Matemática para Engenharia

Grace S. Deaecto

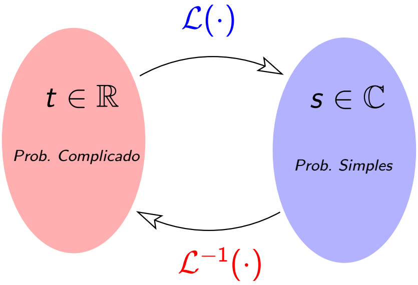
Faculdade de Engenharia Mecânica / UNICAMP
13083-860, Campinas, SP, Brasil.
grace@fem.unicamp.br

Segundo Semestre de 2013

1. Transformada de Laplace
   - Definição e domínio
   - Propriedades da transformada de Laplace
   - Derivada generalizada
   - Transformada de Laplace inversa
   - Solução de equações diferenciais
     - Solução via transformada de Laplace
     - Solução temporal

Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é uma transformação $\mathcal{L}(\cdot)$ que permite converter um problema de difícil solução definido em $t \in \mathbb{R}$ em um mais simples de resolver definido em $s \in \mathbb{C}$. Obtendo sua solução em $s \in \mathbb{C}$ a transformação inversa $\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$ é aplicada de maneira a obter a solução do problema original em $t \in \mathbb{R}$.



Definição e domínio

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$, denotada por $\hat{f}(s)$ ou $\mathcal{L}(f(t))$, é uma função de variável complexa

$$\hat{f}(s) \ : \ \mathcal{D}(\hat{f}) \to \mathbb{C}$$

definida por

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

com

$$\mathcal{D}(\hat{f}) := \{s \in \mathbb{C} \mid \hat{f}(s) \text{ existe}\}$$

É importante ressaltar que a frase "$\hat{f}(s)$ existe" significa a integral acima converge e é finita.

Exemplo

Calcule a transformada de Laplace de $f(t) = e^{-at} \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

- De acordo com a definição, temos

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t} dt &= -\frac{1}{s+a}\left[\lim_{t\to 0} e^{-(s+a)t} - \lim_{t\to -\infty} e^{-(s+a)t}\right] \\
&= -\frac{1}{s+a}, \quad \text{para } \mathrm{Re}(s) < -a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt &= \frac{1}{s+a}\left[\lim_{t\to 0} e^{-(s+a)t} - \lim_{t\to \infty} e^{-(s+a)t}\right] \\
&= \frac{1}{s+a}, \quad \text{para } \mathrm{Re}(s) > -a
\end{aligned}$$

e, portanto, $\mathcal{D}(\hat{f}) = \emptyset$.

Definição e domínio

Para funções definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ o domínio da transformada é muito restrito. Assim sendo, vamos considerar somente funções definidas para $t \geq 0$ e, neste caso :

Transformada de Laplace Unilateral

Para funções $f(t)$ definidas apenas para $t \geq 0$, a Transformada de Laplace é dada por

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

sendo seu domínio definido genericamente por

$$\mathcal{D}(\hat{f}) := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > \alpha\}$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ a ser determinado.

Definição e domínio

- Classe importante : Definida pela existência de $s_f \in \mathbb{C}$ tal que o limite

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T |f(t)e^{-s_f t}|dt$$

existe e é finito.

Lema (Domínio)

Para as funções da classe acima é válido que :

- Qualquer $s \in \mathcal{C}$ satisfazendo $\mathrm{Re}(s) \geq \mathrm{Re}(s_f)$ pertence a $\mathcal{D}(\hat{f})$.
- Existe M finito tal que $|\hat{f}(s)| \leq M$ para todo $s \in \mathcal{D}(\hat{f})$.

Definição e domínio

Forma geral : Para funções definidas para todo $t \geq 0$:

$$\mathcal{D}(\hat{f}) := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > \alpha\}$$

- Determinação do domínio : Para a função $f(t)$ dada, determine o menor valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\tau \to \infty} \int_0^{\tau} |f(t)e^{-\alpha t}| dt < \infty$$

- Determinação do domínio : Para a $\hat{f}(s)$ dada, determine o menor valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que ela permaneça analítica e, portanto, finita em todo $s \in \mathcal{D}(\hat{f})$.

Exemplo

Determine o domínio das funções a seguir :

- $\hat{f}(s) = \frac{1}{s+1}$
  - A função é definida para todo $s \in \mathbb{C}$ com exceção do seu polo $s = -1$ e, portanto, seu domínio é

$$\mathcal{D}(\hat{f}) = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > -1\}$$

- $\hat{f}(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s}$
  - Sua série de Laurent é a seguinte

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{s} - \tau + \frac{\tau^2 s}{2} - \frac{\tau^3 s^2}{6} + \cdots$$

e, portanto, ela não é analítica em $s = 0$ sendo seu domínio dado por

$$\mathcal{D}(\hat{f}) = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$$

Exemplo

Determine o domínio das funções a seguir :

- $\hat{f}(s) = \frac{1-e^{-\tau s}}{s}$
    - Sua série de Taylor é a seguinte

$$\hat{f}(s) = \tau - \frac{\tau^2 s}{2} + \frac{\tau^3 s^2}{6} - \cdots$$

e, portanto, seu domínio é dado por

$$\mathcal{D}(\hat{f}) = \mathbb{C}$$

Algumas funções importantes

A seguir são apresentadas algumas funções clássicas usadas no estudo de sistemas dinâmicos.

- Impulso unitário :

$$\mathcal{L}\Big(\delta(t)\Big) = 1, \quad \mathcal{D}(\hat{\delta}) = \mathbb{C}$$

- Degrau unitário :

$$u(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\left(u(t)\right) = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{D}(\hat{u}) = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$$

Cálculos envolvendo a transformada de Laplace

Seguem alguns cálculos importantes envolvendo a Transformada de Laplace que estão inteiramente ligados à determinação do seu domínio.

- Teorema do valor final : O limite da função definida para $t \geq 0$ pode ser calculado como

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\hat{f}(s)$$

  desde que $0 \in \mathcal{D}(s\hat{f}(s))$.

- Cálculo de integrais : A integral de uma função pode ser calculada como

$$\int_0^\infty f(t)dt = \hat{f}(0)$$

  desde que $0 \in \mathcal{D}(\hat{f}(s))$.

Propriedades da transformada de Laplace

Estão listadas a seguir algumas propriedades básicas da transformada de Laplace :

- Linearidade : Para $c_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \cdots, q$ temos

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{q} c_i f_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{q} c_i \hat{f}_i(s)$$

- Deslocamento no tempo (atraso) :

$$\mathcal{L}\Big(f(t-\tau)\Big) = e^{-\tau s}\hat{f}(s)$$

- Deslocamento em frequência :

$$\mathcal{L}\Big(e^{-at}f(t)\Big) = \hat{f}(s+a)$$

Propriedades da transformada de Laplace

- Convolução :

$$\mathcal{L}\Big(f(t) * g(t)\Big) = \hat{f}(s)\hat{g}(s)$$

- Integral em relação ao tempo :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\xi)d\xi\right) = \frac{\hat{f}(s)}{s}$$

- Derivada em relação ao tempo :

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}(t)\right) = s\hat{f}(s) - f(0)$$

Derivada generalizada

As funções que estamos considerando são definidas somente para $t \geq 0$ sendo que em $t = 0$ pode ocorrer uma descontinuidade que deve ser levada em conta no cálculo da derivada.

- Derivada em relação ao tempo :

$$h(t) := \begin{cases} \dot{f}(t) & , \quad t > 0 \\ \text{valor finito} & , \quad t = 0 \end{cases}$$

geralmente adota-se $h(0) = \lim_{t \to 0^+} \dot{f}(t) = \dot{f}(0^+) < \infty$.

Lema (Derivada temporal)

A transformada de Laplace de $h(t)$ definida acima é dada por :

$$\hat{h}(s) = s\hat{f}(s) - f(0) \ , \ \mathcal{D}(\hat{h}) = \mathcal{D}(s\hat{f})$$

Derivada generalizada

Na definição anterior $h(t)$ não leva em conta a possibilidade de $f(t)$ ser descontínua em $t = 0$ o que ocorre sempre que $f(0) \neq 0$. Para analisar a possibilidade de $f(t)$ variar arbitrariamente rápido neste instante, vamos considerar a seguinte sequência de funções

$$f_n(t) := f(t) - f(0)\left(1 + \frac{t}{\tau_n}\right)e^{-t/\tau_n}, \ \forall t \geq 0$$

em que $\tau_n > 0$ tende a zero quando n tende a infinito. Note que

- $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ para todo $t > 0$ e, portanto

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(s) = \hat{f}(s), \ \forall s \in \mathcal{D}(\hat{f})$$

A função $\lim_{n\to\infty} f_n(t)$ é contínua, mas permite modelar uma variação brusca em $t = 0$.

Derivada generalizada

Lembrando que $h(t)$ e $h_n(t)$ são as derivadas em relação a $t > 0$ das funções $f(t)$ e $f_n(t)$, respectivamente. Utilizando o lema anterior, temos $\hat{h}_n(s) = s\hat{f}_n(s) - f_n(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \hat{h}_n(s) &= s\hat{f}(s) \\ &= (s\hat{f}(s) - f(0)) + f(0) \\ &= \hat{h}(s) + f(0) \end{aligned}$$

levando a

$$\lim_{n\to\infty} h_n(t) = h(t) + f(0)\delta(t)$$

sendo que a quantidade $\lim_{n\to\infty} h_n(t)$ é chamada derivada generalizada de $f(t)$. Ela coincide com $\dot{f}(t)$ para todo $t > 0$ mas é diferente em $t = 0$ sempre que $f(0) \neq 0$.

Derivada generalizada

Para exemplificar a aplicação da derivada generalizada $\lim_{n\to\infty} h_n(t)$ em comparação com a derivada temporal $h(t)$, vamos considerar a função degrau que definimos anteriormente e cuja transformada de Laplace é $\hat{u}(s) = 1/s$

- Derivada temporal : $\hat{h}(s) = s\hat{u}(s) - 1 = 0$. Não leva em conta uma variação brusca em $t = 0$ e considera $h(0) = 0$ e $h(t) = \dot{u}(t) = 0, \ \forall t > 0$.
- Derivada generalizada : $\hat{h}_n(s) = s\hat{u}(s) = 1$ de acordo com o fato de que $\lim_{n\to\infty} \hat{h}_n(t) = \delta(t)$ para todo $t \geq 0$.

Transformada de Laplace inversa

A transformada de Laplace inversa de uma função $\hat{f}(s)$ pode ser calculada resolvendo-se a seguinte integral de linha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \hat{f}(s) e^{st} ds, \;\; t > 0$$

sendo γ qualquer linha vertical contida no domínio de $\hat{f}(s)$.

Geralmente, esta integral é muito difícil de calcular. Entretanto, para funções racionais, a transformada inversa pode ser obtida mais facilmente via decomposição em frações parciais. Para apresentá-la vamos revisar alguns pontos importantes sobre funções racionais.

Transformada de Laplace inversa

Uma função racional é definida como a divisão de dois polinômios

$$\hat{f}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

com $n \geq m$, $a_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 0, \cdots, n$ e $b_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 0, \cdots, m$. Se $n = m$ ela é chamada própria, caso contrário, se $n > m$, ela é dita estritamente própria.

- A função racional não é analítica apenas nos seus polos $p_i, \; i = 1, \cdots, n$ que são raízes de D(s)=0 sendo seu domínio é dado por

$$\alpha = \max_{i=1,\cdots,n} \mathrm{Re}(p_i)$$

- As raízes de $N(s) = 0$ são denominados de zeros de $\hat{f}(s)$.

Transformada de Laplace inversa

- Decomposição em frações parciais : Os escalares α_i são determinados

$$\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{M} \frac{\alpha_i}{(s-p_i)^{n_i}}$$

sendo p_i seus polos com multiplicidades n_i tais que $\sum_{i=1}^{M} n_i = n$.

A transformada inversa é obtida a partir de

$$\mathcal{L}\left(e^{pt}\right) = \frac{1}{(s-p)}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}\left(t^r e^{pt}\right) = \frac{r!}{(s-p)^{r+1}}$$

válida para todo $r \geq 0$.

Solução via transformada de Laplace

Considere a equação diferencial

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i g}{dt^i}(t), \ \forall t \geq 0$$

com condições iniciais

$$\frac{d^i y}{dt^i}(0), \text{ para todo } i = 0, \cdots, n-1$$

devemos enfatizar que as condições iniciais impostas não serão necessariamente coincidentes com o seus respectivos limites à direita como veremos a seguir.

Aplicando transformada de Laplace em ambos os lados temos

$$\hat{y}(s) = \underbrace{H_0(s)}_{cond.\ iniciais} + H(s)\hat{g}(s)$$

Solução via transformada de Laplace

- Os aspectos mais importantes são :
  - $h_0(t) = \mathcal{L}^{-1}(H_0(s))$ depende exclusivamente das condições iniciais.
  - $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s))$ é a resposta ao impulso obtida através de condições iniciais nulas. Note que $y(t) = h(t)$ sempre que a entrada $g(t)$ for o impulso unitário e todas as condições iniciais forem nulas.
  - A partir da propriedade da convolução para a qual $\mathcal{L}(h(t) * g(t)) = H(s)\hat{g}(s)$, temos

$$\Downarrow$$

$$y(t) = h_0(t) + \int_0^t h(t-\xi)g(\xi)d\xi$$

Exemplos

1. Considere a equação diferencial de primeira ordem

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = g(t) \ , \ \ y(0) = 1$$

Para $g(t) = u(t)$ o que implica $\hat{g}(s) = 1/s$, aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados, temos

$$s\hat{y}(s) - y(0) + 2\hat{y}(s) = \frac{1}{s}$$

impondo $y(0) = 1$, temos

$$\hat{y}(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{1/2}{s} + \frac{1/2}{(s+2)}$$

e, portanto, $y(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$ para $t > 0$. Para esta função note que $y(0) = y(0^+) = 1$.

Exemplos

2. Considere a mesma equação diferencial dada anteriormente, mas com $g(t) = \delta(t)$ o que implica $\hat{g}(s) = 1$. Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados, temos

$$s\hat{y}(s) - y(0) + 2\hat{y}(s) = 1$$

impondo $y(0) = 1$, temos

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{(s+2)}$$

e, portanto, $y(t) = 2e^{-2t}$ para $t > 0$. Para esta função temos que $y(0) \neq y(0^+) = 2$. Isto ocorreu devido ao impulso que fez o limite à direita da função variar instantaneamente.

Exemplos

3. Considere a equação diferencial de primeira ordem

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{g}(t)\ ,\ \ y(0) = 1$$

com $g(t) = u(t)$. Vamos resolver esta equação utilizando as duas interpretações possíveis :

- Derivada temporal : Considerando que $du(t)/dt$ possui um valor arbitrário, mas finito, em $t = 0$, temos

  $$s\hat{y}(s) - y(0) + 2\hat{y}(s) = s\hat{u}(s) - u(0)$$

  o que implica em

  $$\hat{y}(s) = \frac{1}{(s+2)}$$

  Logo, $y(t) = e^{-2t}$ para $t > 0$. Note que $y(0) = y(0^+) = 1$.

Exemplos

- Derivada generalizada : Considerando que $du(t)/dt$ varia arbitrariamente rápido em $t = 0$, temos

$$s\hat{y}(s) - y(0) + 2\hat{y}(s) = s\hat{u}(s)$$

o que implica em

$$\hat{y}(s) = \frac{2}{(s+2)}$$

Logo, $y(t) = 2e^{-2t}$ para $t > 0$. Note que $y(0) \neq y(0^+) = 2$.

É importante salientar que ambos os casos estão corretos. Ademais, ambos podem fornecer o mesmo resultado desde que as condições iniciais sejam devidamente ajustadas.

Exemplos

4. Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = \dot{u} + 3u, \;\; y(0) = 1, \;\; \dot{y}(0) = 0$$

A transformada de Laplace de $\ddot{y}$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\ddot{y}) &= s\mathcal{L}(\dot{y}) - \dot{y}(0) \\ &= s(s\hat{y} - y(0)) - \dot{y}(0) \\ &= s^2\hat{y} - sy(0) - \dot{y}(0) \end{aligned}$$

desconsiderando o efeito das variações bruscas na origem, temos $\mathcal{L}(\dot{u} + 3u) = s\hat{u}(s) - u(0) + 3\hat{u}$ e, portanto

$$\hat{y}(s) = \frac{s^2 + 5s + 3}{s(s^2 + 5s + 6)} = \frac{0.5}{s} + \frac{1.5}{(s+2)} - \frac{1}{(s+3)}$$

cuja transformada inversa fica na forma

$$y(t) = 0.5 + 1.5e^{-2t} - e^{-3t}, \;\; t > 0$$

com $y(0) = y(0^+)$ e $\dot{y}(0) = \dot{y}(0^+)$

Exemplos

Utilizando a derivada generalizada, temos

$$\mathcal{L}(\dot{u} + 3u) = s\hat{u}(s) + 3\hat{u}(s)$$

e, portanto

$$\hat{y}(s) = \frac{s^2 + 6s + 3}{s(s^2 + 5s + 6)} = \frac{0.5}{s} + \frac{2.5}{(s+2)} - \frac{2}{(s+3)}$$

cuja transformada inversa fica na forma

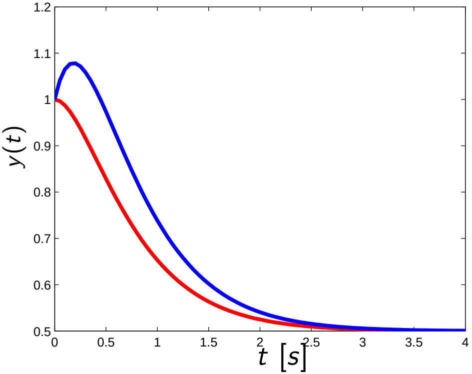
$$y(t) = 0.5 + 2.5e^{-2t} - 2e^{-3t}, \ \ t > 0$$

$$\Downarrow$$

Note que $y(0) = y(0^+)$ mas $\dot{y}(0) \neq \dot{y}(0^+) = 1$.

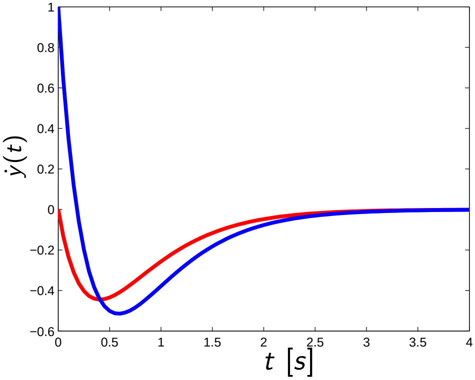
Exemplos

- Simulação temporal de $y(t)$



Exemplos

- Simulação temporal de $\dot{y}(t)$



Solução temporal

- Considere a equação diferencial com coeficientes constantes

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i}(t) = g(t) \ , \ \forall \ t \geq 0$$

onde $g(t)$ é uma função dada e $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, \cdots, n$ são escalares, com $a_n \neq 0$. Adotamos a notação mais compacta $D[y] = g$ onde $D[\cdot]$ denota o operador diferencial

$$D[y] = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i}(t)$$

com polinômio característico

$$\Delta_D(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i$$

Solução temporal

- Os seguintes aspectos são relevantes :
    - O operador $D[\cdot]$ é linear.
    - Para a função exponencial verifica-se que

$$
\begin{aligned}
D\left[e^{\lambda t}\right] &= \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i e^{\lambda t} \\
&= \Delta_D(\lambda) e^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

      ou seja $D\left[e^{\lambda t}\right]$ e $e^{\lambda t}$ são colineares.
    - A equação algébrica $\Delta_D(\lambda) = 0$ é denominada equação característica. Tem grau n e todos os seus coeficientes são reais. Assim sendo, ela admite n raízes em pares complexos conjugados.

Solução temporal

- O seguinte resultado é fundamental neste estudo :

Existência e unicidade

Seja $g(t)$ uma função contínua para todo $t \geq 0$. A equação diferencial $D[y] = g$ sujeita às condições iniciais

$$y(0), \frac{dy}{dt}(0), \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0)$$

admite uma única solução $y(t)$ para todo $t \geq 0$.

Observe que especificar uma entrada $g(t)$ não é condição suficiente para encontrar uma solução única $y(t)$. A solução será única se forem impostas condições suplementares sobre $y(t)$ como um conjunto qualquer de condições iniciais.

Solução temporal

- A solução geral da equação diferencial em estudo pode ser decomposta na forma

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \ , \ \forall \ t \geq 0$$

em que :

- $y_h(t)$ satisfaz a equação homogênea $D[y_h] = 0$.
- $y_p(t)$ é uma solução particular que satisfaz $D[y_p] = g$.

pois

$$D[y] = D[y_h + y_p] = D[y_h] + D[y_p] = g$$

Assim sendo, resta verificarmos como podemos impor as n condições iniciais dadas.

Solução temporal

- Equação homogênea : São obtidas a partir da relação

$$D[e^{\lambda t}] = \Delta_D(\lambda)e^{\lambda t} \ , \ \forall \ t \geq 0$$

a qual indica que todas as funções do tipo $e^{\lambda_i t}$, definidas para todo $t \geq 0$, com λ_i sendo uma das raízes de $\Delta_D(\lambda) = 0$, são soluções da equação homogênea. Como $\Delta_D(\lambda)$ é um polinômio de grau n, com coeficientes reais, ele admite n raízes em $\mathbb{C}$ em pares complexos conjugados. Supondo que as n raízes sejam distintas, as funções

$$e^{\lambda_i t} \ , \quad \forall \ t \geq 0 \ , \ i = 1, \cdots, n$$

formam um conjunto LI.

Solução temporal

- De fato, a solução homogênea é dada por

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}$$

sendo que as constantes c_i para $i = 1, \cdots, n$ são determinadas através das n condições iniciais :

$$\begin{aligned}
y(0) &= \sum_{i=1}^{n} c_i + y_p(0) \\
y^{(1)}(0) &= \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i + y_p^{(1)}(0) \\
\vdots &= \vdots \\
y^{(n-1)}(0) &= \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^{n-1} + y_p^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

Solução temporal

- Na forma matricial, temos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}}_{V} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) - y_p(0) \\ y^{(1)}(0) - y_p^{(1)}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) - y_p^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}$$

em que a matriz V é conhecida como matriz de Vandermonde. Note que os coeficientes $c_1, \cdots, c_n$ podem ser determinados de forma única somente se $\det(V) \neq 0$ e isto ocorre sempre que as raízes da equação característica são distintas, ou seja, $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $\forall i \neq j$.

Solução temporal

- Quando duas ou mais soluções da equação característica não são distintas um conjunto de soluções homogêneas pode ser obtido observando-se que a igualdade

$$te^{\lambda t} = \frac{de^{\lambda t}}{d\lambda}$$

permite verificar que

$$\begin{aligned} D[te^{\lambda t}] &= D\left[\frac{de^{\lambda t}}{d\lambda}\right] \\ &= \frac{d}{d\lambda}\Delta_D(\lambda)e^{\lambda t} \\ &= \left[\frac{d}{d\lambda}\Delta_D(\lambda) + t\Delta_D(\lambda)\right] e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Solução temporal

- Por exemplo, considerando que λ_j seja uma raiz com multiplicidade dois da equação característica então $\Delta_D(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^2 d(\lambda)$ para algum polinômio $d(\lambda)$ de ordem $n-2$. Portanto

$$\Delta_D(\lambda_j) = 0 \ , \quad \frac{d}{d\lambda}\Delta_D(\lambda_j) = 0$$

fazem com que as funções $e^{\lambda_j t}$ e $te^{\lambda_j t}$, definidas para todo $t \geq 0$ sejam soluções da equação homogênea. Além disso, como o conjunto de funções $e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$ é LI

$$y(t) = \left(\sum_{i \neq j = 1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} + c_j te^{\lambda_j t} \right) + y_p(t)$$

pode ser obtida de forma única através das condições iniciais, uma vez que, $\det(V) \neq 0$.

Solução temporal

- Este procedimento é válido para raízes com qualquer multiplicidade. Se λ_j for uma raiz com multiplicidade $m \leq n$ então

$$\Delta_D(\lambda_j), \cdots, \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \Delta_D(\lambda_j) = 0$$

e, com raciocínio análogo, verificamos que as funções $t^i e^{\lambda_j t}$, definidas para todo $t \geq 0$ e todo $i = 0, \cdots, m-1$ são soluções da equação homogênea e formam um conjunto de funções LI.

Podemos assim determinar as n soluções da equação homogênea que formam um conjunto de funções linearmente independentes. Estas funções são denominadas Modos Próprios da equação diferencial.

Solução temporal

- Solução particular : O chamado Método dos Coeficientes a Determinar se aplica para a classe de funções $g(t)$ que em conjunto com suas derivadas sucessivas, até uma certa ordem m, formam um conjunto LD. Portanto, existe um operador diferencial com polinômio característico $\Delta_N(\lambda)$ de ordem m tal que

$$N[g] = 0$$

Neste caso, uma solução particular de $D[y] = g$ pode ser calculada através da equação homogênea definida pelo operador diferencial composto

$$N[D[y]] = 0$$

que nada mais é que uma equação diferencial homogênea de ordem $n + m$.

Solução temporal

Exemplo : Considere a equação diferencial

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = g(t)$$

com $\Delta_D(\lambda) = (\lambda + 2)$ em que $g(t) = t$. Note que o conjunto $\{g(t), g^{(1)}(t), g^{(2)}(t)\}$ é LD, de fato

$$\alpha\ g^{(2)}(t) + 0\ g^{(1)}(t) + 0\ g(t) = 0$$

para $\alpha \neq 0$ arbitrário. Logo, temos que

$$\frac{d^2}{dt^2}\{\dot{y}(t) + 2y(t)\} = 0$$

o que fornece a equação característica

$$\Delta_D(\lambda)\Delta_N(\lambda) = (\lambda + 2)\lambda^2 = 0$$

Solução temporal

Para a mesma equação diferencial, mas com $g(t) = \mathrm{sen}(t)$, temos que o conjunto $\{g(t), g^{(1)}(t), g^{(2)}(t)\}$ é LD. De fato

$$\alpha \; g^{(2)}(t) + 0 \; g^{(1)}(t) + \alpha \; g(t) = 0$$

para $\alpha \neq 0$ arbitrário. Logo, temos que

$$\frac{d^2}{dt^2}\{\dot{y}(t) + 2y(t)\} + \{\dot{y}(t) + 2y(t)\} = 0$$

o que fornece a equação característica

$$\Delta_D(\lambda)\Delta_N(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 1) = 0$$

Solução temporal

De maneira geral, acabamos de verificar que se

$$\sum_{j=0}^{m} \beta_j \frac{d^j}{dt^j} g(t) = 0$$

com $\beta_0, \cdots, \beta_m$ não todos nulos, então

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m} \beta_j \frac{d^j}{dt^j} \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) \right\} &= \sum_{j=0}^{m} \beta_j \frac{d^j}{dt^j} g(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e a equação característica de ordem $n + m$ é dada por

$$\Delta_D(\lambda)\Delta_N(\lambda) = 0$$

Solução temporal

- Podemos observar que as funções $g(t) = \{\delta(t), \dot{u}(t)\}$ não pertencem à classe de funções para as quais o método dos coeficientes a determinar pode ser aplicado, uma vez que não é possível obter um conjunto LD com suas derivadas sucessivas.
- Como já sabemos (supondo que todas as raízes sejam distintas)

$$y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}}_{\Delta_D(\lambda)=0 \Longrightarrow y_h(t)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} d_i e^{\lambda_i t}}_{\Delta_N(\lambda)=0 \Longrightarrow y_p(t)}$$

sendo que os coeficientes $d_1, \cdots, d_m$ são determinados impondo-se $D[y_p] = g$. No caso da eventual ocorrência de raízes múltiplas o tratamento anterior deve ser adotado.

Exemplos

- A equação diferencial

$$\dot{y}(t) + y(t) = e^{-2t}, \ \ y(0) = 1$$

admite $\Delta_D(\lambda) = \lambda + 1$ e $\Delta_N(\lambda) = \lambda + 2$. Portanto

$$y(t) = \underbrace{c_1 e^{-t}}_{y_h(t)} + \underbrace{d_1 e^{-2t}}_{y_p(t)}$$

substituindo $y_p(t)$ obtém-se $d_1 = -1$ e, em seguida, com a condição inicial obtém-se $c_1 = 2$. A solução geral é

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} \ , \ \ \forall \ t \geq 0$$

Exemplos

- A equação diferencial

$$\dot{y}(t) + y(t) = e^{-t}, \ \ y(0) = 1$$

admite $\Delta_D(\lambda) = \lambda + 1$ e $\Delta_N(\lambda) = \lambda + 1$. Portanto

$$y(t) = \underbrace{c_1 e^{-t}}_{y_h(t)} + \underbrace{d_1 t e^{-t}}_{y_p(t)}$$

substituindo $y_p(t)$ obtém-se $d_1 = 1$ e, em seguida, com a condição inicial obtém-se $c_1 = 1$. A solução geral é

$$y(t) = e^{-t} + te^{-t} \ , \quad \forall \ t \geq 0$$

Exemplos

- A equação diferencial

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \mathrm{sen}(t)$$

é tal que $\Delta_D(\lambda) = \lambda^2 + 1$ e $\Delta_N(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Portanto

$$y(t) = \underbrace{c_1 e^{jt} + c_2 e^{-jt}}_{y_h(t)} + \underbrace{d_1 t e^{jt} + d_2 t e^{-jt}}_{y_p(t)}$$

Exemplos

- Uma equação diferencial com $\Delta_D(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)$ e entrada tal que $\Delta_N(\lambda) = \lambda + 1$ tem a solução geral

$$y(t) = \underbrace{c_1 e^{-t} + c_2 e^{t}}_{y_h(t)} + \underbrace{d_1 t e^{-t}}_{y_p(t)}$$

- Uma equação diferencial com $\Delta_D(\lambda) = (\lambda+1)^2$ e entrada tal que $\Delta_N(\lambda) = \lambda - 1$ tem a solução geral

$$y(t) = \underbrace{c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}}_{y_h(t)} + \underbrace{d_1 e^{t}}_{y_p(t)}$$