Eletricidade Aplicada

Profa. Grace S. Deaecto

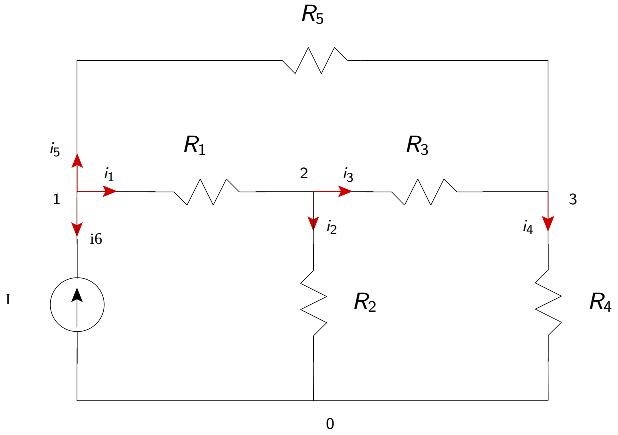
Instituto de Ciência e Tecnologia / UNIFESP
12231-280, São J. dos Campos, SP, Brasil.
grace.deaecto@unifesp.br

Novembro, 2012

1. Leis de Kirchhoff - Métodos de nós e de malhas
   - Método de nós
   - Método de nós para bipolos não-lineares
   - Método de nós modificado
   - Circuitos com fontes vinculadas
   - Método de malhas
   - Dualidade
   - Simplificação de circuitos

Método de Nós

Para apresentação do método de nós consideraremos o circuito resistivo apresentado a seguir.



Lei de Kirchhoff das correntes

A soma algébrica das correntes em cada nó é nula, sendo atribuído o sinal positivo às correntes que saem do nó e o negativo às correntes que entram.

- O circuito de interesse possui 4 nós, sendo que suas correntes obedecem às seguintes equações

$$\begin{aligned} \text{nó } 1: \quad i_1 + i_5 + i_6 &= 0 \\ \text{nó } 2: \; -i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ \text{nó } 3: \; -i_3 + i_4 - i_5 &= 0 \\ \text{nó } 0: \; -i_2 - i_4 - i_6 &= 0 \end{aligned}$$

- Note que estas equações não são independentes (qualquer corrente de bipolo sai de um nó e entra em outro).
- Um circuito conexo com n nós, possui $n-1$ equações independentes.

Tensão de nó

Escolhendo um dos nós como sendo o de referência (ou terra) em um circuito com n nós, as tensões de nós são as tensões entre os $n-1$ nós e o nó de referência. A tensão do nó de referência é, por definição, nula.

Lei de Kirchhoff das tensões

A tensão entre os terminais de cada bipolo é a diferença entre a tensão do nó ao qual está ligado o terminal positivo e a tensão do nó ao qual está ligado o terminal negativo.

- Denotando v_i como tensão no bipolo $i \in \{1, \cdots, 5\}$ e e_j como tensão no nó $j \in \{0, \cdots, 3\}$ e adotando o nó 0 como o de referência, podemos escrever as seguintes equações

$$\begin{aligned}
v_1 &= e_1 - e_2 \\
v_2 &= e_2 \\
v_3 &= e_2 - e_3 \\
v_4 &= e_3 \\
v_5 &= e_1 - e_3 \\
v_6 &= e_1
\end{aligned}$$

- Note que em um circuito com b bipolos e n nós, suas b equações independentes possuem $b + n - 1$ variáveis, sendo b tensões de bipolos e $n - 1$ tensões de nós.
- Como as tensões de bipolos são escritas em função das tensões de nós, temos $n - 1$ tensões independentes.

Contagem do número de variáveis e equações

	Variáveis	Equações
L. Correntes	b	$n-1$
L. Tensões	$b+n-1$	b
Total	$2b+n-1$	$b+n-1$

- Note que necessitamos de mais b equações para obter solução única. Estas b equações seguem da Lei de Ohm em cada bipolo. No caso do exemplo considerado, temos

$$\begin{aligned} i_1 &= v_1/R_1 \\ i_2 &= v_2/R_2 \\ i_3 &= v_3/R_3 \\ i_4 &= v_4/R_4 \\ i_5 &= v_5/R_5 \\ i_6 &= -I \end{aligned}$$

Note que para exprimir as correntes em função das tensões, os bipolos devem ser controlados por tensão.

O circuito não pode conter fontes ideais de tensão.

Método de nós

Utilizando as equações obtidas das Leis de Kirchhoff (lembrando que a equação de corrente para o nó 0 deve ser descartada) e aquelas obtidas da Lei de Ohm, podemos escrever o sistema

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}\right) & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_1} & \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_3} & \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- A forma matricial das equações de nós é dada por $\mathbf{Ye} = \mathbf{I_f}$, sendo $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ a matriz admitância, $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times 1}$ o vetor de tensões de nós e $\mathbf{I_f} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times 1}$ o vetor das fontes de corrente independentes.
- A matriz $\mathbf{Y}$ é simétrica.
- O sistema pode ser obtido por inspeção.

Método de nós

- O elemento y_{kk} da diagonal principal é a soma de todas as condutâncias ligadas ao nó k.
- Os elementos iguais y_{kj} e y_{jk} são iguais a soma das condutâncias entre os nós k e j com o sinal negativo.
- O elemento I_k é a soma de todas as fontes de correntes ligadas ao nó k com sinal positivo se apontam na direção do nó ou negativo, caso contrário.

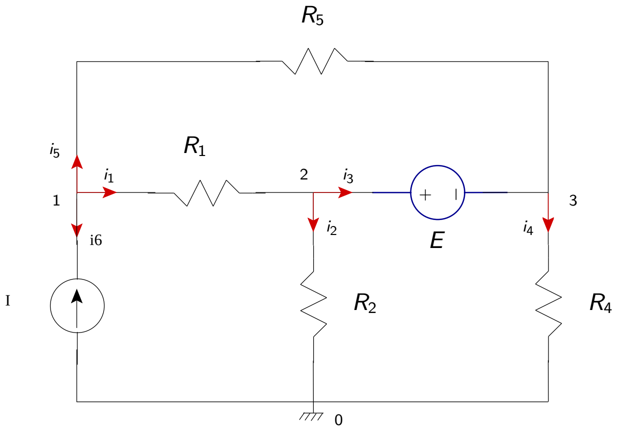
Método de nós para bipolos não-lineares

- O método é aplicável mesmo que um dos bipolos seja não-linear e desde que controlado por tensão.
- Supondo que o bipolo 3 seja não-linear e que sua corrente seja expressa por $i_3 = f(v_3) = f(e_2 - e_3)$, as equações ficam

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5}\right)e_1 - \frac{1}{R_1}e_2 - \frac{1}{R_5}e_3 &= I \\
-\frac{1}{R_1}e_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)e_2 + f(e_2 - e_3) &= 0 \\
-\frac{1}{R_5}e_1 + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)e_3 - f(e_2 - e_3) &= 0
\end{aligned}
$$

Método de nós modificado

O método de nós modificado é aplicado quando o circuito possui bipolos não controlados por tensão, como o circuito seguinte com uma fonte ideal de tensão.



Método de nós modificado

As correntes para os nós 1, 2 e 3 já expressas em termos das tensões de nós são

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}\right)e_1-\frac{1}{R_1}e_2-\frac{1}{R_5}e_3 &= I\\
-\frac{1}{R_1}e_1+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)e_2+i_3 &= 0\\
-\frac{1}{R_5}e_1+\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)e_3-i_3 &= 0
\end{aligned}$$

Note que temos uma variável adicional i_3 e, portanto, uma equação adicional deve ser incluída. Ela é dada por

$$e_2-e_3=E$$

Método de nós modificado

O sistema de equações obtido é o seguinte

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}\right) & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_5} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) & 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & \left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right) & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}$$

- A matriz de admitância **Y** continua simétrica.
- Se a fonte de tensão E for nula caracterizando um curto circuito, a corrente de curto circuito i_3 poderia ser calculada sem grandes dificuldades.
- Este método pode ser utilizado para a obtenção de uma corrente qualquer, desde que a equação adicional seja aquela que descreva, em função das tensões de nós, o ramo da corrente desejada.

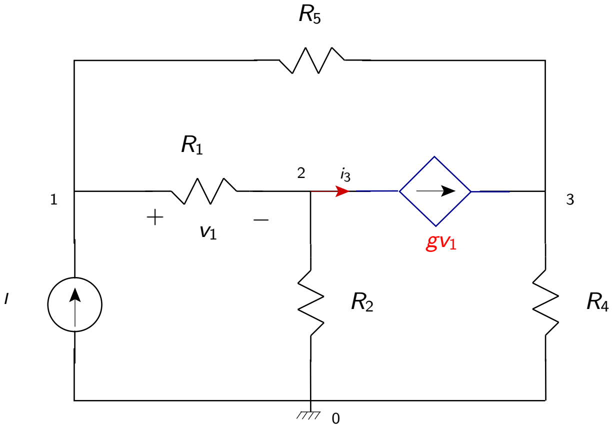
Circuitos com fontes vinculadas

Para circuitos com fontes vinculadas utilizamos normalmente o método de nós modificados, já que algumas correntes conhecidas como correntes essenciais não podem ser eliminadas. As correntes essenciais são :

- As correntes que passam através das fontes de tensão vinculadas se existirem.
- As correntes às quais são vinculadas fontes vinculadas a correntes.

Fonte de corrente vinculada à tensão

O circuito a seguir possui uma fonte de corrente vinculada a tensão.



Fonte de corrente vinculada à tensão

- Neste caso resolve-se o circuito desprezando a fonte vinculada (abrindo o circuito na posição da fonte), obtendo

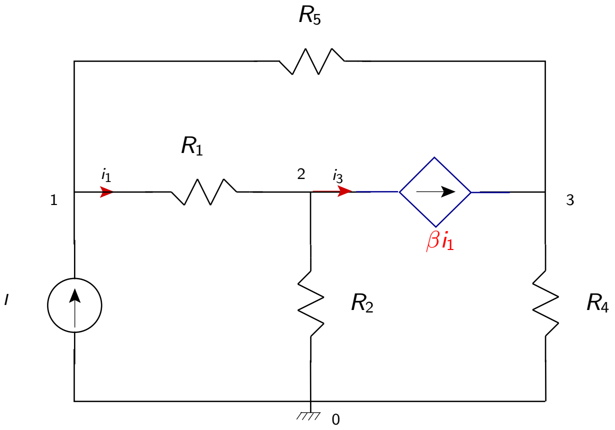
$$\begin{bmatrix} (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}) & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_1} & (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}) & 0 \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & (\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- A fonte está localizada entre os nós 2 e 3 e altera as equações de correntes nestes nós. Logo, nestas linhas, a matriz admitância deve ser modificada considerando que $i_3 = gv_1 = g(e_1 - e_2)$, o sistema torna-se

$$\begin{bmatrix} (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_5}) & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_1}+g & (\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})-g & 0 \\ -\frac{1}{R_5}-g & g & (\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fonte de corrente vinculada à corrente

Um circuito com fonte de corrente vinculada à corrente é dado a seguir.



Fonte de corrente vinculada à corrente

- Neste caso encontra-se o sistema de equações desprezando a fonte vinculada e explicitando a corrente de vínculo com a equação adicional $e_1 - e_2 - R_1 i_1 = 0$, obtendo

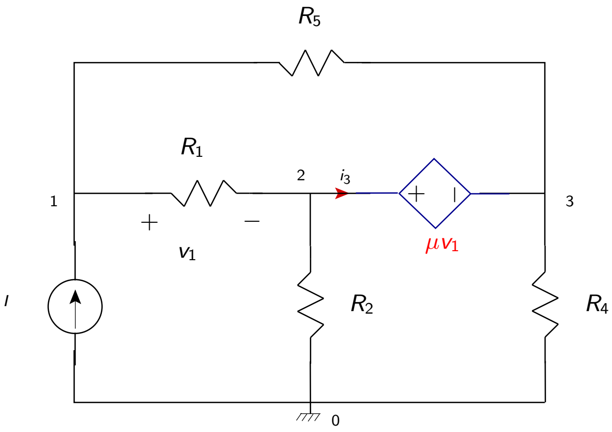
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_5} & 0 & -\frac{1}{R_5} & 1 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Como a fonte está entre os nós 2 e 3, a matriz admitância sobre alteração nestas linhas acrescentando βi_1 na linha 2 e $-\beta i_1$ em 3, obtendo

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_5} & 0 & -\frac{1}{R_5} & 1 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & -1 + \beta \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) & -\beta \\ 1 & -1 & 0 & -R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fonte de tensão vinculada à tensão

O circuito contendo este tipo de fonte de tensão é dado a seguir



Fonte de tensão vinculada à tensão

- Como a corrente que passa através da fonte vinculada é essencial, encontra-se o sistema de equações explicitando esta corrente.
- A equação adicional é onde ocorre o vínculo, sendo dada por

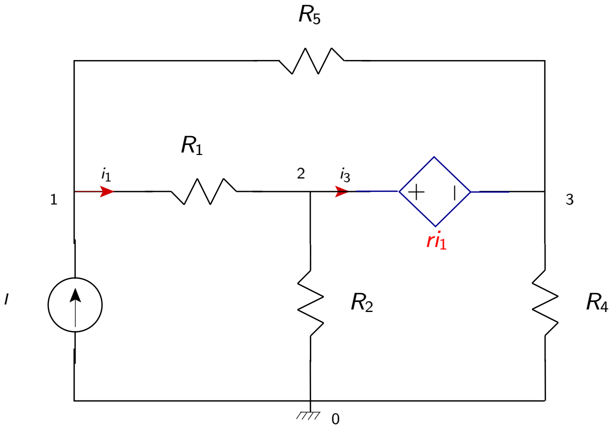
$$e_2 - e_3 - \mu(e_1 - e_2) = 0$$

- O sistema de equações é o seguinte

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5}\right) & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_5} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & 0 & 1 \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) & -1 \\ -\mu & (1+\mu) & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fonte de tensão vinculada à corrente

O circuito a seguir apresenta este tipo de fonte



Fonte de tensão vinculada a corrente

Para o circuito em questão, utiliza-se o método de nós modificados explicitando as correntes i_1 e i_3. As equações adicionais são

$$e_1 - e_2 - R_1 i_1 = 0$$

relacionada ao bipolo onde passa a corrente i_1 e a equação de vínculo

$$e_2 - e_3 - r i_1 = 0$$

relacionada ao bipolo onde passa a corrente i_3. O sistema de equações é o seguinte

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_5} & 0 & -\frac{1}{R_5} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{R_5} & 0 & \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -R_1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ i_1 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comentários

- Como já mencionado, as fontes vinculadas não representam entradas externas no sistema. Elas alteram a matriz admitância $\mathbf{Y}$ dos mesmos e não interferem nas entradas $\mathbf{I_f}$

- A matriz admitância $\mathbf{Y}$ de um sistema com fontes vinculadas **deixa de ser simétrica**.

Método de malhas : Algumas definições

Circuitos planares

Circuitos que podem ser representados em um plano sem que haja cruzamento de ramos.

Malhas

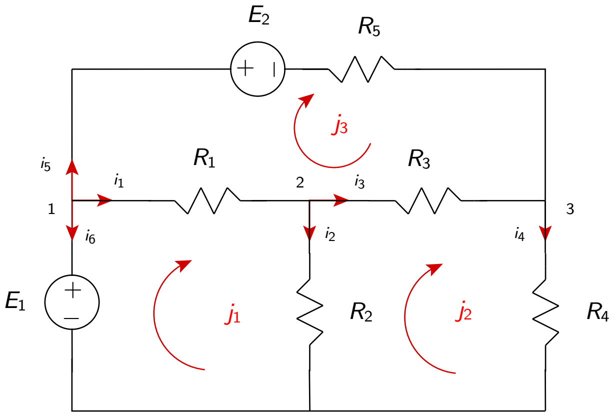
São laços que não contêm bipolos no seu interior.

Correntes de malhas

São correntes fictícias existentes somente no perímetro da malha. Seu sentido é o mesmo sentido de percurso da malha quando se escreve a respectiva equação de tensões.

Método de malhas

Para apresentação do método de malhas consideraremos o circuito resistivo apresentado a seguir.



Método de malhas

- O método de malhas somente é aplicável para circuitos planos.
- O número de malhas em um circuito plano conexo é dado por $b-(n-1)$.

Lei das tensões em formulação alternativa

A soma das tensões dos bipolos que formam uma malha é igual a zero se, escolhido o sentido de percurso, considerar-se tensões positivas as que concordarem com o sentido adotado e negativas as que discordarem.

- Através do método de Kirchhoff obtém-se equações de tensões descritas para $b-(n-1)$ malhas expressas em função das correntes de bipolos, que, por sua vez, são expressas em função das $b-(n-1)$ correntes de malhas.

Método de Malhas

- O circuito de interesse possui 3 malhas. Utilizando a Lei de Kirchhoff, temos

$$
\begin{aligned}
\text{malha 1}: \quad & E_1 - R_1 i_1 - R_2 i_2 = 0 \\
\text{malha 2}: \quad & R_2 i_2 - R_3 i_3 - R_4 i_4 = 0 \\
\text{malha 3}: \quad & R_1 i_1 - E_2 - R_5 i_5 + R_3 i_3 = 0
\end{aligned}
$$

- A relação entre as correntes de malhas e as de bipolos é a seguinte

$$
\begin{aligned}
i_1 &= j_1 - j_3 \\
i_2 &= j_1 - j_2 \\
i_3 &= j_2 - j_3 \\
i_4 &= j_2 \\
i_5 &= j_3 \\
i_6 &= -j_1
\end{aligned}
$$

Método de Malhas

- Relacionando ambos os conjuntos de equações, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_1 & -R_3 & R_1 + R_3 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ -E_2 \end{bmatrix}$$

- Na forma matricial, as equações de malhas são representadas por $\mathbf{Zj} = \mathbf{E_f}$ sendo $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{b-(n-1)\times b-(n-1)}$ a matriz impedância, $\mathbf{j} \in \mathbb{R}^{b-(n-1)\times 1}$ o vetor das correntes de malhas e $\mathbf{E_f} \in \mathbb{R}^{b-(n-1)\times 1}$ o vetor das fontes de tensão independentes.
- A matriz $\mathbf{Z}$ é simétrica e diagonal dominante.
- O sistema pode ser obtido por inspeção.

Método de malhas

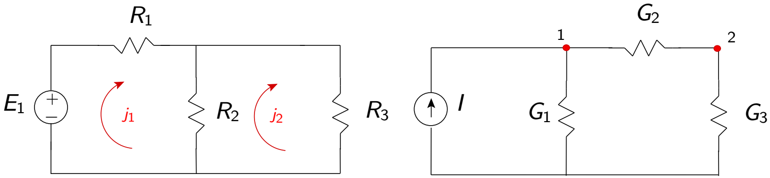
Considerando que as correntes de malhas circulam no mesmo sentido (por exemplo, horário), temos :

- O elemento z_{kk} da diagonal principal é a soma de todas as resistências que compõem a malha k.
- Os elementos iguais z_{kj} e z_{jk} são iguais a soma das resistências, com o sinal negativo, que pertencem simultaneamente às malhas j e k.
- O elemento E_k é a soma de todas as fontes de tensão da malha k obedecendo o sentido de percurso, positivo se concordar com o sentido adotado e negativo caso contrário.

Comentários

- O método de malhas é conveniente na análise de circuitos pequenos formados por fontes de tensão. Entretanto, comparado ao de nós, possui a desvantagem de ser restrito aos circuitos planos.
- Como no método de nós, o método de malhas pode ser modificado de forma a incluir entre as incógnitas algumas tensões, tornando possível a análise de circuitos com fontes de corrente ideais.
- Fontes vinculadas também podem ser incluídas, o que tornam a matriz de impedância $\mathbf{Z}$ assimétrica.
- Em ambos os casos, no método de nós e no de malhas, as simplificações nos circuitos podem facilitar sua análise.

Dualidade



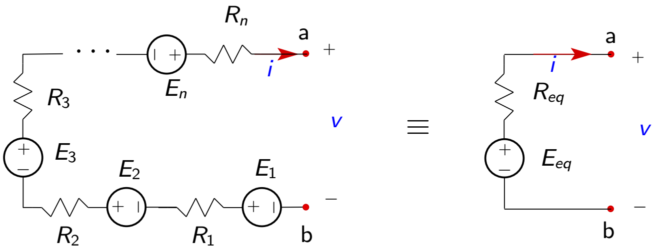
- Considerando apenas circuitos planos conexos as equações matriciais
$$\mathbf{Zj} = \mathbf{E_f} \quad \text{e} \quad \mathbf{Ye} = \mathbf{I_f}$$
são duais pois só diferem pelo nome das grandezas envolvidas.
- Pares de circuitos cuja equação de nós de um é idêntica à equação de malhas do outro são chamados de duais.
- Os circuitos da figura são duais.

Simplificação de circuitos

Para facilitar a análise de circuitos elétricos podemos recorrer a algumas transformações tais como :

- Realizar a associação em série ou em paralelo de bipolos, substituindo os mesmos por um único bipolo equivalente.
- Realizar a equivalência estrela-triângulo.
- Realizar a transformação de fontes : fontes de tensão para fontes de corrente e vice-versa.
- Realizar o deslocamento de fontes.

Associação de bipolos em série



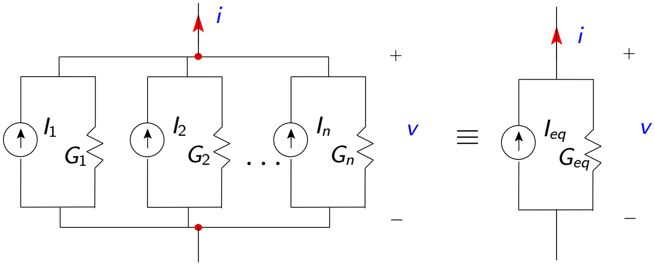
- Bipolos em série : A corrente i que passa por todos eles é a mesma.
- Note que aplicando a lei de Kirchhoff das tensões, temos

$$v = E_{eq} - R_{eq} i, \quad \text{com}$$

$$E_{eq} = \sum_{i=1}^{n} E_i \quad , \quad R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

- Logo os n bipolos em série podem ser substituídos por um único bipolo equivalente.

Associação de bipolos em paralelo



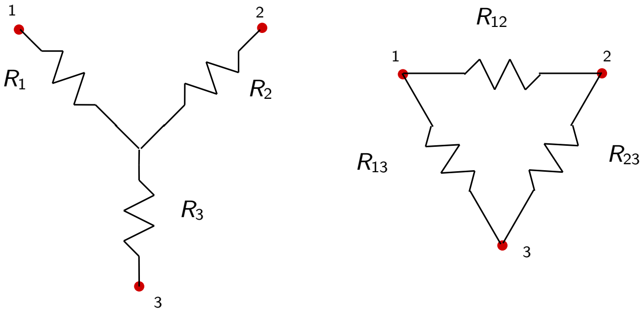
- Bipolos em paralelo : A tensão v sobre todos eles é a mesma.
- Note que aplicando a lei de Kirchhoff das correntes, temos

$$i = I_{eq} - G_{eq} v, \quad \text{com}$$

$$I_{eq} = \sum_{i=1}^{n} I_i \quad , \quad G_{eq} = \sum_{i=1}^{n} G_i$$

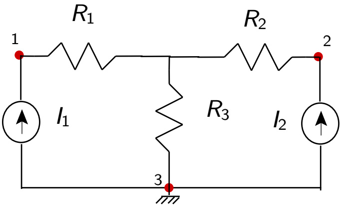
- Logo os n bipolos em paralelo podem ser substituídos por um único bipolo equivalente.

Equivalência estrela-triângulo

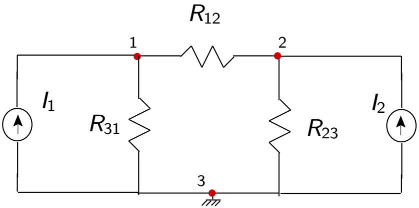


- Muitas vezes é conveniente substituir uma ligação Y por uma ligação Δ equivalente ou vice-versa.
- Para encontrar a equivalência ligam-se duas fontes de corrente quaisquer aos nós de mesmo nome das associações.

Equivalência estrela-triângulo



$$\begin{bmatrix} E_{13} \\ E_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{31}} & -\frac{1}{R_{12}} \\ -\frac{1}{R_{12}} & \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{13} \\ E_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Equivalência estrela-triângulo

A condição de equivalência entre as associações é dada por

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{31}} & -\frac{1}{R_{12}} \\ -\frac{1}{R_{12}} & \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} \end{bmatrix}$$

ou de $Y \to \Delta$, temos

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3} \\ R_{23} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1} \\ R_{31} &= \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2} \end{aligned}$$

Equivalência estrela-triângulo

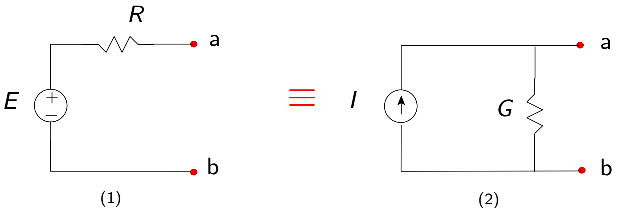
De $\Delta \rightarrow Y$ temos

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{aligned}$$

Se as três resistências forem iguais $R_1 = R_2 = R_3 = R_Y$, temos

$$R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_\Delta = 3R_Y$$

Transformação de fontes



Uma fonte de tensão em série com um resistor pode ser substituída por uma fonte de corrente em paralelo com o mesmo resistor ou vice-versa.

- A relação entre E e I é obtida conectando um resistor R_L entre os pontos a e b. Nas duas configurações o resistor deve sofrer o mesmo fluxo de corrente e, portanto, a mesma queda de tensão.

Transformação de fontes

- Para a configuração (1) a corrente é dada por

$$i_L = \frac{E}{R + R_L}$$

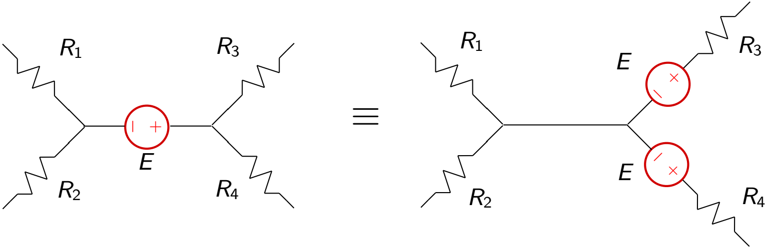
- Para a configuração (2) a corrente é dada por

$$i_L = \frac{R}{R + R_L} I$$

- Igualando ambas as equações temos que a relação é

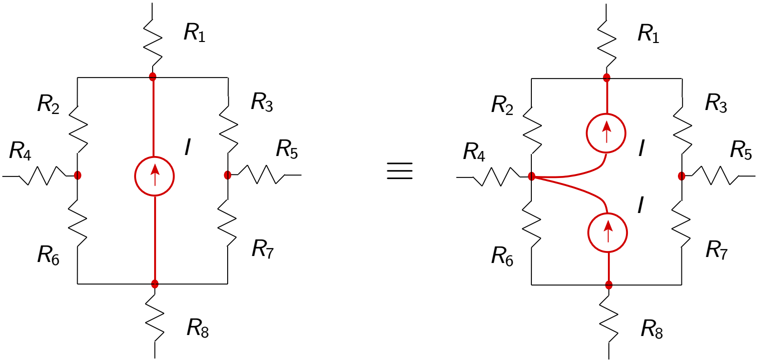
$$I = \frac{E}{R}$$

Deslocamento de fonte de tensão



O deslocamento de uma fonte ideal de tensão colocando-a em série com os bipolos das malhas subsequentes (precedentes) e deixando o ramo onde ela estava em curto, não altera as equações do circuito

Deslocamento de fonte de corrente



O deslocamento de uma fonte ideal de corrente colocando-a em paralelo com os nós subsequentes (precedentes) e deixando o ramo onde ela estava em aberto, não altera as equações do circuito