Matemática para Engenharia

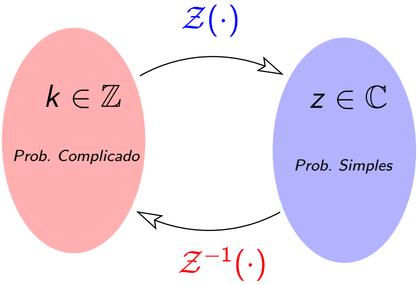
Grace S. Deaecto

Faculdade de Engenharia Mecânica / UNICAMP
13083-860, Campinas, SP, Brasil.
grace@fem.unicamp.br

Segundo Semestre de 2013

Transformada $\mathcal{Z}$

A transformada $\mathcal{Z}$ é uma transformação $\mathcal{Z}(\cdot)$ que permite converter um problema de difícil solução definido em $k \in \mathbb{K}$ em um mais simples de resolver definido em $z \in \mathbb{C}$. Obtendo sua solução em $z \in \mathbb{C}$ a transformação inversa $\mathcal{Z}^{-1}(\cdot)$ é aplicada de maneira a obter a solução do problema original em $k \in \mathbb{Z}$.



Definição e domínio

A transformada $\mathcal{Z}$ de uma função $f(k)$ definida para todo $k \in \mathbb{K}$, denotada por $\hat{f}(z)$ ou $\mathcal{Z}(f(k))$, é uma função de variável complexa

$$\hat{f}(z) \ : \ \mathcal{D}(\hat{f}) \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$\hat{f}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

com

$$\mathcal{D}(\hat{f}) := \{z \in \mathbb{C} \mid \hat{f}(z) \text{ existe}\}$$

É importante ressaltar que a frase "$\hat{f}(z)$ existe" significa o somatório acima converge e é finito.

Exemplo

Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ de $f(k) = a^k \; : \; \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

- De acordo com a definição, temos

$$\hat{f}(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} a^k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} - 1$$

Note que

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{0} a^k z^{-k} &= \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} z^k \\ &= -\frac{a}{z-a}, \quad \text{para } |z| < a \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{z}{z-a}, \quad \text{para } |z| > a$$

e, portanto, $\mathcal{D}(\hat{f}) = \emptyset$.

Definição e domínio

Para funções definidas para todo $k \in \mathbb{Z}$, o domínio da transformada é muito restrito. Assim sendo, vamos considerar somente funções definidas para $k \in \mathbb{N}$ e, neste caso :

Transformada $\mathcal{Z}$ Unilateral

Para funções $f(k)$ definidas apenas para $k \in \mathbb{N}$, a Transformada $\mathcal{Z}$ é dada por

$$\hat{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

sendo seu domínio definido genericamente por

$$\mathcal{D}(\hat{f}) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \alpha\}$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ a ser determinado.

Definição e domínio

- Classe importante : Definida pela existência de $z_f \in \mathbb{C}$ tal que o limite

$$\lim_{\mathcal{T}\to\infty} \sum_{k=0}^{\mathcal{T}} |f(k) z_f^{-k}|$$

existe e é finito.

Lema (Domínio)

Para as funções da classe acima é válido que :

- Qualquer $z \in \mathbb{C}$ satisfazendo $|z| > |z_f|$ pertence a $\mathcal{D}(\hat{f})$.
- Existe M finito tal que $|\hat{f}(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathcal{D}(\hat{f})$.

Definição e domínio

Forma geral : Para funções definidas para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{D}(\hat{f}) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \alpha\}$$

- Determinação do domínio : Para a função $f(k)$ dada, determine o menor valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\tau \to \infty} \sum_{k=0}^{\tau} |f(k)\alpha^{-k}| < \infty$$

- Determinação do domínio : Para a função $\hat{f}(z)$ dada, determine o menor valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que ela permaneça analítica e, portanto, finita em todo $z \in \mathcal{D}(\hat{f})$.

Exemplo

Determine o domínio das funções a seguir :

- A função $\hat{f}(z) = z^{-1}$ não é analítica em $z = 0$. Note que $f(k) = \delta(k-1) = \{0, 1, 0, 0, 0, \cdots\}$ e portanto $\mathcal{D}(\hat{f}) := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0\}$.
- A função
$$\hat{f}(z) = \frac{z}{(z^2-1)}$$
não é analítica em $z = 1$ e $z = -1$. Note que
$$\frac{\hat{f}(z)}{z} = -\frac{1/2}{(z+1)} + \frac{1/2}{(z-1)}$$
com
$$f(k) = \frac{1}{2}\left\{1 - (-1)^k\right\},\ k \geq 0 \Rightarrow f(k) = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots\}$$
e portanto $\mathcal{D}(\hat{f}) := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

Algumas funções importantes

A seguir são apresentadas algumas funções clássicas usadas no estudo de sistemas dinâmicos.

- Impulso unitário :

$$\mathcal{Z}\Big(\delta(k)\Big) = 1, \quad \mathcal{D}(\hat{\delta}) = \mathbb{C}$$

- Degrau unitário :

$$u(k) := \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\left(u(k)\right) = \frac{z}{z-1}, \quad \mathcal{D}(\hat{u}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$$

Cálculos envolvendo a transformada $\mathcal{Z}$

Seguem alguns cálculos importantes envolvendo a transformada $\mathcal{Z}$ que estão inteiramente ligados à determinação do seu domínio.

- Teorema do valor final : O limite da função definida para $k \geq 0$ pode ser calculado como

$$\lim_{k \to \infty} f(k) = \lim_{z \to 1} (z-1)\hat{f}(z)$$

desde que $1 \in \mathcal{D}((z-1)\hat{f}(z))$.

- Cálculo de somatórios : O somatório de uma função pode ser calculado como

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = \hat{f}(1)$$

desde que $1 \in \mathcal{D}(\hat{f}(z))$.

Propriedades da transformada $\mathcal{Z}$

Estão listadas a seguir algumas propriedades básicas da transformada $\mathcal{Z}$:

- Linearidade : Para $c_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \cdots, q$ temos

$$\mathcal{Z}\left(\sum_{i=1}^{q} c_i f_i(k) \right) = \sum_{i=1}^{q} c_i \hat{f}_i(z)$$

- Deslocamento no tempo :

$$\mathcal{Z}\Big(f(k+n) \Big) = z^n \left\{ \hat{f}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k) z^{-k} \right\}$$

- Convolução :

$$\mathcal{Z}\Big(f(k) \bullet g(k) \Big) = \hat{f}(z)\hat{g}(z)$$

Transformada $\mathcal{Z}$ inversa

A definição da transformada $\mathcal{Z}$ indica que os valores de $f(k)$ para $k \in \mathbb{N}$ são os coeficientes da série de Laurent desenvolvida na origem $z_0 = 0$, ou seja

$$\hat{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \;\Rightarrow\; f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{\hat{f}(z)}{z^{-k+1}} dz, \;\; k \in \mathbb{N}$$

sendo γ um percurso fechado contido no domínio de $\hat{f}(z)$.

Esta integral pode ser calculada utilizando o método do resíduos. Entretanto, para funções racionais, a transformada inversa pode ser obtida mais facilmente via decomposição em frações parciais.

Transformada $\mathcal{Z}$ inversa

- Decomposição em frações parciais : Os escalares α_i são determinados através da decomposição

$$\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{M} \frac{\alpha_i z}{(z-p_i)^{n_i}}$$

sendo p_i seus polos com multiplicidades n_i tais que $\sum_{i=1}^{M} n_i = n$.

A transformada inversa é determinada com a relação

$$\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{(z-p)^{r+1}}\right) = \frac{1}{r!}\frac{d^r}{dp^r}p^k = \begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix} p^{k-r} \;, \; \forall \; k \geq 0$$

válida para todo $r \geq 0$ que pode ser obtida baseando-se nos seguintes resultados

$$\mathcal{Z}\left(p^k\right) = \frac{z}{(z-p)} \;, \; \mathcal{Z}\left(kp^k\right) = (-z)\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-p}\right)$$

Solução via transformada $\mathcal{Z}$

- Considere a equação a diferenças

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i) = \sum_{i=0}^{m} e_i g(k+i) \ , \ \forall k \geq 0$$

com condições iniciais $y(i)$, para todo $i = 0, \cdots, n-1$ e $g(i)$, para todo $i = 0, \cdots, m-1$. Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ em ambos os membros, obtemos

$$\hat{y}(z) = \underbrace{H_0(z)}_{cond.\ iniciais} + H(z)\hat{g}(z)$$

onde devemos notar que $H_0(z)$ depende dos valores iniciais da solução $y(0), \cdots, y(n-1)$ e também dos valores iniciais da entrada $g(0), \cdots, g(m-1)$.

Solução via transformada $\mathcal{Z}$

- Os aspectos mais importantes são :
  - $h_0(k) := \mathcal{Z}^{-1}(H_0(z))$ é a parte da solução que depende exclusivamente das condições iniciais e dos valores iniciais da entrada.
  - $h(k) := \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$ é a resposta ao impulso (obtida a partir de condições iniciais que anulam $H_0(z)$). A função $h(k) \bullet g(k)$ obtida pela transformada $\mathcal{Z}$ inversa é a parte da solução que depende exclusivamente da função de entrada.

$$\Downarrow$$

$$y(k) = h_0(k) + \sum_{i=0}^{k} h(k-i)g(i) \ , \quad \forall \ k \geq 0$$

Exemplo

- Considere a equação a diferenças

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = g(k+1) - 3g(k)$$

com $y(0) = 0$ e $y(1) = 0$. Aplicando a transformada $\mathcal{Z}$ de ambos os lados, levando em conta

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(y(k+2)) &= z\mathcal{Z}(y(k+1)) - zy(1) \\ &= z(z\hat{y}(z) - zy(0)) - zy(1) \\ &= z^2\hat{y}(z) - z^2y(0) - zy(1) \end{aligned}$$

e rearranjando, obtemos

$$\hat{y}(z) = \underbrace{\frac{-zg(0)}{z^2+3z+2}}_{H_0(z)} + \underbrace{\frac{z-3}{z^2+3z+2}}_{H(z)}\hat{g}(z)$$

que depende das condições iniciais da entrada $g(0)$.

Exemplo

- Para $g(k) = u(k)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\hat{y}(z)}{z} &= \frac{-2}{(z+1)(z-1)(z+2)} \\ &= \frac{1}{z+1} + \frac{(-1/3)}{z-1} + \frac{(-2/3)}{z+2}\end{aligned}$$

  e, portanto

$$y(k) = (-1)^k - \frac{1}{3}u(k) - \frac{2}{3}(-2)^k, \;\; k \in \mathbb{N}$$

Solução temporal

- Considere a equação a diferenças com coeficientes constantes

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i) = \sum_{i=0}^{m} e_i g(k+i) \; , \; \forall \; t \geq 0$$

onde $g(k)$ é uma função dada e $a_i \in \mathbb{R}$, $e_i \in \mathbb{R}$ são escalares e $n \geq m$. Adotamos a notação mais compacta $D[y] = g$ onde $D[\cdot]$ denota o operador avanço

$$D[y] = \sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i)$$

com polinômio característico

$$\Delta_D(\mu) = \sum_{i=0}^{n} a_i \mu^i$$

Solução temporal

- Os seguintes aspectos são relevantes :
  - O operador $D[\cdot]$ é linear.
  - Para a função potência verifica-se que

$$
\begin{aligned}
D\left[\mu^k\right] &= \sum_{i=0}^{n} a_i \mu^i \mu^k \\
&= \Delta_D(\mu)\mu^k
\end{aligned}
$$

    ou seja $D\left[\mu^k\right]$ e μ^k são colineares.
  - A equação algébrica $\Delta_D(\mu) = 0$ é denominada equação característica. Tem grau n e todos os seus coeficientes são reais. Assim sendo, ela admite n raízes em pares complexos conjugados.

Solução temporal

- O seguinte resultado é fundamental neste estudo :

Existência e unicidade

Seja $g(k)$ uma função definida para todo $k \in \mathbb{N}$. A equação diferencial $D[\mu] = g$ sujeita às condições iniciais

$$y(0), y(1), \cdots, y(n-1)$$

admite uma única solução $y(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Observe que especificar uma entrada $g(k)$ não é condição suficiente para encontrar uma solução única $y(k)$. A solução será única se forem impostas condições suplementares sobre $y(k)$ como um conjunto qualquer de condições iniciais.

Solução temporal

- A solução geral da equação diferencial em estudo pode ser decomposta na forma

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k) \ , \ \forall \ k \in \mathbb{N}$$

em que :

  - $y_h(k)$ satisfaz a equação homogênea $D[y_h] = 0$.
  - $y_p(k)$ é uma solução particular que satisfaz $D[y_p] = g$.

pois

$$D[y] = D[y_h + y_p] = D[y_h] + D[y_p] = g$$

Assim sendo, resta verificarmos como podemos impor as n condições iniciais dadas.

Solução temporal

- Equação homogênea : São obtidas a partir da relação

$$D[\mu^k] = \Delta_D(\mu)\mu^k \ , \ k \in \mathbb{N}$$

a qual indica que todas as funções do tipo μ_i^k, definidas para todo $k \in \mathbb{N}$, com μ_i sendo uma das raízes de $\Delta_D(\mu) = 0$, são soluções da equação homogênea. Como $\Delta_D(\mu)$ é um polinômio de grau n, com coeficientes reais, ele admite n raízes em pares complexos conjugados. Supondo que as n raízes sejam distintas, as funções

$$\mu_i^k \ , \quad k \in \mathbb{N} \ , \ i = 1, \cdots, n$$

formam um conjunto LI.

Solução temporal

- De fato, a solução homogênea é dada por

$$y_h(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i^k$$

sendo que as constantes c_i para $i = 1, \cdots, n$ são determinadas através das n condições iniciais :

$$\begin{aligned} y(0) &= \sum_{i=1}^{n} c_i + y_p(0) \\ y(1) &= \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i + y_p(1) \\ \vdots &= \vdots \\ y(n-1) &= \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i^{n-1} + y_p((n-1)) \end{aligned}$$

Solução temporal

- Na forma matricial, temos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu_1^{n-1} & \mu_2^{n-1} & \cdots & \mu_n^{n-1} \end{bmatrix}}_{V} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) - y_p(0) \\ y(1) - y_p(1) \\ \vdots \\ y(n-1) - y_p(n-1) \end{bmatrix}$$

em que a matriz V é conhecida como matriz de Vandermonde. Note que os coeficientes $c_1, \cdots, c_n$ podem ser determinados de forma única somente se $\det(V) \neq 0$ e isto ocorre sempre que as raízes da equação característica são distintas, ou seja, $\mu_i \neq \mu_j$ para $\forall\ i \neq j$.

Solução temporal

- Quando duas ou mais soluções da equação característica não são distintas um conjunto de soluções homogêneas pode ser obtido observando-se que a igualdade

$$k\mu^k = \mu \frac{d\mu^k}{d\mu}$$

permite verificar que

$$\begin{aligned} D[k\mu^k] &= \mu D\left[\frac{d\mu^k}{d\mu}\right] \\ &= \mu \frac{d}{d\mu}\Delta_D(\mu)\mu^k \\ &= \left[\mu \frac{d}{d\mu}\Delta_D(\mu) + k\Delta_D(\mu)\right]\mu^k \end{aligned}$$

Solução temporal

- Por exemplo, considerando que μ_j seja uma raiz com multiplicidade dois da equação característica então $\Delta_D(\mu) = (\mu - \mu_j)^2 d(\mu)$ para algum polinômio $d(\mu)$ de ordem $n-2$. Portanto

$$\Delta_D(\mu_j) = 0 \ , \quad \frac{d}{d\mu}\Delta_D(\mu_j) = 0$$

fazem com que as funções μ_j^k e $k\mu_j^k$, definidas para todo $k \in \mathbb{N}$ sejam soluções da equação homogênea. Além disso, como o conjunto de funções $\mu_1^k, \cdots, \mu_j^k, k\mu_j^k, \cdots, \mu_n^k$ é LI

$$y(k) = \left(\sum_{i \neq j = 1}^{n} c_i \mu_i^k + c_j k \mu_j^k \right) + y_p(t)$$

pode ser obtida de forma única através das condições iniciais, uma vez que, $\det(V) \neq 0$.

Solução temporal

- Este procedimento é válido para raízes com qualquer multiplicidade. Se μ_j for uma raiz com multiplicidade $m \leq n$ então

$$\Delta_D(\mu_j), \cdots, \frac{d^{m-1}}{d\mu^{m-1}}\Delta_D(\mu_j) = 0$$

e, com raciocínio análogo, verificamos que as funções $k^i\mu_j^i$, definidas para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $i = 0, \cdots, m-1$ são soluções da equação homogênea e formam um conjunto de funções LI.
Podemos assim determinar as n soluções da equação homogênea que formam um conjunto de funções linearmente independentes. Estas funções são denominadas Modos Próprios da equação diferencial.

Solução temporal

- Solução particular : O chamado Método dos Coeficientes a Determinar se aplica para a classe de funções $g(k)$ que em conjunto com seus valores em instantes sucessivos, até um certo valor m, formam um conjunto LD. Portanto, existe um operador avanço com polinômio característico $\Delta_N(\lambda)$ de ordem m tal que
$$N[g] = 0$$
Neste caso, uma solução particular de $D[y] = g$ pode ser calculada através da equação homogênea definida pelo operador a diferenças composto
$$N[D[y]] = 0$$
que nada mais é que uma equação a diferenças homogênea de ordem $n + m$.

Solução temporal

Exemplo : Considere a equação a diferenças

$$y(k+1) + 2y(k) = g(k)$$

com $\Delta_D(\mu) = (\mu + 2)$ em que $g(k) = k$. Note que o conjunto $\{g(k), g(k+1), g(k+2)\}$ é LD, de fato

$$\alpha g(k+2) \; - 2\alpha \; g(k+1) \; + \; \alpha g(k) = 0$$

para $\alpha \neq 0$ arbitrário. Logo, temos para $\alpha = 1$

$$\underbrace{y(k+1+2) + 2y(k+2)}_{g(k+2)} - 2\underbrace{\{y(k+1+1) + 2y(k+1)\}}_{g(k+1)} + \underbrace{y(k+1) + 2y(k)}_{g(k)} = 0$$

o que fornece a equação característica

$$\Delta_D(\lambda)\Delta_N(\lambda) = (\mu + 2)(\mu - 1)^2 = 0$$

Solução temporal

- Como já sabemos (supondo que todas as raízes sejam distintas)

$$y(k) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i^k}_{\Delta_D(\mu)=0 \Longrightarrow y_h(k)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} d_i \mu_i^k}_{\Delta_N(\mu)=0 \Longrightarrow y_p(k)}$$

sendo que os coeficientes $d_1, \cdots, d_m$ são determinados impondo-se $D[y_p] = g$. No caso da eventual ocorrência de raízes múltiplas, o tratamento anterior deve ser adotado.

Exemplos

- A equação a diferenças

$$y(k+1)+y(k)=(-2)^k, \;\; y(0)=1$$

admite $\Delta_D(\mu)=\mu+1$ e $\Delta_N(\mu)=\mu+2$. Portanto

$$y(k)=\underbrace{c_1(-1)^k}_{y_h(k)}+\underbrace{d_1(-2)^k}_{y_p(k)}$$

substituindo $y_p(k)$ na equação obtém-se $d_1=-1$ e, em seguida, com a condição inicial obtém-se $c_1=2$. A solução geral é

$$y(t)=2(-1)^k-(-2)^k \;, \quad \forall \; k\in\mathbb{N}$$

Exemplos

- A equação a diferenças

$$y(k+1) + y(k) = (-1)^k, \;\; y(0) = 1$$

admite $\Delta_D(\mu) = \mu + 1$ e $\Delta_N(\mu) = \mu + 1$. Portanto

$$y(k) = \underbrace{c_1(-1)^k}_{y_h(k)} + \underbrace{d_1 k(-1)^k}_{y_p(k)}$$

substituindo $y_p(t)$ obtém-se $d_1 = -1$ e, em seguida, com a condição inicial obtém-se $c_1 = 1$. A solução geral é

$$y(k) = (-1)^k - k(-1)^k, \;\; \forall \; k \in \mathbb{N}$$

Exemplos

- A equação a diferenças

$$y(k+2) + y(k) = \mathrm{sen}((\pi/2)k)$$

é tal que tal que $\Delta_D(\mu) = \mu^2 + 1$ e $\Delta_N(\mu) = \mu^2 + 1$. Portanto

$$y(k) = \underbrace{c_1 e^{j(\pi/2)k} + c_2 e^{-j(\pi/2)k}}_{y_h(k)} + \underbrace{d_1 k e^{j(\pi/2)k} + d_2 k e^{-j(\pi/2)k}}_{y_p(k)}$$

Exemplos

- Uma equação a diferenças com $\Delta_D(\mu) = (\mu+1)(\mu-1)$ e entrada tal que $\Delta_N(\mu) = \mu + 1$ tem a solução geral

$$y(k) = \underbrace{c_1(-1)^k + c_2}_{y_h(k)} + \underbrace{d_1 k(-1)^k}_{y_p(k)}$$

- Uma equação a diferenças com $\Delta_D(\mu) = (\mu+1)^2$ e entrada tal que $\Delta_N(\mu) = \mu - 1$ tem a solução geral

$$y(k) = \underbrace{c_1(-1)^k + c_2 k(-1)^k}_{y_h(k)} + \underbrace{d_1}_{y_p(k)}$$