

# PRINCÍPIOS DE CONTROLE E SERVOMECANISMO

**JOSÉ C. GEROMEL e RUBENS H. KOROGUI**

DSCE / Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
UNICAMP, CP 6101, 13083 - 970, Campinas, SP, Brasil,  
geromel@dsce.fee.unicamp.br

Campinas, Janeiro de 2007

## NOTA AO LEITOR

- Este material foi preparado como suporte às aulas e é inteiramente baseado no livro texto, em fase de redação :
  - José C. Geromel e Rubens H. Korogui, *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos : Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios*, 2007.

onde o leitor deverá encontrar maiores informações e detalhes a respeito dos tópicos aqui abordados. Sugestões, de qualquer natureza, que permitam o aprimoramento deste texto serão muito apreciadas e desde já agradecidas.

# Conteúdo

- 1 Capítulo I - Fundamentos de Sistemas de Controle
  - Modelagem matemática e perspectivas
    - Perspectivas
    - Motor de corrente contínua
    - Pêndulo invertido
  - Sistemas de controle com realimentação
    - Estrutura básica
    - Função de transferência
    - Sensibilidade
    - Critérios de desempenho
  - Classes de controladores e discretização
    - Classes de controladores
    - Discretização
    - Exemplo







# Motor de corrente contínua

- O modelo matemático, estudado anteriormente pode ser obtido na forma :
  - **Parte elétrica:** Com a fonte de tensão  $V$  temos :

$$L \frac{d}{dt} i + Ri = V - K \frac{d}{dt} \phi$$

- **Parte mecânica:** O motor gera um torque  $T_{tot} = Ki$  que é transferido à carga através do rotor. Portanto

$$J_m \frac{d^2}{dt^2} \phi + Fr_m = T_{tot} , \quad J_c \frac{d^2}{dt^2} \theta + b \frac{d}{dt} \theta = Fr_c$$

e a partir da relação  $r_m \phi = r_c \theta$ , com  $c = r_c / r_m$  obtemos

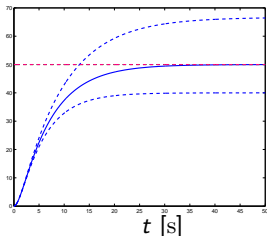
$$(J_c + J_m c^2) \ddot{\theta} + b \dot{\theta} = cKi$$





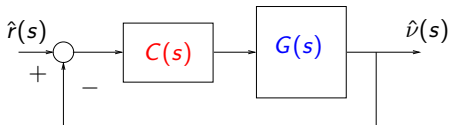
# Motor de corrente contínua

- A figura abaixo mostra a evolução no tempo da velocidade angular da carga  $\nu(t)$  [rad/s] a partir de condições iniciais nulas e  $b = 1.0$  [Nms/rad]. Note que  $\nu_{perm} = 50$  [rad/s]. Para valores **diversos de  $b = \{0.5, 1.5\}$**  a velocidade de regime se **altera**. Para mantê-la inalterada é preciso conhecer exatamente o valor do coeficiente de atrito e recalculer a tensão de entrada  $V_0$  !!! Esta estrutura de controle é conhecida como **controle em malha aberta**.



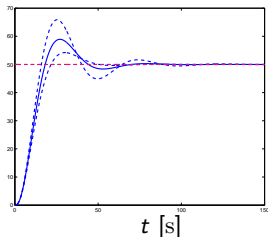
# Motor de corrente contínua

- O controle da velocidade angular da carga em regime permanente de forma independente dos parâmetros do sistema em estudo pode ser feita (estudaremos em seguida suas limitações e vantagens) através da seguinte estrutura de controle denominada **controle em malha fechada** :
  - $r(t) = 50$  [rad/s] ,  $\forall t \geq 0$  é o sinal de referência.
  - $C(s)$  é a função de transferência do controlador. Adotamos  $C(s) = 0.25/s$ . Portanto, neste caso, o controlador gera um sinal que é proporcional à integral do erro entre  $r(t)$  e  $v(t)$ .



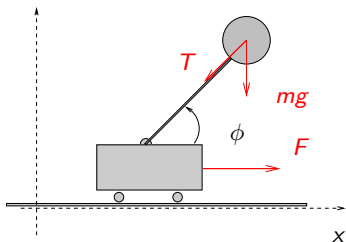
# Motor de corrente contínua

- A figura abaixo mostra a evolução no tempo da velocidade angular da carga  $\nu(t)$  [rad/s] a partir de condições iniciais nulas e  $b = 1.0$  [Nms/rad]. Note que  $\nu_{perm} = 50$  [rad/s]. Para valores **diversos de  $b = \{0.5, 1.5\}$**  a velocidade de regime **não se altera**. A especificação é atendida mesmo quando o coeficiente de atrito varia. Observe que, como consequência da variação de  $b$ , o transitório se modifica.



# Pêndulo invertido

- A figura abaixo mostra um pêndulo invertido com massa  $m$  e comprimento  $l$  montado sobre um carro com massa  $M$ . O sistema está imerso em um meio isento de atrito. Deseja-se levantar o pêndulo para a **posição vertical**  $\phi_0 = +90^\circ$ , movimentando o carro através da aplicação da força horizontal  $F$ . O carro deve retornar para a sua **posição original**  $x = 0$ .



# Pêndulo invertido

- Aplicando o Princípio de D'Alembert determinamos:
  - Carro na direção horizontal

$$M \frac{d^2}{dt^2} x = T \cos(\phi) + F$$

- Pêndulo na direção horizontal

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \cos(\phi)) + T \cos(\phi) = 0$$

- Pêndulo na direção vertical

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \sin(\phi)) + T \sin(\phi) + mg = 0$$

Eliminando  $T$  obtemos as equações diferenciais que descrevem o deslocamento horizontal do carro  $x(t)$  e o deslocamento angular do pêndulo  $\phi(t)$ , para todo  $t \geq 0$ .

# Pêndulo invertido

- Obtemos assim duas equações diferenciais não lineares:
  - Deslocamento horizontal do carro

$$(M + m)\ddot{x} - ml\text{sen}(\phi)\ddot{\phi} - ml\text{cos}(\phi)\dot{\phi}^2 = F$$

- Deslocamento angular do pêndulo

$$l\ddot{\phi} - \text{sen}(\phi)\ddot{x} + g\text{cos}(\phi) = 0$$

que podem ser linearizadas no ponto de interesse dado por  $(x_0, \phi_0) = (0, +90^\circ)$ . Definindo  $\theta(t) = \phi(t) - \phi_0$  obtemos:

$$(M + m)\ddot{x} - ml\ddot{\theta} = F$$

$$l\ddot{\theta} - \ddot{x} - g\theta = 0$$

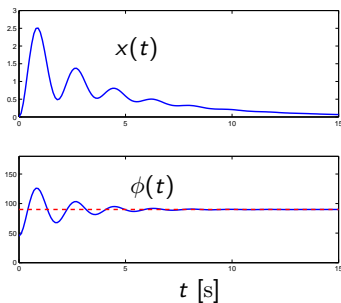
# Pêndulo invertido

- Trata-se de um sistema **instável**. Por exemplo, se em  $t = 0$  o pêndulo e o carro estiverem parados mas com o pêndulo ligeiramente **fora da vertical**, se o carro permanecer parado o **pêndulo cai**. Determinar a força  $F(t)$  para todo  $t \geq 0$  capaz de equilibrar o pêndulo não é uma tarefa simples (**controle em malha aberta**).
- Considerando  $M = 10$  [Kg],  $m = 2$  [Kg],  $\ell = 1$  [m] e  $g = 9.8$  [m/s<sup>2</sup>], elaboramos a seguinte estratégia de **controle em malha fechada** assumindo que as todas as variáveis de estado, a saber,  $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$  estejam disponíveis, isto é, sejam medidas para todo  $t \geq 0$ :

$$F(t) = 10x(t) + 50\dot{x}(t) - 300 \underbrace{\theta(t)}_{\phi(t) - \pi/2} - 100 \underbrace{\dot{\theta}(t)}_{\dot{\phi}(t)}$$

# Pêndulo invertido

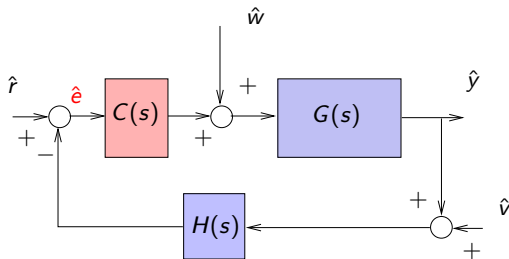
- A figura abaixo mostra a simulação com o carro e o pêndulo partindo do repouso nas posições  $x(0) = 0$  e  $\phi(0) = \pi/4$ . A lei de controle anterior é efetiva para movimentar o carro e colocar o pêndulo na posição vertical. Observe que, ao mesmo tempo, o carro se desloca para a origem  $x = 0$  como era desejado.





# Estrutura básica

- A estrutura básica de **controle com realimentação** (também denominada **em malha fechada**) pode ser representada através do seguinte diagrama de blocos :



onde consideramos um sistema a tempo contínuo. Entretanto, a mesma estrutura, sem nenhuma modificação, também é adotada para representar sistemas a tempo discreto.

# Estrutura básica

- As seguintes considerações são relevantes :
  - O sinal  $r$  define a **referência**, o paradigma.
  - Os sinais  $w$  e  $v$  definem perturbações externas (**ruídos**).
  - $y$  é o sinal de saída a ser controlado. O objetivo é fazer com que o erro  $\varepsilon = r - y$  seja **o menor possível**. Note que  $e$  e  $\varepsilon$  são grandezas distintas!
  - $H(s)$  é a função de transferência do dispositivo que mede  $y$ . Um bom medidor geralmente tem  $H(s) \approx 1$ .
  - $G(s)$  é a função de transferência em malha aberta do sistema que se deseja controlar, isto é

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{g}(s)$$

- $C(s)$  é a função de transferência do controlador que se quer projetar. O objetivo é cumprir as especificações de transitório e de regime permanente para que  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

# Função de transferência

- A partir do diagrama de blocos, com a Transformada de Laplace (ou Transformada Z), obtemos

$$\begin{aligned}\hat{y} &= G(\hat{w} + C\hat{e}) \\ \hat{e} &= \hat{r} - H(\hat{y} + \hat{v})\end{aligned}$$

que permitem determinar

$$\hat{y} = \frac{CG}{1 + CGH}\hat{r} + \frac{G}{1 + CGH}\hat{w} - \frac{CGH}{1 + CGH}\hat{v}$$

onde é importante salientar que as três parcelas têm o **mesmo denominador** o qual depende da função de transferência **C** que se deseja projetar.

# Função de transferência

- Para  $\hat{w} = \hat{v} = 0$  concluímos que  $\hat{y} = F\hat{r}$  onde

$$F = \frac{CG}{1 + CGH}$$

é a **função de transferência do sistema em malha fechada**.

- A equação algébrica (na variável  $s$  ou  $z$ )

$$1 + CGH = 0$$

é a **equação característica do sistema em malha fechada**. Ela define os pólos do sistema em malha fechada que podem ser alterados a partir de uma escolha adequada da função de transferência do controlador  $C$ .

# Sensibilidade

- Para o caso específico e bastante usual em que  $H = 1$ , com os resultados anteriores podemos determinar

$$\hat{\varepsilon} = \underbrace{\left( \frac{1}{1 + CG} \right)}_{\mathcal{S}} (\hat{r} - G\hat{w}) + \underbrace{\left( \frac{CG}{1 + CG} \right)}_{\mathcal{T}} \hat{v}$$

sendo que  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{T}$  são denominadas **função de sensibilidade** e **função de sensibilidade complementar**, respectivamente e satisfazem

$$\mathcal{S} + \mathcal{T} = 1$$

Portanto, o paradigma de selecionar  $C$  de tal forma que  $|\mathcal{S}|$  e  $|\mathcal{T}|$  sejam simultaneamente muito pequenos não pode ser alcançado. Salvo aviso em contrário, consideraremos  $H = 1$ .

## Critérios de desempenho

- Como já foi comentado quando apresentamos a estrutura básica dos sistemas de controle com realimentação, o objetivo central é determinar a função de transferência do controlador  $C$  de tal forma que

$$\hat{\varepsilon} = \hat{r} - \hat{y} \rightarrow 0$$

no máximo é aceitável que o erro permaneça limitado em relação ao tempo. Isto requer que o sistema seja assintoticamente estável, que é o primeiro critério de desempenho:

### Fato (Estabilidade)

*Todas as raízes da equação característica  $1 + CG = 0$  devem se localizar no semiplano esquerdo (a tempo contínuo) ou no interior do círculo unitário (a tempo discreto) do plano complexo.*

# Critérios de desempenho

- Porém, apenas estabilidade não basta. É preciso impor condições mais específicas a respeito do transitório. Neste sentido, adotamos a chamada **aproximação de pólos dominantes**. Considere que a função de transferência em malha fechada  $F(s)$  possa ser decomposta na forma:

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + Q(s)$$

onde os pólos de  $F(s)$  são (para  $0 < \xi < 1$ )

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_d, \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

e aqueles de  $Q(s)$  tais que  $\text{Re}(s) \ll -\xi\omega_n$ . O parâmetro  $\xi$  é denominado **fator de amortecimento**,  $\omega_n$  a **freqüência natural não amortecida** e  $\omega_d$  a **freqüência natural amortecida**.

# Critérios de desempenho

- Assim sendo, após um curto intervalo de tempo o efeito de  $Q(s)$  em  $F(s)$  desaparece. Para a entrada degrau unitário  $r(t) = 1$  para todo  $t \geq 0$  a transformada inversa de Laplace fornece

$$y(t) \approx 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} \text{sen}(\omega_d t) \right)$$

e verificamos que  $\dot{y}(t) = 0$  desde que  $\text{sen}(\omega_d t) = 0$ . Portanto, o máximo de  $y(t)$  ocorre em  $t = \pi/\omega_d$  e vale

$$\max_{t \geq 0} y(t) = 1 + \underbrace{e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}}_{\psi(\xi)}$$

Como  $\psi(\xi) \in (0, 1)$  é uma função decrescente de  $\xi \in (0, 1)$  então  $0 < \xi_p \leq \xi < 1 \implies |\varepsilon(t)| \leq \psi(\xi_p)$  para todo  $t \geq 0$ .



# Critérios de desempenho

- Por outro lado, tendo em vista que  $|\varepsilon(t)|$  tem uma envoltória exponencial, o tempo necessário para que o erro seja próximo de zero, ou seja  $|\varepsilon(t)| \leq \epsilon \approx 0$  para todo  $t \geq t_\epsilon$  é dado aproximadamente por

$$t_\epsilon = -\ln(\epsilon)/\xi\omega_n$$

Portanto, dados  $\epsilon$ ,  $t_\epsilon$  e definirmos  $\sigma_\epsilon = -\ln(\epsilon)/t_\epsilon$  então com  $\sigma = \xi\omega_n$  concluímos que  $0 < \sigma_\epsilon \leq \sigma \implies |\varepsilon(t)| \leq \epsilon$  para todo  $t \geq t_\epsilon$ .

- É importante ressaltar que, para todos os efeitos práticos, deve-se impor um limitante superior à variável  $\sigma$ . De fato,  $\sigma$  arbitrariamente grande significa que o erro tende arbitrariamente rápido para zero. Isto, geralmente, exige grande dispêndio de energia.

# Critérios de desempenho

- Estes aspectos da resposta temporal, para a entrada degrau unitário, que acabamos de determinar têm interpretações no plano complexo onde se situam os dois pólos da aproximação adotada. De fato, com as relações

$$\operatorname{Re}(s) = -\xi\omega_n, \quad |s| = \omega_n$$

determinamos o subconjunto  $\Omega$  do conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$ , dado por

$$0 < \xi_p \leq \xi < 1 \iff \operatorname{Re}(s) < 0, \quad |\operatorname{Re}(s)| \geq \xi_p |s|$$

$$0 < \sigma_\epsilon \leq \sigma \iff \operatorname{Re}(s) < 0, \quad \sigma_\epsilon \leq |\operatorname{Re}(s)|$$

o que nos leva ao estabelecimento do seguinte critério de desempenho que engloba a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada.

# Critérios de desempenho

## Fato (Critério de desempenho consolidado)

*Os pólos do sistema em malha fechada, raízes da equação característica, devem estar situados no interior de  $\Omega$ .*

- Por exemplo, podemos determinar o conjunto  $\Omega$  que permite impor à resposta temporal as características :
  - $\max_{t \geq 0} |\varepsilon(t)| \leq 0.2$
  - $|\varepsilon(t)| \leq 0.05$  para todo  $t \geq 10$  [seg]

Com a primeira condição temos

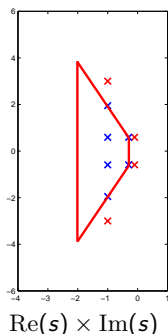
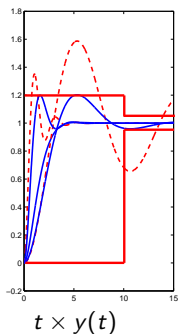
$$\psi(\xi_p) = 0.2 \implies \xi_p \approx 0.455$$

e, com a segunda condição

$$\epsilon = 0.05, t_\epsilon = 10 \implies \sigma_\epsilon \approx 0.3$$

# Critérios de desempenho

- Na figura abaixo, à esquerda, vemos cinco respostas ao degrau unitário  $y(t)$  e as limitações temporais **calculadas anteriormente**. À direita, vemos o respectivo conjunto  $\Omega$  e os pólos de  $F(s)$  que definem as 5 aproximações de 2ª ordem usadas. Identifique-as!



# Critérios de desempenho

- Alguns comentários são pertinentes e devem ser levados em conta para a realização de projetos específicos:
  - A aproximação de pólos dominantes é **apenas** uma aproximação. Os demais pólos devem estar **afastados** - mais à esquerda - dos dois considerados dominantes. Quanto maior o afastamento (em termos da parte real dos pólos) melhor a aproximação adotada.
  - A resposta ao degrau unitário de um sistema com função de transferência  $F(s)$  estável, com  $n$  pólos distintos, pode ser decomposta via frações parciais em

$$\hat{y}(s) = \frac{\alpha_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s - p_i}$$

os zeros de  $F(s)$  influenciam  $\hat{y}(s)$  através de  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ .  
Os zeros de  $F(s)$  alteram a aproximação de pólos dominantes.

# Critérios de desempenho

- No decorrer deste curso veremos alguns outros critérios de desempenho que também podem ser adotados. Neste sentido, podemos citar:
  - Margens de fase e de ganho.
  - Energia mínima.

O primeiro é um critério que especifica margens para que o sistema em malha fechada permaneça estável, sendo calculadas através da resposta em frequência  $F(j\omega)$ . O segundo está associado à determinação de um controlador  $C$  tal que a quantidade

$$J(C) = \int_0^{\infty} \varepsilon(t)^2 dt$$

seja mínima. Minimiza-se a energia contida no erro durante o transitório.

# Classes de controladores

- No estudo de sistemas de controle adota-se três classes de controladores. A primeira é descrita por:
  - **Controladores Proporcional-Integral-Derivativo (PID):** São aqueles com função de transferência

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

onde  $k_p \geq 0$ ,  $k_i \geq 0$  e  $k_d \geq 0$  são parâmetros a determinar. Impondo-se alguns deles iguais a zero, obtemos os controladores mais simples *P*, *PI* e *PD*. Note que  $C(s)$  **não é realizável** sendo necessária uma aproximação dada por

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d \frac{s}{\tau s + 1}$$

onde  $\tau > 0$ , **suficientemente pequeno**, deve ser escolhido com o devido cuidado. Com esta aproximação o controlador final apresenta dois zeros e dois pólos que são deslocados no plano complexo segundo os valores de  $k_p$ ,  $k_i$  e  $k_d$ .

# Classes de controladores

- As duas últimas classes são descritas a seguir:
  - **Controladores Atraso /Avanço**: São aqueles com função de transferência

$$C(s) = k \frac{s + z}{s + p}$$

onde  $k \geq 0$ ,  $z \geq 0$  e  $p \geq 0$  são parâmetros a determinar. Note que se  $p < z$  ( $p > z$ ) a fase de  $C(j\omega)$  é sempre **negativa** (**positiva**) daí a denominação.

- **Controladores de ordem completa**: São aqueles com função de transferência  $C(s)$  com ordem igual à ordem do sistema a ser controlado. Geralmente sua função de transferência é expressa através da representação de estado

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c e$$

$$y_c = C_c x_c + D_c e$$

onde  $(A_c, B_c, C_c, D_c)$  são matrizes a determinar.



# Discretização

- Os sistemas físicos têm como variável independente o tempo  $t \in \mathbb{R}$ . São, portanto, classificados como sistemas a **tempo contínuo** e devem ser assim modelados. Entretanto, a implementação da lei de controle definida pelo controlador

$$y_c(t) = c(t) * e(t) , \quad c(t) = \mathcal{L}^{-1}(C(s))$$

é geralmente feita através de um dispositivo que opera em tempo discreto, o chamado **controle digital**. A partir das amostras de  $e(t)$  obtidas em  $t = kT$  com  $k \in \mathbb{N}$ , sendo  $T > 0$  o período de amostragem, a saída  $y_c(kT)$  é determinada e mantida constante até  $t = (k + 1)T$ . Neste sentido, devemos determinar  $C_D(z)$  tal que

$$y_c(kT) = c_D(kT) \bullet e(kT) , \quad c_D(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(C_D(z))$$

# Discretização

- Existem diversas maneiras de se obter  $C_D(z)$  a partir de  $C(s)$ , a primeira delas é através da determinação da **função de transferência pulsada**. Introduzindo o segurador de ordem zero (SOZ) obtemos

$$C_D(z) = \mathcal{Z}(c_D(kT)) \text{ , } c_D(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1 - e^{-Ts}}{s} C(s) \right)$$

- Por exemplo, para o integrador puro, considerando  $C(s) = 1/s$  temos

$$C_D(z) = \frac{T}{z - 1}$$

cuja implementação numérica

$$y_c((k + 1)T) = y_c(kT) + Te(kT) \text{ , } \forall k \in \mathbb{N}$$

nada mais é que o **método de integração de Euler**.



# Exemplo

- Para o motor de corrente contínua já estudado, determinamos o controlador digital  $C(z) = 0.25 * T / (z - 1)$  que é a função de transferência pulsada de  $C(s) = 0.25/s$  com período de amostragem  $T = 0.25$  e  $T = 2.5$  segundos. Na parte esquerda mostramos o sinal de controle e na direita a velocidade angular  $\nu(t)$ . A menor constante de tempo do motor é de aproximadamente 1.0 segundo. Para  $T$  adequado não se nota diferença devido a discretização.

