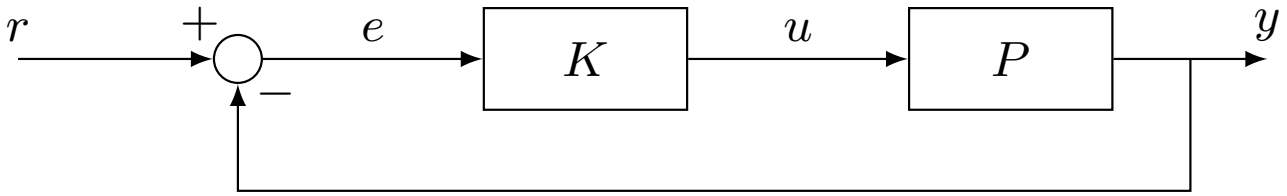


- Assim, $y = Pr = R_2/(R_1 + R_2)r$. Se $R_2 = R_1 = 10\Omega$, então $y = r/2$.
- Note que se P variar, a saída y também variará. Por exemplo, se $P \to P + \delta P$, então $y = Pr + \delta Pr$.

Introdução

Sistema de controle em malha fechada

- Considere o exemplo anterior numa configuração em malha fechada, em que o controlador K é um ganho estático (uma constante).



- Calculando o sistema em malha fechada, obtém-se

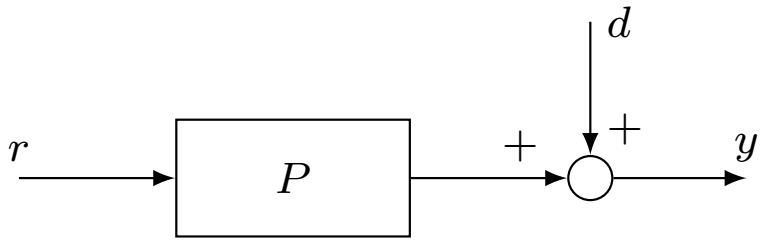
$$\left.\begin{aligned} y &= PKe \\ e &= r - y \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad y = PK(r-y)$$

- Colocando y em evidência, tem-se

$$y = \frac{PK}{1+PK} r$$

- Assim, se $PK \gg 1$, tem-se que $y \approx r$.
- Por exemplo, se $P = 1/2$ e $K = 100$, tem-se $PK = 50$ e $y = 50/51r \Rightarrow y \approx r$.
- A saída do nosso circuito é simplesmente a referência desejada. Note que a saída é insensível à variação em P.

- Considere o diagrama abaixo em que P é a planta, r é o sinal de referência, y é a saída e d é um distúrbio exógeno.
- O distúrbio d pode por exemplo ser um ruído contaminando o sinal medido por um transdutor.



- A saída desse sistema é dada por

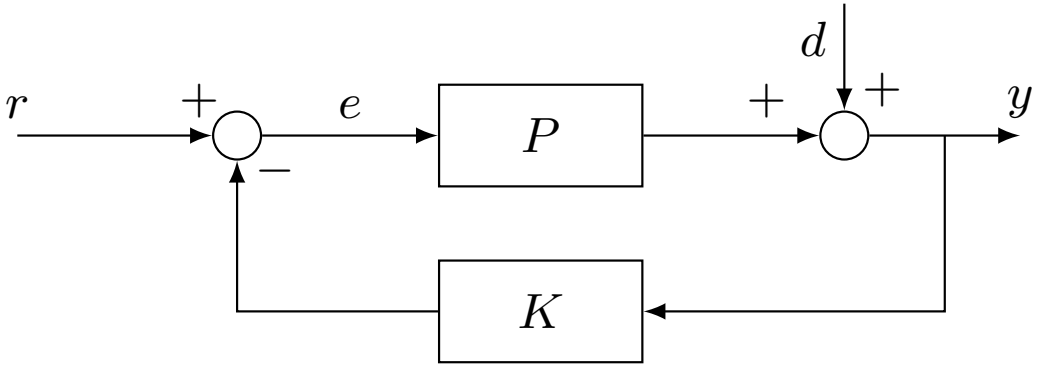
$$y = Pr + d$$

- Fica claro que nessa configuração, a saída é fortemente influenciada pelo distúrbio d.

Introdução

Supressão de distúrbio

- Considere o sistema em malha fechada em que K é um ganho (controlador).



- Para obter o sistema em malha fechada, procede-se como segue

$$\left.\begin{aligned} y &= Pe + d \\ e &= r - Ky \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad y = P(r - Ky) + d$$

- Colocando y em evidência, tem-se

$$(1 + PK)y = Pr + d \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{P}{1 + PK} r + \frac{1}{1 + PK} d$$

- Agora, se $PK \gg 1$, então

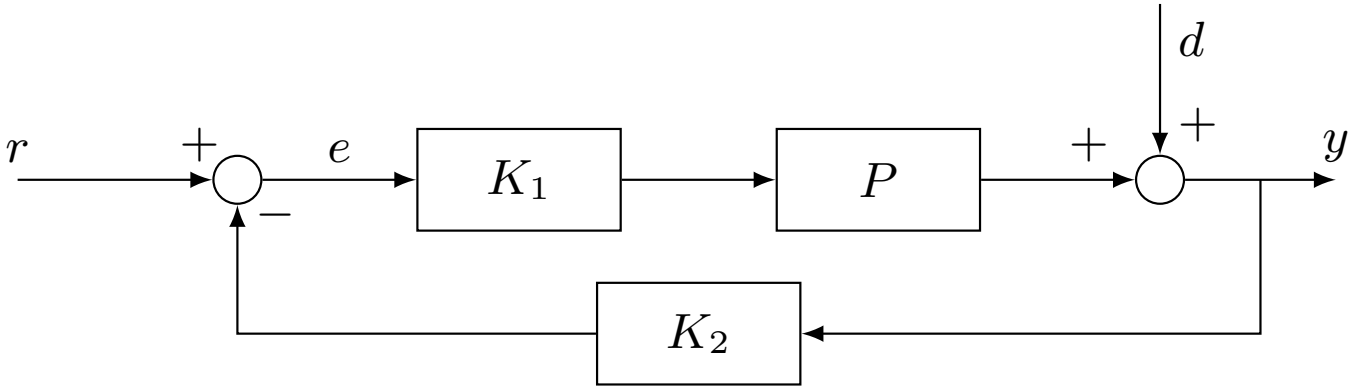
$$y \approx \frac{1}{K} r + \frac{1}{PK} d$$

- Nessa configuração, o efeito do distúrbio é mitigado na saída do sistema, porém, se $K \gg 1$, a saída também será praticamente nula.

Introdução

Supressão de distúrbio

- Considere a configuração abaixo que utiliza dois ganhos (controladores) K_1 e K_2.



- Para obter o sistema em malha fechada, procede-se como segue

$$\left.\begin{aligned} y &= PK_1e + d \\ e &= r - K_2y \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad y = PK_1(r - K_2y) + d$$

- Colocando y em evidência, tem-se

$$(1 + PK_1K_2)y = PK_1r + d \quad \Rightarrow \quad y = \frac{PK_1}{1 + PK_1K_2}r + \frac{1}{1 + PK_1K_2}d$$

- Agora, é possível escolher K_1 e K_2 de forma a mitigar o efeito do distúrbio d e fazer com que a saída y se aproxime da referência r.

Introdução

Supressão de distúrbio

- Suponha que $P = 10$ e a relação entrada/saída desejada seja $y = 10r$ (com $d = 0$).
- Assim, o sistema inicial em malha aberta fica sendo $y = 10r + d$.
- O sistema em malha fechada com $P = 10$ fica sendo

$$y = \frac{10K_1}{1 + 10K_1K_2} r + \frac{1}{1 + 10K_1K_2} d$$

- Note que é impossível eliminar totalmente o ruído com valores finitos de K_1 e K_2.
- Suponha que se deseje uma influência máxima de 10% do distúrbio d na saída y:

$$\left| \frac{1}{1 + 10K_1K_2} d \right| \leq 0.1|d|$$

- Essa equação é satisfeito sempre que

$$\frac{1}{1 + 10K_1K_2} \leq 0.1$$

Introdução

Supressão de distúrbio

- Usando a relação desejada para a saída, tem-se

$$y = 10r \quad \Rightarrow \quad \frac{10K_1}{1 + 10K_1K_2} = 10$$

- É necessário resolver as duas equações simultaneamente:

$$\frac{1}{1 + 10K_1K_2} = 0.1$$
$$\frac{10K_1}{1 + 10K_1K_2} = 10$$

- Substituindo a primeira equação na segunda, obtém-se

$$\frac{10K_1}{10} = 10 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 10$$

- Substituindo K_1 na segunda expressão, fornece

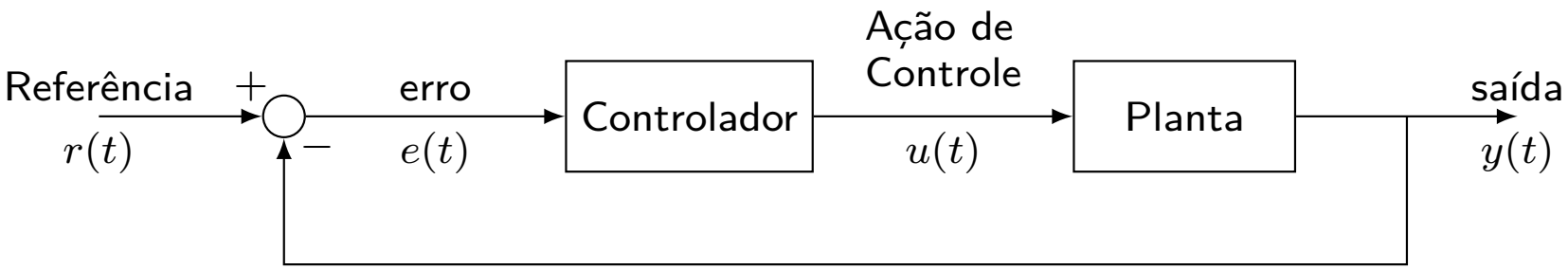
$$\frac{10}{1 + 100K_2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad K_2 = \frac{9}{100}$$

- Portanto, a saída do sistema fica sendo $y = 10r + 0.1d$.

Introdução

Ações de controle básicas

- Controle do tipo proporcional, integral e derivativo.
- Considere a malha de controle apresentada abaixo.



- Ação de controle proporcional:

$$u(t) = K_P\, e(t)$$

- Ação de controle integral:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = K_I\, e(t) \quad \Rightarrow \quad u(t) = K_I \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau$$

- Ação de controle proporcional-integral-derivativo:

$$u(t) = K_P\, e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau + K_D \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

Propriedades de sistemas contínuos

Conceitos básicos

- Considere o sistema abaixo, em que $x(t)$ é a entrada e $y(t)$ a saída.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{sistema}} \longrightarrow y(t)$$

- Linearidade: Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ as saídas para as entrada $x_1(t)$ e $x_2(t)$, respectivamente. Então, o sistema é linear se a saída para a entrada

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \qquad \text{for} \qquad y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

  Exemplo: O sistema $\dot{y}(t) = x(t)$ com $y(0) = 0$ é linear, já que

$$y = \int_0^t \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha \int_0^t x_1 + \beta \int_0^t x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$$

  Exemplo: O sistema $\dot{y}(t) + y^2(t) = x(t)$ com $y(0) = 0$ não é linear, já que para uma entrada constante qualquer $x(t) = c$, a saída é dada por

$$y(t) = \sqrt{c}\,\tanh(\sqrt{c}\,t)$$

  que claramente é uma relação não linear. Para $x = c_1 + c_2$, tem-se $y \neq y_1 + y_2$.

- Também conhecido como princípio da superposição:

$$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2) \qquad \text{Aditividade}$$

$$F(\alpha x) = \alpha F(x) \qquad \text{Homogeneidade}$$

Propriedades de sistemas contínuos

Conceitos básicos

- Causalidade: Um sistema é dito causal (não antecipativo), se a saída num instante de tempo τ depender apenas de valores da entrada em $t \leq \tau$.

  Exemplo: O sistema $y(t) = \cos(t+1)\, x(t)x(t-3)$ é causal, já que a saída no instante $t = \tau$ depende da entrada no instante τ e no instante passado $\tau - 3$.

  Exemplo: O sistema $y(t) = \cos(t)\, x(t+1)$ não é causal, já que a saída no instante $t = \tau$ depende da entrada no instante futuro $\tau + 1$.

- Invariância no tempo: Se $y(t)$ é a saída de um sistema invariante no tempo quando $x(t)$ é a entrada, então $y(t-\tau)$ será a saída quando $x(t-\tau)$ for a entrada.

  Exemplo: Seja $y(t) = tx(t)$. Seja $y_i(t)$ a saída para a entrada $x_i(t)$. Então:

  $$y_1(t) = tx_1(t)$$

  Seja $x_2(t) = x_1(t-\tau)$, então

  $$y_2(t) = tx_2(t) = tx_1(t-\tau)$$

  No entanto,

  $$y_1(t-\tau) = (t-\tau)x_1(t-\tau) \neq y_2(t)$$

  Portanto, esse sistema não é invariante no tempo (é um sistema variante no tempo).

Transformada de Laplace

Propriedades e aplicações

- A transformada de Laplace converte equações diferenciais no domínio do tempo em equações algébricas de uma variável complexa s.
- Operações de diferenciação e integração são transformadas em operações algébricas, facilitando a resolução das equações diferenciais.
- A transformada de Laplace também permite analisar o comportamento dinâmico de um sistema linear sem a necessidade de se resolver a equação diferencial.
- A transformada (unilateral) de Laplace é dada por

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

  em que $s = \sigma + \mathrm{j}\omega$ é uma variável complexa.
- Essa integral convergirá sempre que

$$|f(t)|e^{-\sigma t} \to 0 \quad \text{com} \quad t \to \infty.$$

- Se esse limite for a zero para $\sigma > \sigma_c$ e divergir para $\sigma < \sigma_c$, então σ_c é chamado de abcissa de convergência.

Transformada de Laplace

Propriedades e aplicações

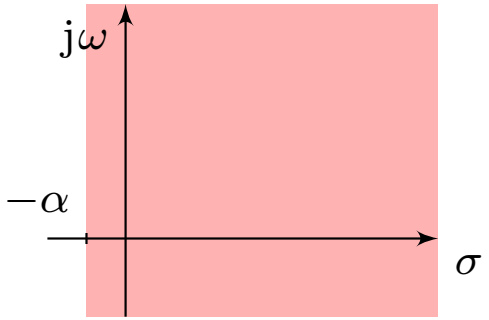
- Função exponencial. Seja $\alpha > 0$. Considere a função $f(t)$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{, se } t \geq 0 \\ 0 & \text{, se } t < 0 \end{cases}$$

- Então, a sua transformada de Laplace é dada por

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty Ae^{-\alpha t} e^{-st}\,\mathrm{d}t = A\int_0^\infty e^{-(\alpha+s)t}\,\mathrm{d}t$$

- Essa integral converge se $\alpha + \sigma > 0$, ou seja, $\sigma > -\alpha$.
- Assim, a abcissa de convergência é $\sigma_c = -\alpha$.
- Região de convergência é o semiplano direito delimitado pela reta $s = -\alpha + \mathrm{j}\omega, \forall\omega$.



- Prosseguindo com a integração, tem-se

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = A\int_0^\infty e^{-(\alpha+s)t}\,\mathrm{d}t = \frac{-A}{\alpha+s}e^{-(\alpha+s)t}\Big|_0^\infty$$
$$= \frac{-A}{\alpha+s}\lim_{t\to\infty} e^{-(\alpha+s)t} + \frac{Ae^0}{\alpha+s} = \frac{A}{\alpha+s}$$

- Essa função tem polo em $s = -\alpha$.
- Vale salientar que a função $F(s)$ é válida para todo o plano s, exceto em $s = -\alpha$.
- Função degrau unitário. Essa função é dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{, se } t \geq 0 \\ 0 & \text{, se } t < 0 \end{cases}$$

- Sua transformada de Laplace é dada por

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

- O degrau unitário é usualmente denotado por $\mu(t)$.

Transformada de Laplace

Propriedades e aplicações

- Função rampa. Essa função é dada por

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{, se } t \geq 0 \\ 0 & \text{, se } t < 0 \end{cases}$$

- Sua transformada de Laplace é dada por

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2}$$

- Prova. Integrando por partes, tem-se

$$\int_0^\infty te^{-st}\,\mathrm{d}t = t\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s^2}$$

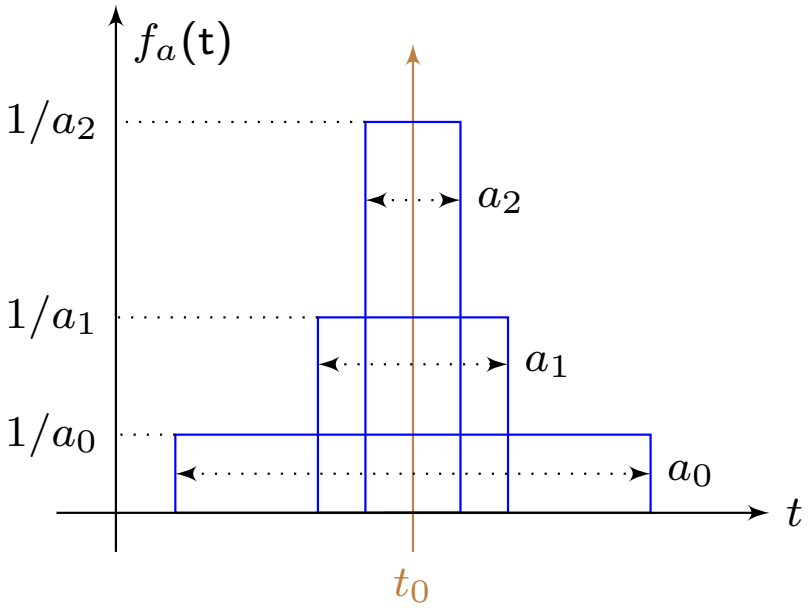
já que

$$t\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty = 0 \qquad \text{e} \qquad -\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s^2}e^{-st}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{s^2}$$

- Generalizando, é possível mostrar que

$$\mathcal{L}[t^n\mu(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

- Função impulso unitário. Considere a função $f_a(t)$ dada na figura abaixo.



Funções pulso de área unitária $A = 1$ centrada em t_0

$$f_a(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{, se } t_0 - \frac{a}{2} \leq t \leq t_0 + \frac{a}{2} \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

- A função delta de Dirac pode ser definida por

$$\delta(t - t_0) = \lim_{a \to 0} f_a(t)$$

- Algumas propriedades do delta de Dirac são:
  1. $\delta(t - t_0) = 0$, para $t \neq t_0$;
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, \mathrm{d}t = 1$;
  3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\, \mathrm{d}t = f(t_0)$.

Transformada de Laplace

Propriedades e aplicações

- Aplicando a transformada de Laplace na função delta de Dirac, tem-se:

$$F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} \, \mathrm{d}t = 1$$

- Note que um sinal contínuo qualquer pode sempre ser escrito como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau$$

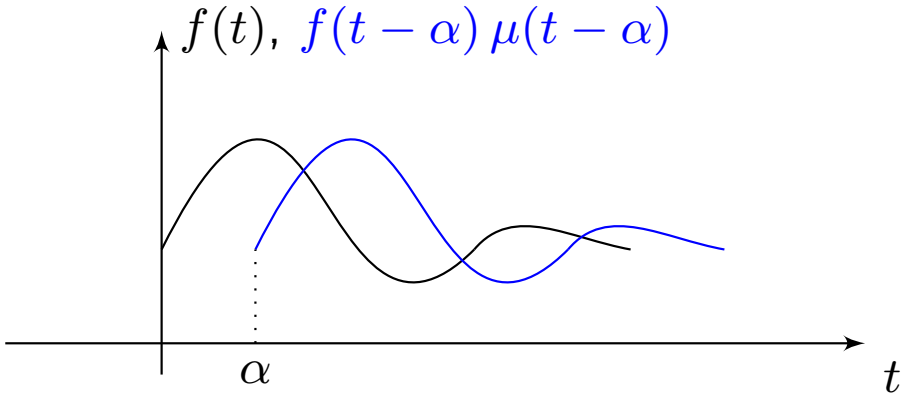
- Função senoidal. Seja $\omega > 0$. Considere a função $f(t)$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & \text{, se } t \geq 0 \\ 0 & \text{, se } t < 0 \end{cases}$$

- Então, a sua transformada de Laplace é dada por

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^{\infty} \frac{e^{\mathrm{j}\omega t} - e^{-\mathrm{j}\omega t}}{2\mathrm{j}} e^{-st} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\mathrm{j}} \left(\int_0^{\infty} e^{-(s-\mathrm{j}\omega)t} \, \mathrm{d}t - \int_0^{\infty} e^{-(s+\mathrm{j}\omega)t} \, \mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{1}{2\mathrm{j}} \left(\left. \frac{-e^{-(s-\mathrm{j}\omega)t}}{s-\mathrm{j}\omega} \right|_0^{\infty} + \left. \frac{e^{-(s+\mathrm{j}\omega)t}}{s+\mathrm{j}\omega} \right|_0^{\infty} \right) = \frac{1}{2\mathrm{j}} \left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega} - \frac{1}{s+\mathrm{j}\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \end{aligned}$$

- Função transladada no tempo.



- A transformada de Laplace dessa função transladada é dada por

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)\,\mu(t-\alpha)] = \int_0^\infty f(t-\alpha)\,\mu(t-\alpha)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

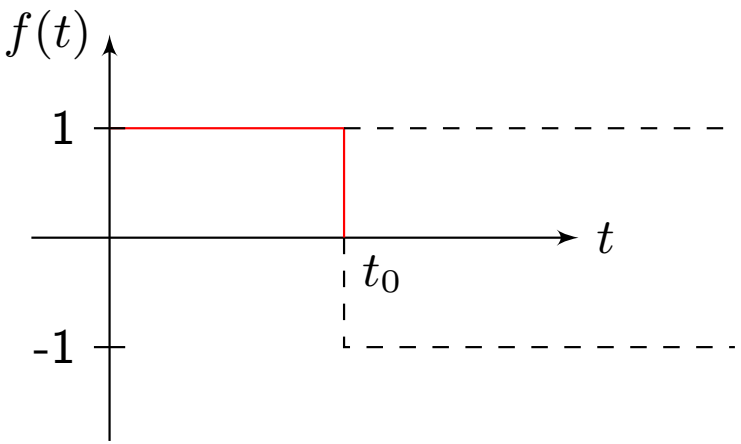
- Aplicando a substituição de variável $\tau = t - \alpha$, tem-se

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)\,\mu(t-\alpha)] = \int_{-\alpha}^\infty f(\tau)\mu(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}e^{-s\alpha}\,\mathrm{d}\tau$$

$$= e^{-s\alpha}\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau = e^{-s\alpha}\mathcal{L}[f(t)] = e^{-s\alpha}F(s)$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace da função $f(t)$.

- Exemplo: Considere a função pulso retangular apresentada na figura abaixo.



- Essa função pode ser escrita como a diferença de dois degraus:

$$f(t) = \mu(t) - \mu(t - t_0)$$

- Aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} - \mathcal{L}[\mu(t - t_0)] = \frac{1}{s} - e^{-st_0}\frac{1}{s} = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-st_0}\right)$$

- Linearidade. Se $X_1(s) = \mathcal{L}[x_1(t)]$ e $X_2(s) = \mathcal{L}[x_2(t)]$, então

$$\mathcal{L}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha X_1(s) + \beta X_2(s)$$

Transformada de Laplace

Propriedades e aplicações

- Teorema da derivação real: $\mathcal{L}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)] = sF(s) - f(0)$
- Prova. Integrando por partes, tem-se:

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

- Portanto,

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s}\mathcal{L}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)]$$

- Pode-se ainda mostrar que

$$\mathcal{L}[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t)] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

- Prova. Seja $g(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$. Aplicando o resultado acima, tem-se:

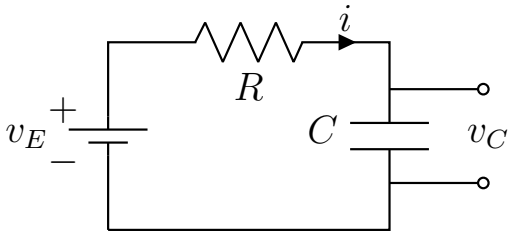
$$\mathcal{L}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) = s[sF(s) - f(0)] - \dot{f}(0)$$

- De forma similar, pode-se mostrar que

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

em que $f^{(n)}$ é a derivada enésima da função $f(t)$.

- Exemplo: Considere o circuito elétrico da figura abaixo.



- A equação diferencial que governa o comportamento dinâmico é dada por

$$\tau \dot{v}_C(t) + v_C(t) = v_E(t) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{v}_C(t) + a_1 v_C(t) = a_1 v_E(t)$$

em que $\tau = RC$, $a_1 = 1/\tau$ e $v_E(t)$ é a tensão de entrada.

- Considere que $v_C(0) = v_{C0}$ e que $v_E(t)$ é o degrau de amplitude E.

- Aplicando a transformada de Laplace, obtém-se

$$sV_C(s) - v_{C0} + a_1 V_C(s) = a_1 \frac{E}{s}$$

- Equivalentemente, tem-se

$$V_C(s) = \frac{v_{C0}}{s + a_1} + a_1 \frac{E}{s(s + a_1)}$$

Transformada de Laplace

Propriedades e aplicações

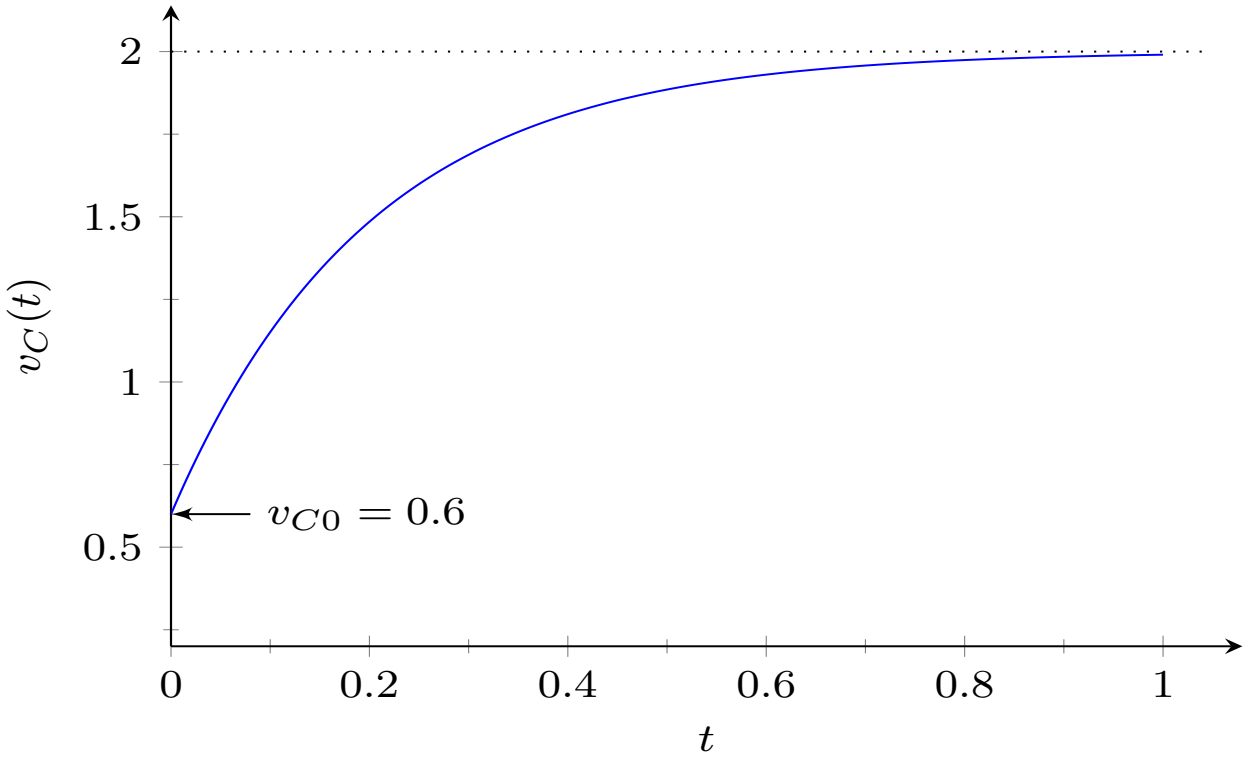
- Aplicando a transformada inversa na expressão

$$V_C(s) = \frac{v_{C0}}{s+a_1} + a_1 \frac{E}{s(s+a_1)} = \frac{v_{C0}}{s+a_1} + E\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a_1}\right)$$

obtém-se finalmente tensão no capacitor:

$$v_C(t) = v_{C0}e^{-t/\tau} + E\big(1 - e^{-t/\tau}\big), \quad t \geq 0$$

- O gráfico abaixo apresenta a resposta para $\tau = 0.2$, $v_{C0} = 0.6$ [V] e $v_E(t) = 2$ [V].



Transformada de Laplace

Propriedades e aplicações

- Função transladada na frequência. Multiplicação de $f(t)$ por $e^{-\alpha t}$:

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-(s+\alpha)t} \, \mathrm{d}t = F(s+\alpha)$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace da função $f(t)$.

- Exemplo: Lembrando que a transformada de Laplace da função senoidal é

$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\mu(t)\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

obtém-se

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\mu(t)\right] = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

- Integral de convolução. A convolução $f_1(t) * f_2(t)$ entre $f_1(t)$ e $f_2(t)$ é dada por

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) \, \mathrm{d}\tau = f_2(t) * f_1(t)$$

Aplicando Laplace, tem-se:

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) F_2(s)$$

Transformada de Laplace

Propriedades e aplicações

- Teorema da derivação complexa. O teorema é dado por:

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)$$

- Exemplo: Suponha que se deseja determinar a função $f(t)$ que gerou a seguinte transformada de Laplace:

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^3}$$

- Essa função $f(t)$ pode ser facilmente obtida do teorema da derivação complexa.
- Lembrando que $\mathcal{L}[e^{-t}\mu(t)] = \dfrac{1}{(s+1)}$, tem-se

$$\mathcal{L}[t\,e^{-t}\mu(t)] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{(s+1)} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

- Aplicando, novamente a propriedade, obtém-se

$$\mathcal{L}[t(t\,e^{-t})\mu(t)] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{(s+1)^2} = \frac{2}{(s+1)^3}$$

- Consequentemente: $\quad f(t) = t^2\,e^{-t}, \quad t \geq 0$

Transformada de Laplace

Propriedades e aplicações

- Teorema do valor final. Se $x(t) = 0$ para $t < 0$ e $\lim_{t\to\infty} x(t)$ é finito, então

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

- Exemplos: Calcule o limite de $f(t)$, com $t \to \infty$, para $F(s)$ dada por

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \qquad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \qquad f(t) = 1 - e^{-t},\ t \geq 0$$

- Pelo teorema do valor final, tem-se

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

- Teorema do valor inicial. Se $x(t) = 0$ para $t < 0$ e $x(t)$ não contiver impulsos em $t = 0$, então

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

- Exemplos: Suponha que $F(s)$ seja dada por

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Assim

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s+1} = 0$$

Inversa da transformada de Laplace

Método da decomposição em frações parciais

- O método é usado para decompor uma função racional

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

em frações mais simples:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s)$$

- Assim, a transformada inversa dos $F_j(s)$ pode ser facilmente determinada:

$$f(t) := \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] + \cdots + \mathcal{L}^{-1}[F_n(s)]$$

- Note ainda que a função $F(s)$ pode ser reescrita como

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

em que p_i e z_j são, respectivamente, os polos e os zeros de $F(s)$.

- Para efetuar essa decomposição, as seguintes hipóteses serão necessárias:
  1. Os polinômios $P(s)$ e $Q(s)$ só possuem coeficientes reais;
  2. Os polinômios $P(s)$ e $Q(s)$ não possuem fatores em comum;
  3. O grau do numerador m é estritamente menor do que o grau do denominador n.

Inversa da transformada de Laplace

Método da decomposição em frações parciais: polos distintos

- Considerando que os polos da função $F(s)$ são distintos, pode-se reescrevê-la como

$$F(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{c_k}{s-p_k} + \cdots + \frac{c_n}{s-p_n}$$

em que c_k é o resíduo do polo p_k em $s = p_k$, para $k = 1, \ldots, n$.

- Para determinar c_k, multiplica-se $F(s)$ em ambos os lados por $(s - p_k)$:

$$(s-p_k)F(s) = \frac{c_1(s-p_k)}{s-p_1} + \frac{c_2(s-p_k)}{s-p_2} + \cdots + c_k + \cdots + \frac{c_n(s-p_k)}{s-p_n}$$

- Calculando essa expressão em $s = p_k$, obtém-se

$$c_k = [(s-p_k)F(s)]_{s=p_k}$$

- Como $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_k}{s-p_k}\right] = c_k e^{p_k t}\mu(t)$, tem-se

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \cdots + c_k e^{p_k t} + \cdots + c_n e^{p_n t}, \quad t \geq 0$$

Inversa da transformada de Laplace

Método da decomposição em frações parciais: polos distintos

- Exemplo: Suponha que $F(s)$ seja dada por

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s+2}{(s+\mathrm{j})(s-\mathrm{j})} = \frac{c_1}{s+\mathrm{j}} + \frac{c_2}{s-\mathrm{j}} \\ &= \frac{c_1(s-\mathrm{j}) + c_2(s+\mathrm{j})}{(s+\mathrm{j})(s-\mathrm{j})} = \frac{(c_1+c_2)s + \mathrm{j}(c_2-c_1)}{(s+\mathrm{j})(s-\mathrm{j})} \end{aligned}$$

Fornecendo:

$$c_1 + c_2 = 1, \qquad c_2 - c_1 = 2/\mathrm{j} = -2\mathrm{j}$$

- Resolvendo essas duas equações, obtém-se

$$c_1 = 1/2 + \mathrm{j} \quad \text{e} \quad c_2 = 1/2 - \mathrm{j}$$

Portanto,

$$F(s) = \frac{1/2+\mathrm{j}}{s+\mathrm{j}} + \frac{1/2-\mathrm{j}}{s-\mathrm{j}}$$

- Aplicando a transformada inversa, obtém-se

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (1/2+\mathrm{j})e^{-\mathrm{j}t} + (1/2-\mathrm{j})e^{\mathrm{j}t} = \cos(t) + 2\sin(t), \quad t \geq 0$$

Inversa da transformada de Laplace

Método da decomposição em frações parciais: polos múltiplos

- O procedimento é bastante similar ao adotado no caso anterior.
- Considere a função

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$$

- Como $F(s)$ possui três polos múltiplos em $s = -1$, têm-se três termos como segue:

$$F(s) = \frac{c_1}{(s+1)} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{(s+1)^3}$$

- Multiplicando ambos os lados por $(s+1)^3$, tem-se

$$(s+1)^3 F(s) = c_1(s+1)^2 + c_2(s+1) + c_3$$

Portanto,

$$c_3 = \left[(s+1)^3 F(s)\right]_{s=-1}$$

- Para determinar os outros coeficientes, deriva-se a equação acima, que fornece

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s+1)^3 F(s)\right] = c_2 + 2c_1(s+1)$$

Portanto,

$$c_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s+1)^3 F(s)\right]_{s=-1}$$

Inversa da transformada de Laplace

Método da decomposição em frações parciais: polos múltiplos

- De forma similar, determina-se o termo c_1:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[(s+1)^3F(s)\right]_{s=-1} = 2c_1$$

- Para esse exemplo, dado por

$$F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} \qquad \Longrightarrow \qquad (s+1)^3F(s) = s^2+2s+3$$

tem-se

$$c_3 = [(s+1)^3F(s)]_{s=-1} = [s^2+2s+3]_{s=-1} = 2$$

$$c_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[s^2+2s+3]_{s=-1} = [2s+2]_{s=-1} = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}[s^2+2s+3]_{s=-1} = 1$$

Portanto,

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

- Aplicando a transformada inversa, tem-se

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}\right] = e^{-t} + t^2e^{-t} = (1+t^2)e^{-t}, \quad t \geq 0$$

Inversa da transformada de Laplace

Resolução de equações diferenciais

- Resolução de equações diferenciais ordinárias lineares usando Laplace.
- Exemplo: Determine a solução homogênea da seguinte equação de movimento:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = 0, \qquad \text{“Equação homogênea”}$$

com condições iniciais

$$y(t=0) = y_0, \qquad \dot{y}(t=0) = \dot{y}_0$$

- Denominando por $Y(s)$ a transformada de Laplace de $y(t)$, ou seja, $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ e lembrando que

$$\mathcal{L}[\ddot{y}(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$$

tem-se

$$m\left(s^2Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0\right) + kY(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(ms^2 + k\right)Y(s) = my_0s + m\dot{y}_0$$

Portanto,

$$Y(s) = y_0\frac{s}{s^2+\omega_n^2} + \dot{y}_0\frac{1}{s^2+\omega_n^2}, \qquad \omega_n^2 = k/m$$

- A transformada inversa fornece

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y_0\cos(\omega_n t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t), \quad t \geq 0$$

Inversa da transformada de Laplace

Resolução de equações diferenciais

- Exemplo: Determine a solução impulsiva da seguinte equação de movimento:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = \delta(t), \qquad \text{“Equação não homogênea”}$$

com condições iniciais nulas:

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

- Aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$\left(ms^2 + k\right) Y(s) = 1$$

ou seja,

$$Y(s) = \frac{1/m}{s^2 + \omega_n^2}, \qquad \omega_n^2 = k/m$$

- A transformada inversa fornece

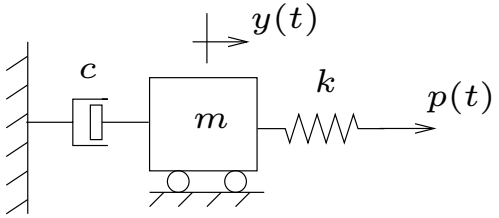
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{m\omega_n} \sin(\omega_n t), \quad t \geq 0$$

- A resposta impulsiva, denotada por $h(t)$, é de grande importância na análise linear de sistemas. Ela é calculada com condição inicial nula para um impulso em $t = 0$.
- Exercício: Mostre que a resposta ao impulso $h(t)$ pode ser convenientemente calculada usando a equação homogênea com uma condição inicial apropriada.

Inversa da transformada de Laplace

Resolução de equações diferenciais

- Exemplo: Determine a resposta impulsiva do sistema abaixo.



- Para esse sistema, a equação de movimento é dada por

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = kp(t)$$

sendo

  - m a massa do carro;
  - c o coeficiente de amortecimento;
  - k a rigidez da mola;
  - $p(t)$ uma entrada em deslocamento.

- Primeiramente, rescreve-se a equação acima na forma padrão:

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 p(t)$$

sendo

  - $\omega_n = \sqrt{k/m}$ a frequência natural do sistema;
  - $c_c = 2m\omega_n$ o amortecimento crítico;
  - $\zeta = c/c_c$ o fator de amortecimento;
  - $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ com $0 \leq \zeta < 1$ a frequência natural amortecida.

Inversa da transformada de Laplace

Resolução de equações diferenciais

- Aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas, obtém-se

$$s^2Y(s) + 2\zeta\omega_n sY(s) + \omega_n^2 Y(s) = \omega_n^2 P(s)$$

  Portanto,

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} P(s)$$

- Considerando que a entrada é um impulso $p(t) = \delta(t)$, ou seja, $P(s) = 1$, tem-se

$$H(s) := Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Completando o quadrado, tem-se

$$H(s) = \left(\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \frac{\omega_d}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

- Lembrando da propriedade do translado na frequência

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\right] = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

  a resposta impulsiva fica sendo

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t), \qquad t \geq 0$$

Integral de convolução

Resposta a uma excitação qualquer

- Considere o sistema da figura abaixo com $h(t)$ a resposta impulsiva.

$$\text{(entrada) } x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \text{ (saída)}$$

- Se esse sistema for linear e invariante no tempo, a relação entre a entrada $x(t)$ e a saída $y(t)$ é dada pela seguinte integral de convolução:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

- Para um sistema causal, $h(t-\tau) = 0$ para $\tau > t$. Assim, a integral se reduz a

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

- Se a entrada for zero para $\tau < 0$, ou seja, $x(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, obtém-se

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t} h(\tau)x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

- A solução completa, considerando-se as condições iniciais, é dada por

$$y(t) = g_0(t)y_0 + g_1(t)\dot{y}_0 + \cdots + g_{n-1}(t)y_0^{(n-1)} + \int_{0}^{t} h(\tau)x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Integral de convolução

Resposta a uma excitação qualquer

- Exemplo: Considere o sistema descrito pela seguinte equação de movimento:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = x(t)$$

- Considere que $x(t)$ é o degrau de amplitude X_0 dado por

$$x(t) = X_0\,\mu(t) = \begin{cases} X_0 & \text{, se } t \geq 0 \\ 0 & \text{, se } t < 0 \end{cases}$$

- A resposta impulsiva $h(t)$ desse sistema foi calculada como sendo

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n}\sin(\omega_n t)\,\mu(t), \qquad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

- Pela integral de convolução, tem-se que o deslocamento $y(t)$ da massa m é dado por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_0\,\mu(\tau)\,\frac{1}{m\omega_n}\sin(\omega_n(t-\tau))\mu(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{X_0}{m\omega_n}\int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{X_0}{m\omega_n}\left(-\frac{\cos(\omega_n\tau)}{\omega_n}\bigg|_0^t\right) = \frac{X_0}{m\omega_n^2}(1-\cos(\omega_n t)), \qquad t \geq 0$$

Função de transferência

- Aplicando a transformada de Laplace na integral de convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

  obtém-se a função transferência $H(s) = Y(s)/X(s)$.

- Perceba que, para uma entrada impulsiva $X(s) = 1$, a saída é $Y(s) = H(s)$.

- Portanto, $H(s)$ é transformada de Laplace da resposta ao impulso $h(t)$, ou seja,

$$H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

- Pode-se obter $H(s)$ diretamente da equação diferencial

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x$$

- Aplicando a transformada de Laplace, com condições iniciais nulas, tem-se

$$[s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n]Y(s) = [b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m]X(s)$$

- Portanto, a função transferência $H(s)$ fica sendo:

$$H(s) := \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

- O ganho estático é dado por $H(0) = b_m/a_n$. Assim, se a entrada for o degrau $x(t) = X_0\mu(t)$ e o sistema for estável, a saída atingirá o regime estacionário $y_\infty = H(0)X_0$.

Função de transferência

- Exemplo: Considere o sistema do exercício anterior:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = x(t)$$

em que $x(t)$ é o degrau de amplitude X_0.

- A resposta impulsiva $h(t)$ desse sistema é

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_n}\sin(\omega_n t)\,\mu(t), \qquad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

- As transformadas de Laplace de $h(t)$ e da entrada $x(t)$ são, respectivamente:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + k} \qquad \text{e} \qquad X(s) = \frac{X_0}{s}$$

- Portanto,

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{X_0}{s(ms^2 + k)} = \frac{X_0/m}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{X_0}{m\omega_n^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}\right)$$

- A transformada inversa fornece

$$y(t) = \frac{X_0}{k}(1 - \cos(\omega_n t)), \qquad t \geq 0$$

Conceitos de estabildiade

Estabilidade assintótica

- Considere a seguinte função de transferência:

$$H(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

em que $n > m$, $p_1 = p_2 = \cdots = p_\ell$ é um polo de multiplicidade $\ell \geq 2$.

- Decompondo $H(s)$ em frações parciais, tem-se

$$H(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{c_\ell}{(s-p_1)^\ell} + \frac{c_{\ell+1}}{s-p_{\ell+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s-p_n}$$

- Aplicando a transformada de Laplace inversa, tem-se

$$h(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 t e^{p_1 t} + \cdots + c_\ell \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{p_1 t} + c_{\ell+1} e^{p_{\ell+1} t} + \cdots + c_n e^{p_n t}, \quad t \geq 0$$

- Para que $h(t)$ convirja a zero, com $t \to \infty$, é necessário que $\mathrm{Re}(p_i) < 0$, ou seja, que os polos de $H(s)$ pertençam ao semiplano esquerdo aberto do plano complexo s.

- Um sistema linear invariante no tempo é assintoticamente estável se os polos p_i da função de transferência $H(s)$ satisfizerem $\mathrm{Re}(p_i) < 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

Conceitos de estabildiade

Estabilidade BIBO (Bounded Input Bounded Output)

- Um sistema é BIBO estável se entradas limitadas produzirem saídas limitadas.
- Um sinal $x(t)$ é limitado se existir um número finito M tal que $|x(t)| < M$, $\forall t$.
- Um sistema contínuo é BIBO estável se, e somente se,

$$\|h(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$$

  ou seja, se sua resposta impulsiva for absolutamente integrável.
- Para provar a condição de suficiência, note que

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)| \, \mathrm{d}\tau$$

- Como $|x(t)| < M$ para qualquer t, então

$$|y(t)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \, \mathrm{d}\tau$$

- Portanto, a saída $y(t)$ é limitada sempre que $h(t)$ for absolutamente integrável.

Conceitos de estabildiade

Estabilidade BIBO (Bounded Input Bounded Output)

- Exemplo: Mostre que o sistema abaixo não é BIBO estável e determine uma entrada $x(t)$ limitada tal que a saída $y(t)$ não seja limitada:

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = x(t)$$

- A função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 4}$$

- A resposta impulsiva é obtida da transformada inversa de

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$$

ou seja,

$$h(t) = 1/2 \sin(2t), \quad t \geq 0$$

- Como $\|h(t)\|_1$ não é finita, pode-se concluir que o sistema não é BIBO estável.
- Portanto, existe uma entrada $x(t)$ limitada tal que $y(t)$ não seja limitada.
- Para mostrar esse fato, considere a seguinte entrada limitada:

$$x(t) = 2\cos(2t),\ t \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad X(s) = \frac{2s}{s^2 + 4}$$

Conceitos de estabildiade

Estabilidade BIBO (Bounded Input Bounded Output)

- Nesse caso, a saída $Y(s)$ é dada por

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s^2+4}\frac{2s}{s^2+4} = \frac{2s}{(s^2+4)^2}$$

- A função $Y(s)$ possui polos múltiplos em $p_1 = 2\mathrm{j}$ e $p_2 = -2\mathrm{j}$.
- Sua decomposição em frações parciais é dada por

$$Y(s) = \frac{c_1}{(s-p_1)} + \frac{c_2}{(s-p_1)^2} + \frac{c_3}{(s-p_2)} + \frac{c_4}{(s-p_2)^2}$$

- Os resíduos são dados por $c_1 = c_3 = 0$ e $c_2 = -\mathrm{j}/4$, $c_4 = \mathrm{j}/4$. Assim,

$$Y(s) = \frac{-\mathrm{j}}{4(s-2\mathrm{j})^2} + \frac{\mathrm{j}}{4(s+2\mathrm{j})^2}$$

- Agora, lembrando que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\gamma}{(s+\beta)^2}\right] = \gamma t e^{-\beta t}, \qquad t \geq 0$$

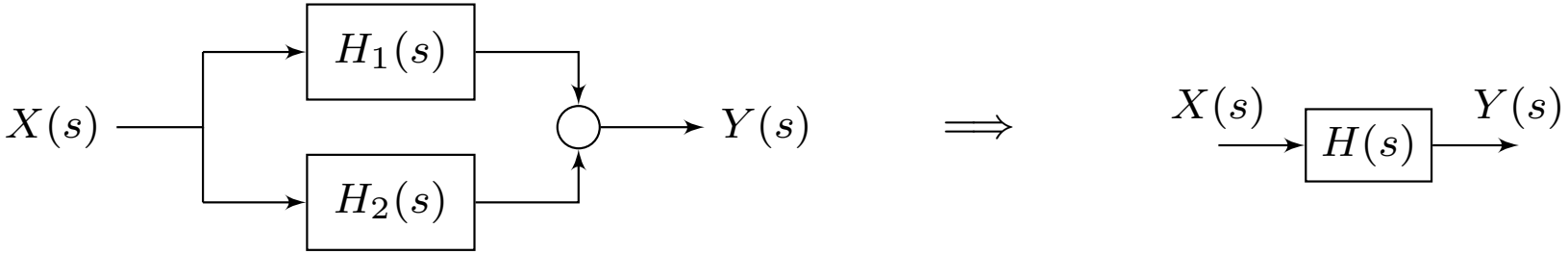
  a transformada inversa de $Y(s)$ é dada por

$$y(t) = -\frac{\mathrm{j}}{4}te^{2\mathrm{j}t} + \frac{\mathrm{j}}{4}te^{-2\mathrm{j}t} = \frac{1}{2}t\sin(2t), \quad t \geq 0$$

Diagrama de blocos

Operações básicas

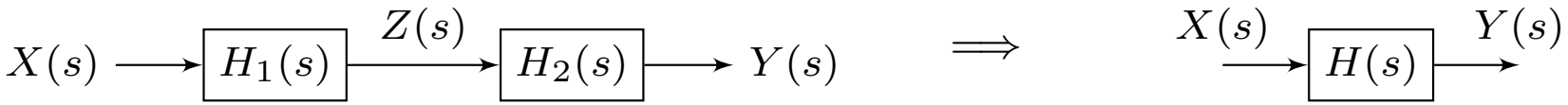
- Conexão em paralelo de duas funções de transferência H_1 e H_2.



- Para essa configuração, a função de transferência equivalente é dada por

$$H = H_1 + H_2$$

- Conexão em série de duas funções de transferência H_1 e H_2.



- Como $Y = H_2 Z$ e $Z = H_1 X$, tem-se que $Y = H_2 H_1 X$ e, ou seja

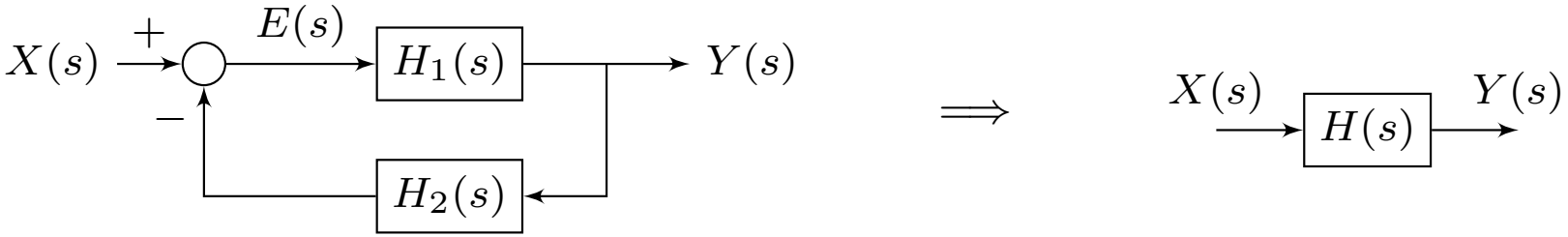
$$H = H_2 H_1$$

- No Matlab, pode-se usar os comandos **H=parallel**$(\boldsymbol{H_1}, \boldsymbol{H_2})$ e **H=series**$(\boldsymbol{H_1}, \boldsymbol{H_2})$.

Diagrama de blocos

Operações básicas

- Conexão em feedback, também denominada de realimentação ou retroalimentação.



- Para determinar a função de transferência equivalente H, basta seguir o fluxo.

- Do diagrama, tem-se

$$Y = H_1 E \qquad \text{e} \qquad E = X - H_2 Y$$

- Substituindo uma equação na outra, obtém-se

$$Y = H_1(X - H_2 Y) \quad \Longrightarrow \quad Y + H_1 H_2 Y = H_1 X \quad \Longrightarrow \quad Y = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2} X$$

- Portanto, a função de transferência equivalente é dada por

$$H = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2}$$

- No Matlab, pode-se usar o comando **H=feedback(H_1, H_2)**.

Diagrama de blocos

Representação de funções de transferência

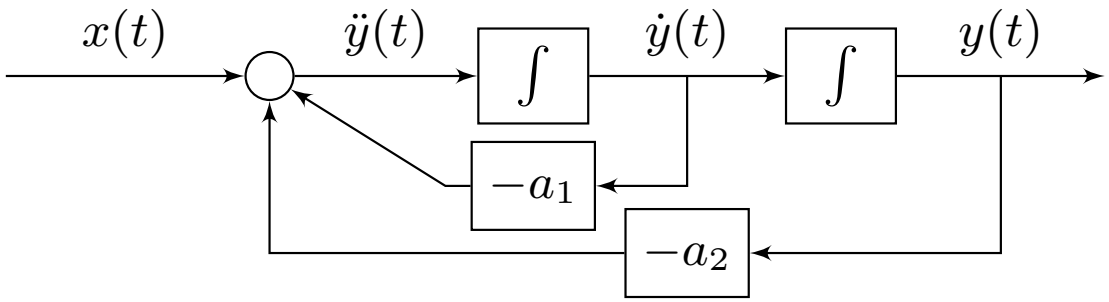
- Pode-se representar por diagrama de blocos uma equação diferencial.
- Considere a equação diferencial de segunda ordem dada por

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = x(t)$$

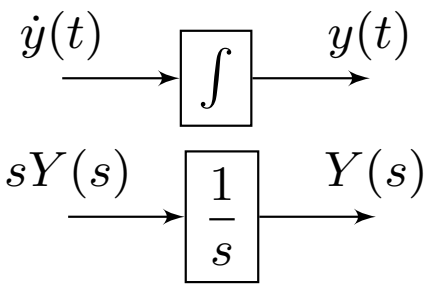
que pode ser escrita de forma equivalente como

$$\ddot{y}(t) = x(t) - a_1\dot{y}(t) - a_2 y(t)$$

- Sua representação por diagrama de blocos é dada por



Bloco Integrador



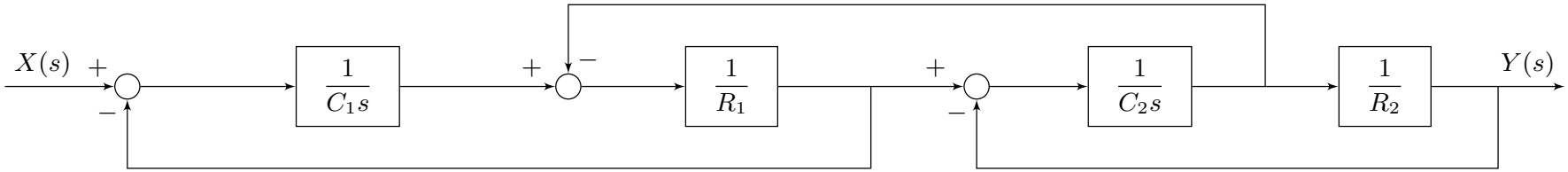
- Note que esse sistema corresponde à função de transferência

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

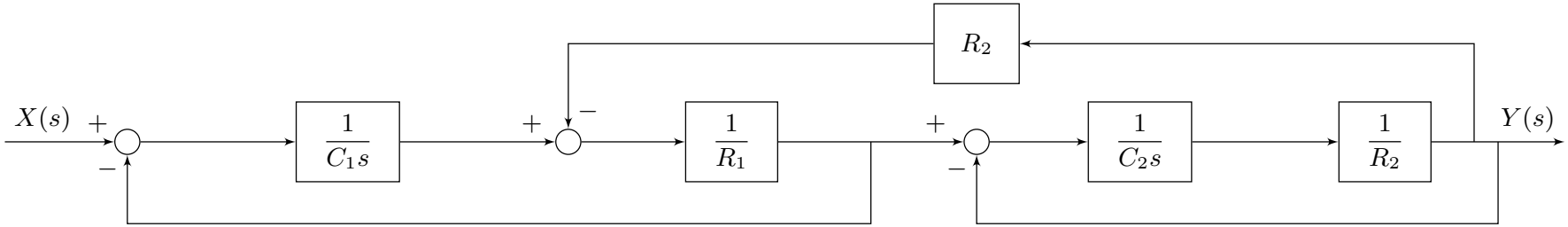
Diagrama de blocos

Simplificação de diagramas de blocos

- Considere o diagrama de blocos abaixo.



- Movendo o laço direito da realimentação para fora da segunda malha, têm-se



- Movendo o laço esquerdo da realimentação para fora da primeira malha, têm-se

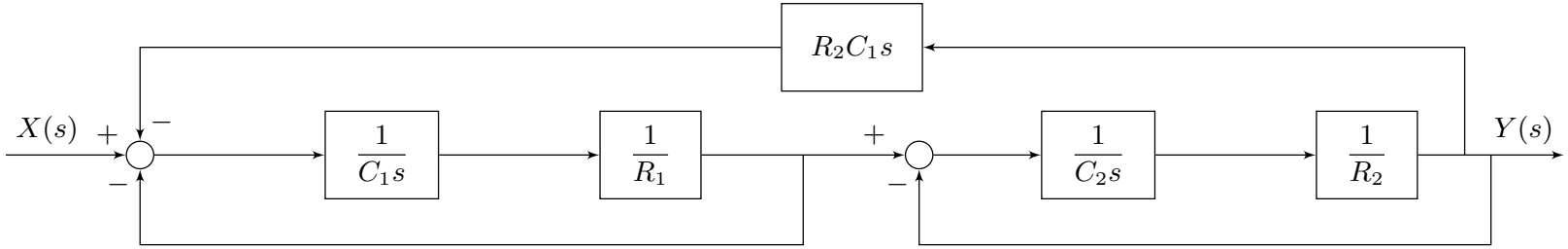
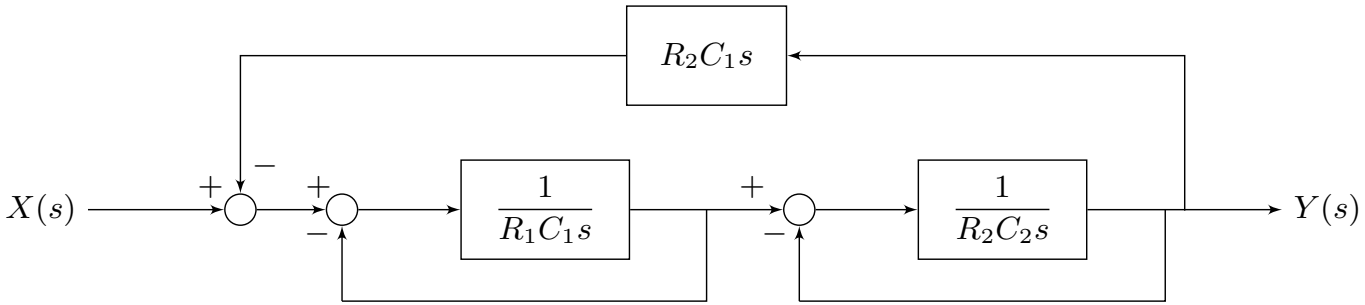


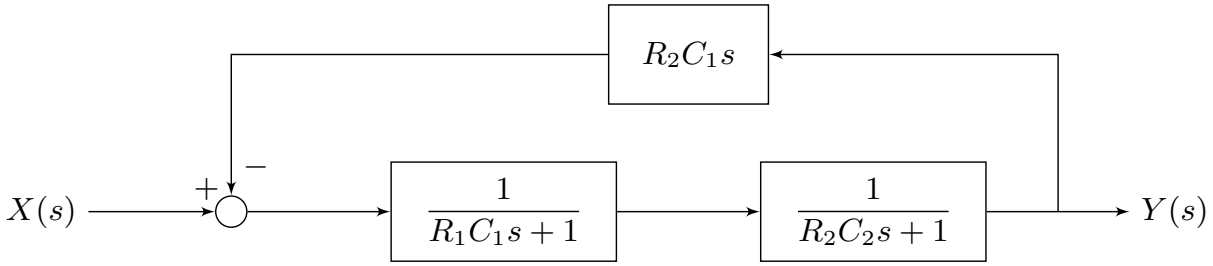
Diagrama de blocos

Simplificação de diagramas de blocos

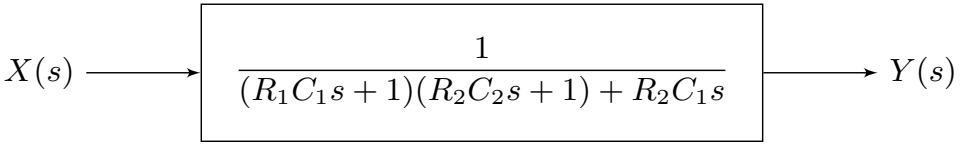
- O último passo forneceu, após as conexões em série, o diagrama abaixo.



- Simplificando as duas malhas (internas) em feedback, tem-se



- Finalmente, realizando a conexão em série e a retroalimentação, obtém-se



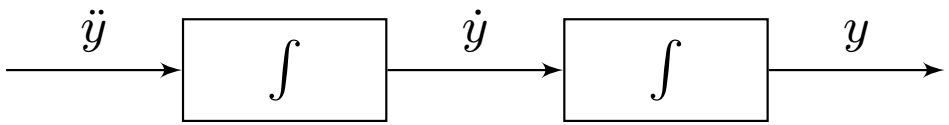
Simulação numérica

Diagramas de blocos no Simulink

- Exemplo: Represente por diagrama de blocos a equação de 2ª ordem abaixo:

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

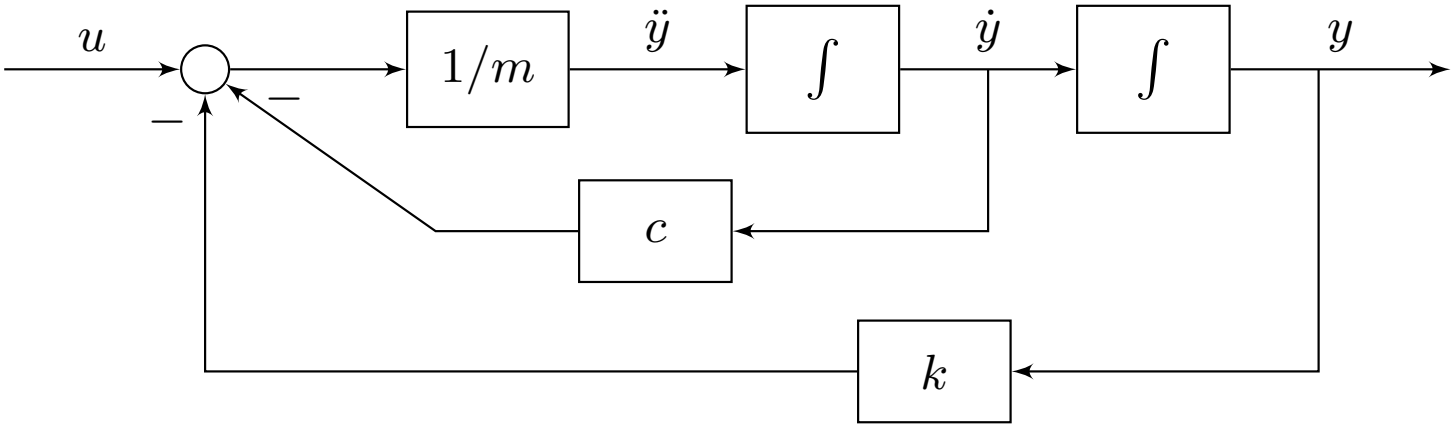
- Como a equação é de 2ª ordem, serão necessários dois integradores, como segue:



- Notando agora que

$$\ddot{y}(t) = \frac{1}{m}\big(u(t) - c\dot{y}(t) - ky(t)\big)$$

obtém-se finalmente o diagrama abaixo.



Simulação numérica

Diagramas de blocos no Simulink

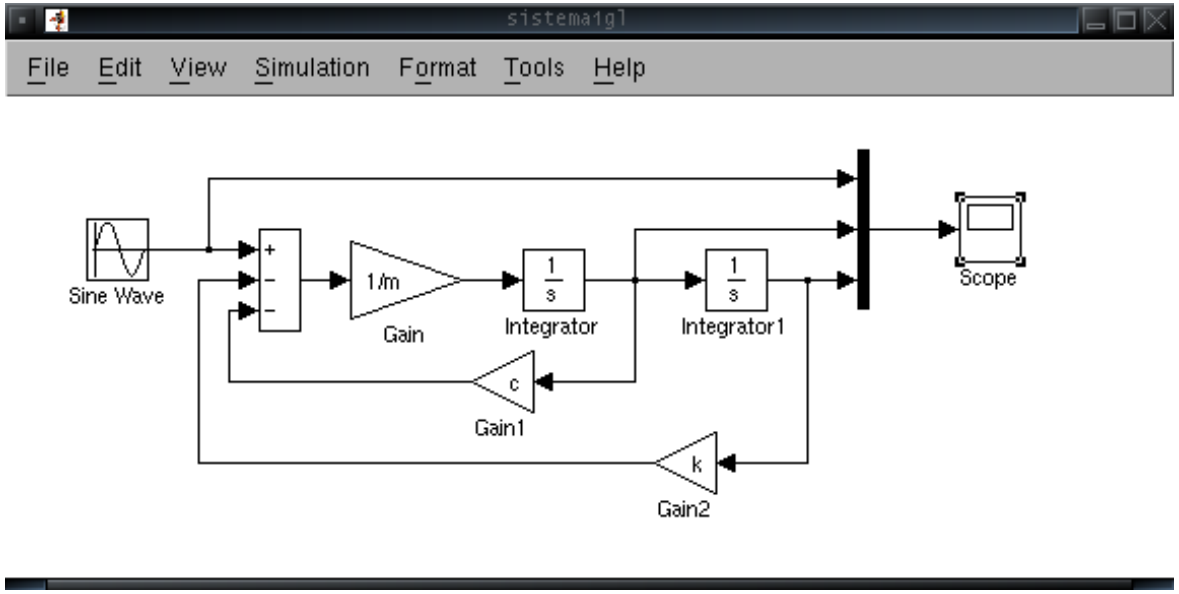
- Considere a equação de movimento de um sistema mecânico dada por

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

- Sua função de transferência é dada por

$$H(s) = Y(s)/U(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

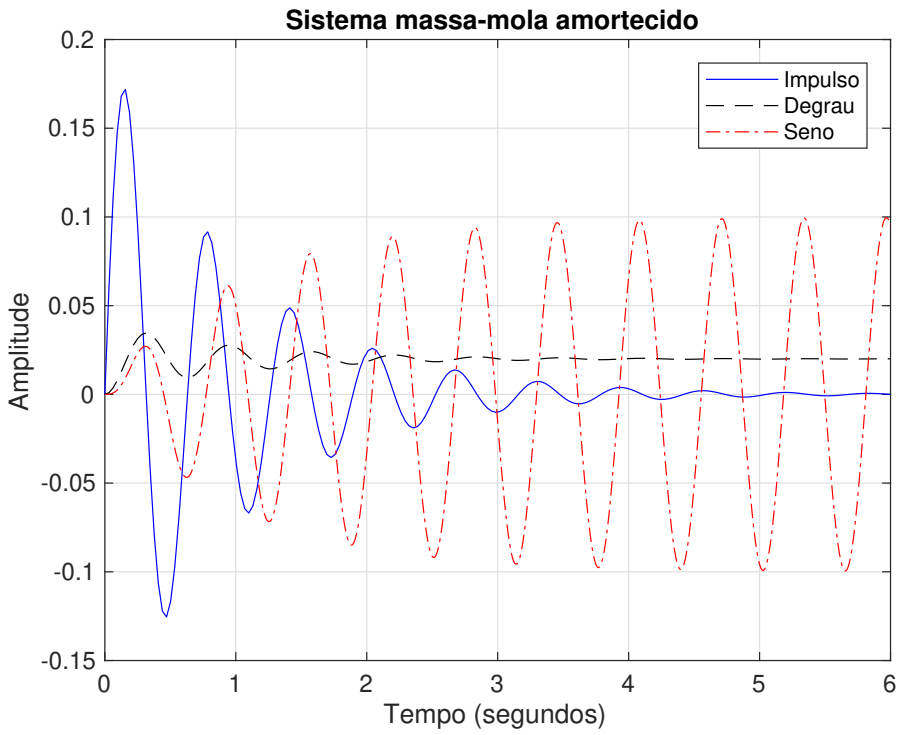
- No Matlab, essa função de transferência é definida com **H=tf([1],[m c k])**
- No Simulink, pode-se simular esse sistema com o seguinte diagrama de blocos:



Simulação numérica

- Exemplo: Resposta ao impulso, ao degrau e ao seno.

```
% Define a função de transferência
m = 1/2; c = 1; k = 50;
H = tf([1],[m c k])
% Resposta ao impulso (6 segundos)
[y1,t1] = impulse(H,6);
% Resposta ao degrau
[y2,t2] = step(H,6);
% Resposta ao seno em w=10 rad/s
t = 0:0.05:6;
u = sin(10*t);
[y3,t3] = lsim(H,u,t);
% Plota as respostas
plot(t1,y1,'b-',t2,y2,'k--',t3,y3,'r-.'), grid
legend('Impulso','Degrau','Seno')
xlabel('Tempo (segundos)')
ylabel('Amplitude')
title('Sistema massa-mola amortecido')
```



- No Matlab, a resposta ao degrau é obtida com **step(H)**, ao impulso com **impulse(H)** e a uma entrada $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ qualquer com **lsim(H,u,t)**.

Simulação numérica

- Exemplo. A seguir, são apresentados vários comandos úteis.

```
% O comando zpk() cria uma função de transferência
% a partir dos polos, dos zeros e do ganho do sistema
% Seja H(s) = 20*(s+5)/((s+1)*(s+100));
H = zpk(-5,[-1 -100],20)
% O comando pole() retorna os polos
pole(H)
% O comando zero() retorna os zeros
zero(H)
% O comando damp() retorna: polos, frequência natural e amortecimento
damp(H)
% O comando zpkdata() retorna os polos, os zeros e o ganho de H(s)
[z,p,k] = zpkdata(H)
% O comando tfdata() retorna o numerador e o denominado de H(s)
[num,den] = tfdata(H,'v')
% O comando pzmap() plota a localização dos polos e zeros
pzmap(H)
% O comando dcgain() retorna o ganho DC de H(s)
dcgain(H)
```