Eletricidade Aplicada

Profa. Grace S. Deaecto

Instituto de Ciência e Tecnologia / UNIFESP
12231-280, São J. dos Campos, SP, Brasil.
grace.deaecto@unifesp.br

Novembro, 2012

1. Teoremas Básicos e Circuitos Equivalentes
   - Apresentação do capítulo
   - Teorema da substituição
   - Teorema da superposição
   - Teorema da reciprocidade
   - Circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton

Apresentação do capítulo

- Neste capítulo, serão estudados alguns teoremas essenciais na análise de circuitos elétricos, a saber :
  - Teorema da substituição
  - Teorema da superposição
  - Teorema da reciprocidade
- Os circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton também serão um dos objetivos.
- Estes circuitos permitem substituir um circuito complicado por um outro mais simples composto apenas por uma fonte de tensão ou de corrente e um resistor.
- Embora trataremos aqui apenas circuitos resistivos, generalizaremos posteriormente, estes resultados para considerar qualquer circuito linear contendo também capacitores e indutores.

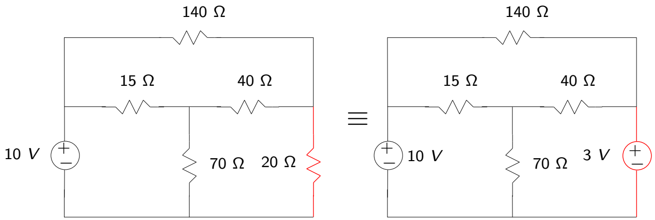
Teorema da substituição

Em um circuito cuja solução é única, se um bipolo k tiver tensão $v_k(t)$ e corrente $i_k(t)$, podemos substituí-lo por um outro bipolo que apresente a mesma tensão $v_k(t)$ e a mesma corrente $i_k(t)$ sem que as tensões ou correntes dos demais bipolos se alterem.

- Geralmente, nas aplicações deste teorema, o novo bipolo k é uma fonte de tensão ou de corrente.
- Como consequência da solução permanecer única, após a substituição do bipolo por uma fonte de tensão de valor $v_k(t)$, a corrente sobre a fonte, imposta pelo restante do circuito, também será $i_k(t)$.
- A demonstração do teorema é baseada no fato de que a solução é única e se mantém única após a substituição.

Exemplo - Teorema da substituição

Exemplo : O resistor de 20 [Ω] possui tensão de 3 [V] e corrente de 0.15 [A]. Ele foi substituído por uma fonte de tensão de 3 [V].



De acordo com o teorema

- todas as variáveis (tensões e correntes) permanecerão idênticas ao do circuito original.
- a corrente que atravessa a fonte de 3 [V] é de 0.15 [A]

Verifiquem ! !

Teorema da superposição

Qualquer sistema linear obedece a este princípio. Os circuitos em estudo são lineares e descritos da forma $\mathbf{Tx} = \mathbf{u}$ em que

- $\mathbf{T}$ representa a matriz contendo condutâncias e/ou resistências.
- $\mathbf{x}$ representa as tensões e/ou correntes incógnitas.
- $\mathbf{u}$ representa o vetor de fontes independentes.

Em um sistema linear $\mathbf{u}$ corresponde ao vetor de entradas e as outras grandezas (tensões de bipolos, de nós e correntes) podem ser definidas como saídas.

Teorema da superposição

A saída correspondente a várias entradas é a soma das saídas correspondentes a cada uma das entradas consideradas isoladamente quando todas as demais são anuladas.

Demonstração : A solução do circuito $\mathbf{Tx} = \mathbf{u}$ com n fontes independentes é dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{u}$$

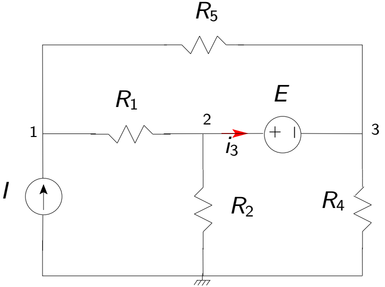
sendo que o vetor de entradas $\mathbf{u}$ pode ser decomposto em n vetores $\mathbf{u_i}$, $i = 1, \cdots, n$ representando cada uma das entradas

$$\mathbf{u} = \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} + \cdots + \mathbf{u_n}$$

em que $\mathbf{u_i}$ é o vetor contendo o valor da i-ésima fonte na posição i e zero nas demais posições. Considerando esta entrada, a solução $\mathbf{x}$ é a soma das soluções correspondentes a cada entrada isolada, anuladas todas as demais.

Exemplo - Teorema da superposição

Exemplo : Considere o circuito com duas entradas E e I, calcule a saída e_2.



A equação de nós modificada é

$$\begin{bmatrix} (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}) & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_5} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}) & 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & (\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}) & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}$$

Exemplo - Teorema da superposição

Definindo

$$D = \begin{vmatrix} (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}) & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_5} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}) & 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & (\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}) & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

A saída e_2 é a seguinte

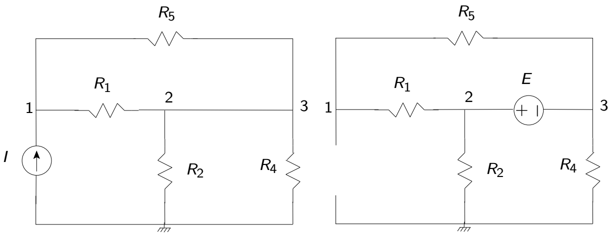
$$e_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}) & I & -\frac{1}{R_5} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & (\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}) & -1 \\ 0 & E & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo o determinante, temos

$$e_2 = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_5} & (\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}) & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} I + \frac{1}{D}\begin{vmatrix} (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}) & -\frac{1}{R_5} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_5} & (\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}) & -1 \end{vmatrix} E$$

Cada parcela representa o valor da saída e_2 quando uma das fontes é anulada. A seguir calcularemos e_2 através do teorema.

Exemplo - Teorema da superposição



Anulando a fonte de tensão (circuito do lado esquerdo), temos

$$e_{I2} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} I$$

Anulando a fonte de corrente (circuito do lado direito), temos

$$e_{E2} = \frac{R_2}{R_2 + R_4} E$$

De forma mais simples, a solução do sistema é $e_2 = e_{I2} + e_{E2}$.

Teorema da reciprocidade

Considere um circuito resistivo linear e uma única fonte de tensão (corrente). Suponha que haja em um ramo qualquer um medidor ideal de corrente (tensão). A leitura do medidor não se altera quando sua posição é trocada com a da fonte ideal.

- Embora, neste momento, trataremos apenas de circuitos resistivos, ficará claro posteriormente, que o teorema é válido para qualquer circuito linear com condições iniciais nulas e apenas uma fonte independente.
- Ele se baseia na propriedade de simetria da matriz de admitância. Esta matriz deve permanecer a mesma quando ocorrer a troca de posição entre os ramos do medidor e da fonte.
- Como a matriz deve ser simétrica, o teorema não é válido, quando existirem fontes dependentes.

Teorema da reciprocidade

- Para assegurar que esta matriz não se modifique, é necessário que fontes de tensão em um circuito sejam substituídas por fontes de tensão no outro circuito e o mesmo ocorrer para as fontes de corrente.
- Os medidores de corrente, como são curto-circuitos, são fontes de tensão nula e os medidores de tensão, como são circuitos abertos, são fontes de corrente nula.

Demonstração : Por simplicidade, consideraremos a fonte de corrente entrando no nó p e saindo do nó de referência e um voltímetro ligado do nó q ao de referência. A equação de nós do circuito é dada por $\mathbf{Ye} = \mathbf{I_f}$ em que $\mathbf{I_f}$ terá um único elemento não nulo I localizado na linha p. A tensão no nó q será

$$e_q = \mathbf{Y}^{-1}(q,p)I$$

em que $\mathbf{Y}^{-1}(q,p)$ é o elemento da posição (q,p).

Passando a fonte de corrente para o nó q, a tensão no nó p será

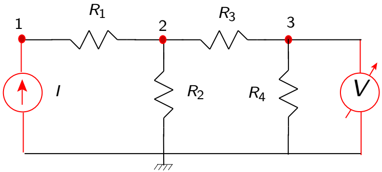
$$er_p = \mathbf{Y}^{-1}(p, q)I$$

em que er_p é a tensão do nó p após a troca. Como a matriz $\mathbf{Y}^{-1}$ é simétrica, $\mathbf{Y}^{-1}(q, p) = \mathbf{Y}^{-1}(p, q)$, então a tensão de nó e_q com fonte de corrente ligada ao nó p é igual à tensão er_p com a fonte ligada no nó q.

Embora a demonstração tenha sido feita para o caso em que o circuito apresenta uma fonte de corrente em um dos ramos e a medida da tensão em outro, ela pode ser generalizada para qualquer circuito contendo apenas uma fonte independente, sem fontes dependentes e, quando a substituição não modifica a matriz admitância. Os exemplos a seguir apresentam as várias formas de reciprocidade.

Teorema da reciprocidade

Exemplo : Mostre que o teorema é válido para o circuito apresentado a seguir



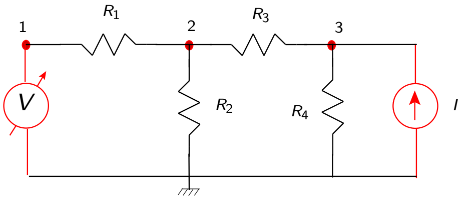
As equações de nós para o circuito são

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}) & -\frac{1}{R_3} \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & (\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a tensão no nó e_3 é

$$e_3 = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} I$$

Passando a fonte de corrente para o nó 3, temos



As equações de nós para o circuito são

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}) & -\frac{1}{R_3} \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & (\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} er_1 \\ er_2 \\ er_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

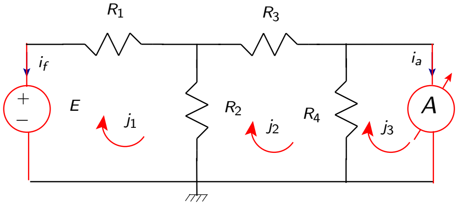
e a tensão no nó er_1 é

$$er_1 = \frac{R_2 R_4}{R_2+R_3+R_4} I$$

Verifica-se que $e_3 = er_1$.

Teorema da reciprocidade

Exemplo : Considere o circuito seguinte



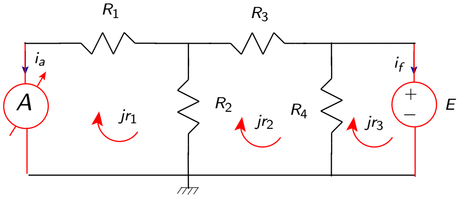
suas equações de malhas são

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a corrente i_a é

$$i_a = j_3 = \frac{R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}\, E$$

Trocando a posição do medidor e da fonte, temos



As equações de malhas para o circuito são

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} jr_1 \\ jr_2 \\ jr_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E \end{bmatrix}$$

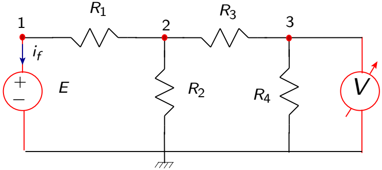
e a corrente i_a é

$$i_a = -jr_1 = \frac{R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}E$$

Logo, as correntes nos medidores em ambos os circuitos são iguais.

Teorema da reciprocidade

Exemplo : Considere o circuito a seguir



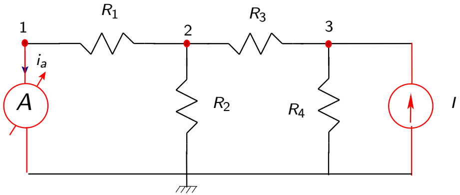
As equações de nós modificadas são

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_1} & (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}) & -\frac{1}{R_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & (\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}$$

e a tensão no nó 3 é

$$e_3 = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_4} E$$

Realizando as trocas de medidor e de fonte de outra natureza como apresentadas a seguir



as equações de nós modificadas são

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_1} & \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) & -\frac{1}{R_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_3} & \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ i_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}$$

e a corrente i_a é

$$i_a = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_4} I$$

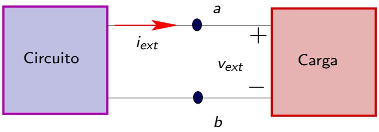
- Note que consideramos a troca da fonte de tensão E no primeiro circuito por um amperímetro (fonte de tensão nula) no segundo. Trocamos também o voltímetro (fonte de corrente nula) do primeiro circuito por uma fonte de corrente I no segundo. Desta forma, as fontes de tensão e correntes foram trocadas por medidores que representam fontes de tensão e correntes nulas, respectivamente, o que faz com que a matriz de admitância não seja alterada.
- Pelo motivo do item anterior a simples permutação entre medidores e fontes em um dos circuitos, como realizado nos exemplos anteriores, não seria possível neste exemplo.
- Mesmo assim, podemos observar que o ganho em tensão, no primeiro caso, é igual ao ganho em corrente no segundo.

Circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton

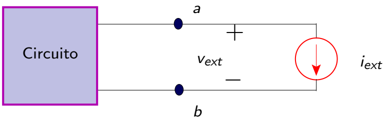
- Quando estamos interessados no comportamento entre dois terminais de um circuito elétrico, cuja análise pode ser bastante complexa, podemos substituí-lo por um circuito equivalente de Thévenin ou de Norton.
- O equivalente de Thévenin consiste simplesmente de uma fonte ideal de tensão V_{th} em série com um resistor R_{th}.
- O equivalente de Norton consiste simplesmente de uma fonte ideal de corrente I_n em paralelo com um resistor R_{th}.
- A fonte de tensão V_{th} deve ter tensão igual à tensão em aberto do circuito original (com os terminais em aberto).
- A fonte de corrente I_n deve ter corrente igual à corrente em curto-circuito do circuito original (com os terminais em curto).
- A resistência de Thévenin deve ser igual ao quociente $R_{th} = V_{th}/In$.

Demonstração da equivalência

Dado um circuito conectado a uma carga, deseja-se substituí-lo pelo seu equivalente de Thévenin.



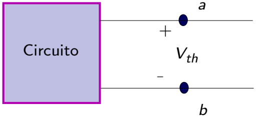
De acordo com o teorema da substituição podemos substituir a corrente i_{ext} por uma fonte independente i_{ext} sem modificação das demais variáveis do circuito.

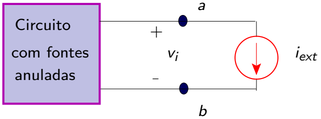


Demonstração da equivalência

De acordo com o teorema da superposição, v_{ext} é obtido :

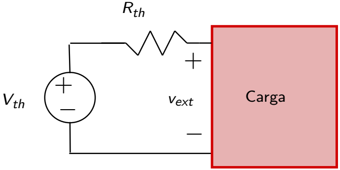
- calculando V_{th} para a fonte i_{ext} em aberto.
- calculando v_i com todas as fontes do circuito anuladas.
- somando ambas as tensões $v_{ext} = V_{th} + v_i$.





A tensão v_i é proporcional a i_{ext}, $v_i = -R_{th} i_{ext}$ e, portanto,

$$v_{ext} = V_{th} - R_{th} i_{ext}$$



O circuito original é simplificado ! !

Demonstração da equivalência

Para demonstrar o teorema de Norton, basta seguir os mesmos passos mas procedendo de forma dual. A corrente externa será

$$i_{ext} = I_n - \frac{v_{ext}}{R_{th}}$$

Comparando esta equação com a obtida anteriormente, temos

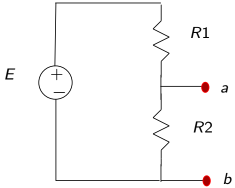
$$R_{th} = \frac{V_{th}}{I_n}$$

R_{th} também pode ser calculada anulando-se todas as fontes independentes do circuito e substituindo a carga por uma fonte independente, de corrente ou de tensão. O quociente entre a tensão e a corrente sobre a fonte adicionada fornecerá R_{th}.

Se o circuito não contiver fontes dependentes, a resistência R_{th} é igual à resistência equivalente, vista pelos terminais em consideração, anulando-se todas as fontes independentes.

Exemplo - Equivalente de Thévenin e Norton

Exemplo : Determine o equivalente de Thévenin visto pelos terminais *a* e *b* do divisor de tensão apresentado a seguir.



Para calcular V_{th}, consideramos os terminais *a*, *b* em aberto, calculando a tensão sobre eles (com a polaridade positiva em *a*) :

$$V_{th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

Exemplo - Equivalente de Thévenin e Norton

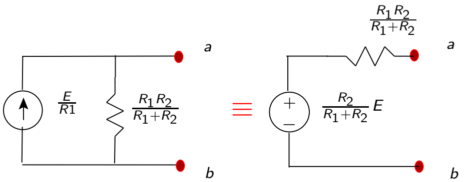
Para calcular a corrente Norton, realizamos um curto nos terminais e calculamos a corrente de curto (saindo do terminal a para b) :

$$I_n = \frac{E}{R_1}$$

A resistência de Thévenin é aquela vista pelos terminais, quando a fonte é anulada.

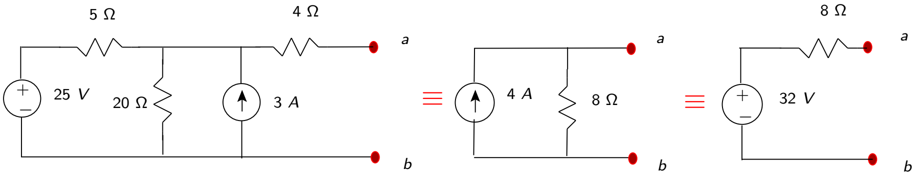
$$R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Note que ela é a mesma obtida do quociente V_{th}/I_n.



Exemplo - Equivalente de Thévenin e Norton

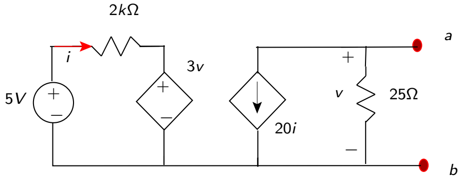
Vale lembrar que para circuitos simples podemos obter o equivalente de Thévenin e de Norton realizando transformações sucessivas de fontes.



Mostre que a equivalência acima é válida, realizando o procedimento anterior e também, através de transformações sucessivas de fontes.

Exemplo - Equivalente de Thévenin e Norton

Exemplo : Para o circuito com fonte dependente apresentado a seguir, determine seu equivalente de Thévenin e de Norton.



Aplicando a Lei de Kirchhoff na primeira malha, temos

$$5 - 2000i - 3v = 0$$

e, da segunda malha

$$v = -25 \times 20 \times i$$

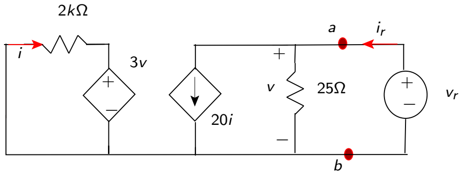
Combinando ambas as equações, obtemos $v = V_{th} = -5\ [V]$.

Exemplo - Equivalente de Thévenin e Norton

Para calcular a corrente de Norton, realizamos um curto-circuito nos terminais e calculamos a corrente de curto (saindo do terminal a para b). Esta corrente $I_n = -20 \times i$ é determinada levando em conta a primeira malha em que $i = 5/2000$ pois $v = 0$. Temos, portanto $I_n = -50\ [\mathrm{mA}]$.

A resistência de Thévenin é dada por $R_{th} = V_{th}/I_n = 100\ \Omega$.

Ela também poderia ser calculada anulando-se a fonte de 5 $[V]$ e acrescentando uma adicional entre os terminais a, b como mostrado a seguir



Exemplo - Equivalente de Thévenin e Norton

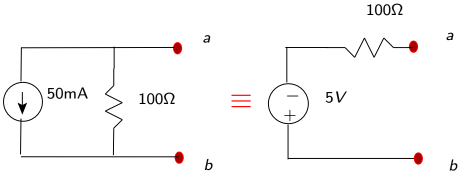
No circuito anterior, da segunda malha, a corrente i_r é dada por

$$i_r = \frac{v_r}{25} + 20i$$

Da primeira malha $i = -(3/2)v_r$ $[\mathrm{mA}]$. Logo, temos

$$i_r = \frac{v_r}{25} - \frac{60}{2000}v_r \Longrightarrow \frac{i_r}{v_r} = \frac{1}{25} - \frac{6}{200} = \frac{1}{100}$$

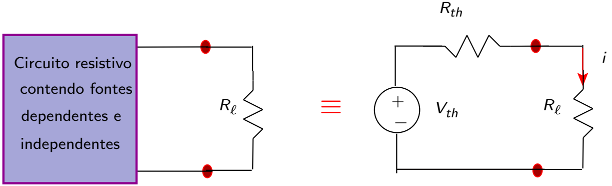
Logo $R_{th} = 100$ $[\Omega]$ como obtido anteriormente.



Máxima transferência de potência

Um dos objetivos na análise de um circuito elétrico é a transferência de potência para uma carga. Basicamente, estuda-se dois pontos : 1.) a eficiência na transferência de potência, de forma a não desperdiçar energia, e 2.) qual a potência máxima que pode ser transferida. A seguir, estudaremos o segundo ponto para sistemas que podem ser modelados como circuitos puramente resistivos.

Para este estudo vamos considerar o circuito abaixo, em que o objetivo é determinar o valor da carga R_ℓ para obter máxima potência.



Máxima transferência de potência

A potência dissipada em R_ℓ é a seguinte

$$p = i^2 R_\ell = \left(\frac{V_{th}}{R_\ell + R_{th}} \right)^2 R_\ell$$

seu valor máximo é determinado através derivada

$$\frac{dp}{dR_\ell} = V_{th}^2 \left(\frac{(R_{th} + R_\ell)^2 - 2R_\ell(R_{th} + R_\ell)}{(R_{th} + R_\ell)^4} \right)$$

A derivada é nula e p é máxima quando

$$(R_{th} + R_\ell)^2 = 2R_\ell(R_{th} + R_\ell)$$

o nos fornece $R_\ell = R_{th}$.

Substituindo este valor na equação da potência, temos

$$p_{max} = \frac{V_{th}^2 R_{th}}{(2R_{th})^2} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}}$$

Máxima transferência de potência

Logo a máxima transferência de potência ocorre para

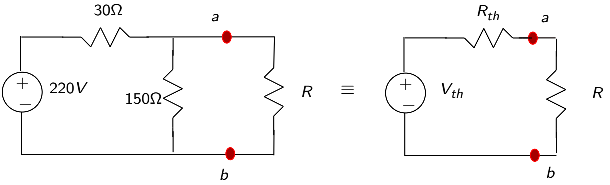
$$R_\ell = R_{th}$$

e seu valor é

$$p_{max} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}}$$

Exemplo : Para o circuito a seguir : 1.) Determine o valor de R que resulta em potência máxima. 2.) Calcule o valor da potência máxima fornecida a R. 3.) Quando R é ajustado para a máxima potência, qual porcentagem de potência fornecida pela fonte chega a R?

Máxima transferência de potência



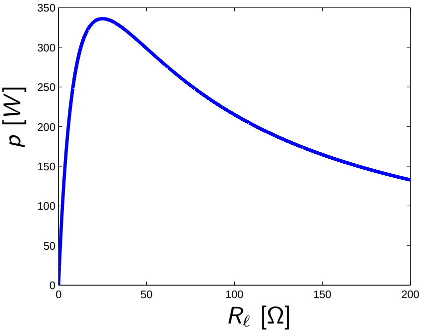
- O valor de R que resulta em potência máxima é

$$R = R_{th} = \frac{30 \times 150}{30 + 150} = 25\ [\Omega]$$

e a tensão de Thévenin à esquerda dos terminais é

$$V_{th} = \frac{220}{180}(150) = 183.33\ [V]$$

O gráfico a seguir apresenta o comportamento da potência fornecida p em função da resistência da carga R_ℓ



- Como verificado no gráfico, a potência máxima fornecida à carga é a seguinte

$$p_{max} = \frac{183.33^2}{4 \times 25} = 336.11\ [W]$$

Máxima transferência de potência

- Quando $R = 25$ $[\Omega]$, a tensão v_{ab} é

$$v_{ab} = \left(\frac{183.33}{50}\right)(25) = 91.66 \; [V]$$

e a corrente na fonte de tensão é dada por

$$i_f = \frac{220 - 91.66}{30} = 4.278 \; [A]$$

Portanto, a fonte fornece

$$p_f = -220 \times 4.278 = -941.16 \; [W]$$

sendo que

$$\frac{336.11}{941.16} \times 100 = 35.71\%$$

de potência da fonte é fornecida à carga R.