

# PRINCÍPIOS DE CONTROLE E SERVOMECANISMO

**JOSÉ C. GEROMEL e RUBENS H. KOROGUI**

DSCE / Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
UNICAMP, CP 6101, 13083 - 970, Campinas, SP, Brasil,  
geromel@dsce.fee.unicamp.br

Campinas, Janeiro de 2007

## NOTA AO LEITOR

- Este material foi preparado como suporte às aulas e é inteiramente baseado no livro texto, em fase de redação :
  - José C. Geromel e Rubens H. Korogui, *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos : Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios*, 2007.

onde o leitor deverá encontrar maiores informações e detalhes a respeito dos tópicos aqui abordados. Sugestões, de qualquer natureza, que permitam o aprimoramento deste texto serão muito apreciadas e desde já agradecidas.

# Conteúdo

- 1 Capítulo III - Fundamentos de Projeto
  - Critérios de desempenho
  - Alocação de pólos
  - Controladores clássicos
    - Atraso / Avanço
    - PID
    - Regra de Ziegler-Nichols
  - Projeto via lugar das raízes
  - Projeto via resposta em frequência







# Critérios de desempenho no domínio da frequência

- Como  $F(j0) = 1$ , a condição  $|F(jW)|^2 = 1/2$  se expressa

$$\left(1 - \left(\frac{W}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{W}{\omega_n}\right)^2 = 2$$

Portanto, verifica-se que  $W$  é proporcional a  $\omega_n$  e é uma função decrescente do fator de amortecimento. Alguns valores particulares importantes de  $W$  são os seguintes :

$$\xi = 0 \implies W = \left(\sqrt{1 + \sqrt{2}}\right) \omega_n$$

$$\xi = 1/\sqrt{2} \implies W = \omega_n$$

$$\xi = 1 \implies W = \left(\sqrt{-1 + \sqrt{2}}\right) \omega_n$$

Adotamos a aproximação  $W \approx \omega_n$  independente do fator de amortecimento!

# Critérios de desempenho no domínio da frequência

- Com respeito ao pico de ressonância e à largura de faixa, é importante notarmos o seguinte :
  - Estabelecer um **limitante superior** ao pico de ressonância é equivalente a estabelecer um **limitante inferior** para o fator de amortecimento.
  - Quanto **maior** a largura de faixa  $W$ , **menor** será o tempo de estabilização (a resposta será mais rápida).
  - Quanto **maior** a largura de faixa  $W$ , **maior** será a sensibilidade devido à perturbações não modeladas (ruídos).

Estas especificações no domínio da frequência determinam um conjunto  $\Omega$  onde as raízes da equação característica devem estar localizadas. Este conjunto  $\Omega$  é dado por

$$\operatorname{Re}(s) < 0, \quad |\operatorname{Re}(s)| \geq \xi_q |s|, \quad W_{min} \leq |\operatorname{Re}(s)| \leq \xi_q W_{max}$$



## Critérios de desempenho no domínio da frequência

- Por exemplo, podemos determinar o conjunto  $\Omega$  que permite impor à resposta em frequência as características :
  - $\max_{\omega \in \mathbb{R}} |F(j\omega)| \leq 1.23$
  - **0.30** [rad/s]  $\leq W \leq$  **4.41** [rad/s]

Com a primeira condição temos

$$\phi(\xi_q) = 1.23 \implies \xi_q \approx 0.455$$

e, com a segunda condição

$$**0.30 \leq W \leq 4.41** \implies 0.3 \leq \sigma \leq 2$$

É muito importante novamente observar que o limitante inferior  $-2 \leq -\sigma$  implica em limitar a sensibilidade do sistema face à presença de ruídos na sua entrada.







# Critérios de desempenho no domínio da frequência

- Para sistemas com  $C(s)G(s)$  estável, a condição de estabilidade em malha fechada requer  $N_{crit} = 0$ . Assim sendo,  $MG > 0$  e  $MF > 0$  indicam **margens de estabilidade**.
- Lembrando que

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}, \quad C(s) = 1 \implies F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

obtemos  **$MG = +\infty$**  e

$$MF = \text{tg}^{-1} \left( \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\xi^4} - 2\xi^2}} \right)$$

Para valores de  $0.3 \leq \xi \leq 0.7$  podemos adotar a aproximação  **$MF \approx 100\xi$**  expressa em graus. A margem de fase é uma função crescente do fator de amortecimento.

## Critérios de desempenho em regime permanente

- Como já foi colocado em evidência, após o transitório, a saída do sistema em malha fechada deve tender para o sinal de referência. Isto requer que

$$\varepsilon_{per} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t))$$

seja nulo (ou menor que um valor aceitável). Sem ter nenhuma informação *a priori* sobre o sinal de referência adotam-se os sinais padronizados

$$\hat{r}(s) = \frac{1}{s^k}, k = 1, 2, \dots$$

de tal forma que para  $k = 1$  a entrada é um **degrau unitário**, para  $k = 2$  uma **rampa unitária**, para  $k = 3$  uma **parábola unitária** e assim sucessivamente. Note que para  $k = 0$  a entrada é um **impulso unitário** e  $\varepsilon_{per} = 0$  como conseqüência da estabilidade em malha fechada.

# Critérios de desempenho em regime permanente

- Como veremos em seguida, a definição abaixo coloca em evidência uma propriedade estrutural de sistemas dinâmicos que é de singular importância no estudo de regime permanente.

## Definição (Tipo de sistemas)

*Um sistema dinâmico a tempo contínuo com  $k > 0$  pólos na origem ( $s = 0$ ) é dito **sistema do tipo  $k$** .*

Os seguintes aspectos devem ser observados :

- Sistemas do tipo  $k$  **não são** assintoticamente estáveis.
- A realimentação de um sistema do tipo  $k$  que resulte em uma função de transferência assintoticamente estável, deixa de ser do tipo  $k$ .
- De forma similar, uma função de transferência com  $k$  pólos na origem é dita ser do tipo  $k$ .

# Critérios de desempenho em regime permanente

- De maneira algo surpreendente, o lema a seguir estabelece a relação entre tipo e erro em regime permanente.

## Lema (Erro em regime permanente)

*Considere um sistema em malha fechada com realimentação unitária e assintoticamente estável. O erro em regime permanente devido à entrada  $\hat{r}(s) = 1/s^k$ ,  $k = 1, \dots$  é nulo se e somente se a função de transferência  $C(s)G(s)$  for, no mínimo, do tipo  $k$ .*

Para provar este lema consideramos  $C(s)G(s)$  do tipo  $\ell$  e calculamos o erro em regime permanente com auxílio do Teorema do valor final :

$$\varepsilon_{per} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s}{1 + C(s)G(s)} \right) \left( \frac{1}{s^k} \right)$$



## Critérios de desempenho em regime permanente

- O limite anteriormente indicado pode ser calculado sem nenhuma dificuldade, sendo dado por

$$\epsilon_{per} = \begin{cases} \frac{1}{1+K_0}, & k = 1 \\ \frac{1}{K_{k-1}}, & k \geq 2 \end{cases}$$

onde para  $k = 1, \dots$ , temos

$$\begin{aligned} K_{k-1} &= \lim_{s \rightarrow 0} s^{k-1} C(s)G(s) \\ &= \begin{cases} \pm\infty, & 1 \leq k \leq l \\ \text{constante}, & k = l + 1 \\ 0, & k \geq l + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

ou seja, o erro de regime permanente  $\epsilon_{per}$  correspondente à entrada  $\hat{r}(s) = 1/s^k$  é nulo se e somente se o tipo da função de transferência  $C(s)G(s)$  for  $l \geq k \geq 1$ .

# Critérios de desempenho em regime permanente

- Com os cálculos anteriores podemos concluir que :
  - Se o tipo de  $C(s)G(s)$  for  $\ell \geq 1$  então os erros em regime permanente para **todas** as entradas  $\hat{r}(s) = 1/s^k$  com  $1 \leq k \leq \ell$  serão **nulos**.
  - Além disso, para a entrada  $\hat{r}(s) = 1/s^{\ell+1}$  o erro será **finito** e poderá ser calculado a partir da constante

$$K_\ell = \lim_{s \rightarrow 0} s^\ell C(s)G(s)$$

que será não nula e finita.

- Para entradas  $\hat{r}(s) = 1/s^k$  com  $k \geq \ell + 2$  o erro em regime permanente será **ilimitado**.
- As três primeiras constantes  $K_0$ ,  $K_1$  e  $K_2$  recebem denominações especiais, a saber : **constante de posição** ( $K_p$ ), **de velocidade** ( $K_v$ ) e **de aceleração** ( $K_a$ ).



# Exemplo

- Em seguida consideramos :
  - Um controlador integral  $C(s) = \kappa/s$ . O critério de Routh permite concluir que o sistema em malha fechada será assintoticamente estável desde que  $0 \leq \kappa \leq 30/14$ . Para estes valores de ganho, o erro em regime permanente para a entrada  $\hat{r}(s) = 50/s$  será nulo pois  $C(s)G(s)$  é do tipo  $\ell = 1$ .
  - O valor do ganho pode ser determinado levando-se em conta outros critérios. Neste caso, o lugar das raízes permite verificar que **para  $\kappa \approx 0.072$  o tempo de estabilização é minimizado** e, simultaneamente, o fator de amortecimento dos pólos dominantes é maximizado, torna-se  $\xi \approx 1$ .
  - Para  $\kappa \approx 0.072$  não há mais oscilações na resposta ao degrau. Esta solução é melhor que aquela considerada anteriormente  $C(s) = 0.25/s$ . Verifique !

# Alocação de pólos

- A influência de um determinado controlador na função de transferência do sistema em malha fechada se dá através de

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

sendo que a escolha de  $C(s)$  altera seus zeros e seus pólos que são as raízes da equação característica  $1 + C(s)G(s) = 0$ . Assim que o conjunto  $\Omega$  for definido, a partir dos critérios discutidos anteriormente, devemos determinar  $C(s)$  de tal forma a **alocar** todos os pólos de  $F(s)$  no seu interior. Neste sentido introduzimos a notação

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}, \quad C(s) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)}$$

# Alocação de pólos

- Onde os respectivos polinômios são definidos na forma

$$N_G(s) = \sum_{i=0}^{m_G} b_i s^i, \quad D_G(s) = \sum_{i=0}^{n_G} a_i s^i$$

com  $n_G \geq m_G$ . Da mesma forma

$$N_C(s) = \sum_{i=0}^{m_C} \beta_i s^i, \quad D_C(s) = \sum_{i=0}^{n_C} \alpha_i s^i$$

com  $n_C \geq m_C$ . Note que os coeficientes dos polinômios  $N_G(s)$  e  $D_G(s)$  são conhecidos e os coeficientes dos polinômios  $N_C(s)$  e  $D_C(s)$  devem ser determinados de tal forma que os pólos de

$$F(s) = \frac{N_C(s)N_G(s)}{D_C(s)D_G(s) + N_C(s)N_G(s)}$$

estejam localizados no interior de  $\Omega$ .

# Alocação de pólos

- Uma maneira simples de impor esta condição é escolher um polinômio  $P(s)$  de ordem  $n_c + n_G$

$$P(s) = \sum_{i=0}^{n_c+n_G} p_i s^i$$

cujas raízes estão no interior de  $\Omega$  e resolver a equação

$$D_C(s)D_G(s) + N_C(s)N_G(s) = P(s)$$

conhecida como **equação Diofantina**, sendo os polinômios  $N_C(s)$  e  $D_C(s)$  suas incógnitas. Observe que ao realizarmos os dois produtos de polinômios obtemos, no lado esquerdo, um polinômio de grau  $n_c + n_G$  que deve ser igualado a  $P(s)$ . Isto é feito igualando-se todos os coeficientes dos termos de mesmo grau.

# Alocação de pólos

- Coletando nos vetores  $\alpha \in \mathbb{R}^{n_C+1}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^{m_C+1}$  e  $p \in \mathbb{R}^{n_C+n_G+1}$  os coeficientes de  $D_C(s)$ ,  $N_C(s)$  e  $P(s)$  respectivamente, definindo as matrizes de **Silvester** associadas aos polinômios  $D_G(s)$  e  $N_G(s)$  ou seja

$$S_D = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & a_{n_G} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_C+n_G+1) \times (n_C+1)}$$

$$S_N = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & b_{m_G} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_C+n_G+1) \times (m_C+1)}$$

a equação Diofantina se escreve na forma final

$$\begin{bmatrix} S_D & S_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = p$$



# Alocação de pólos

- Cuja solução, expressa como

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = (S'S)^{-1}S'p, \quad S = \begin{bmatrix} S_D & S_N \end{bmatrix}$$

permite as seguintes considerações :

- Se  $n_C \geq m_C \geq n_G - 1$ , o número de incógnitas pode exceder o número de equações. Neste caso, existem vários controladores que posicionam os pólos nas posições escolhidas. Portanto, com  $n_C = m_C = n_G - 1$  obtém-se o controlador de ordem mínima,  $S$  é quadrada e a solução é dada por  $S^{-1}p$ .
- Se  $n_C \geq m_C$  mas  $m_C < n_G - 1$ , o número de incógnitas é menor que o número de equações. Neste caso, geralmente não existe nenhum controlador que posicione os pólos nas posições desejadas. A solução acima gera um polinômio  $\tilde{P}(s)$  “próximo” de  $P(s)$ . A posição efetiva dos pólos deve ser verificada *a posteriori*.

# Exemplo

- Desejamos controlar o motor de corrente contínua com função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{14s^2 + 15s + 2}$$

para que o erro ao degrau  $\hat{r}(s) = 50/s$  seja nulo. Para isto, devemos projetar um controlador de tal forma que  $C(s)G(s)$  seja do tipo 1, isto é,  $C(s)$  deve ter pelo menos um pólo na origem. Neste caso, ao resolvermos a equação Diofantina para a função de transferência modificada

$$G_0(s) = \frac{1}{14s^3 + 15s^2 + 2s}$$

obtemos o controlador  $C_0(s)$  e conseqüentemente  $C(s) = C_0(s)/s$  é o controlador associado ao sistema dinâmico definido por  $G(s)$ . Note que  $n_G = 3$ .

# Exemplo

- Inicialmente consideramos  $n_C = m_C = 2$  e  $P(s) = (s + 1)^2(s + 0.25)^3$ . Como  $m_C = n_G - 1$ , a equação Diofantina admite uma única solução que fornece

$$C(s) = \frac{1.419(s + 0.9431)(s + 0.1635)}{s(s^2 + 1.679s + 0.7462)}$$

e os pólos de  $F(s)$  coincidem com as raízes de  $P(s) = 0$ .

- Impondo  $n_C = m_C = 1$  e  $P(s) = (s + 1)(s + 0.25)^3$ , a solução da equação Diofantina fornece

$$C(s) = \frac{1.4253(s + 0.1569)}{s(s + 0.7405)}$$

Como  $m_C < n_G - 1$ , os pólos de  $F(s)$  dados por  $-1.1393$ ,  $-0.2570 \pm j0.1494$  e  $-0.1586$  não mais coincidem com as raízes de  $P(s) = 0$ .

# Exemplo

- Finalmente, consideramos  $n_C = m_C = 0$  e  $P(s) = (s + 0.25)^3$ . Novamente, como  $m_C < n_G - 1$ , a equação Diofantina fornece

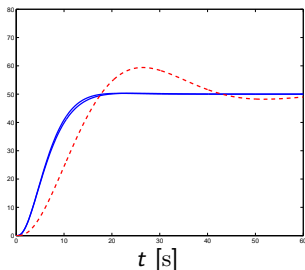
$$C(s) = \frac{0.2591}{s}$$

Neste caso, os pólos de  $F(s)$  são  $-0.0655 \pm j0.1241$ ,  $-0.9405$  e também não coincidem com as raízes de  $P(s) = 0$ . Note, porém, que o sistema em malha fechada permanece assintoticamente estável.

- Sob a condição  $m_C < n_G - 1$ , os pólos do sistema em malha fechada coincidem com as raízes de  $\tilde{P}(s) = 0$ . Este polinômio não é igual ao polinômio  $P(s)$ , apenas foi calculado como sendo o de menor distância a  $P(s)$ . Infelizmente, não podemos garantir nem mesmo que suas raízes sejam estáveis. Esta propriedade essencial deve ser verificada *a posteriori!*

# Exemplo

- A figura abaixo mostra a resposta do sistema em malha fechada para a entrada  $\hat{r}(s) = 50/s$  com os três controladores que acabamos de calcular. Nota-se claramente que os **dois primeiros**, embora de ordens distintas, se comportam de maneira bastante semelhantes enquanto que o **terceiro**, apresenta um desempenho mais modesto. Em todos os casos o erro de regime permanente é nulo.



# Controladores clássicos

- Como já foi discutido, existem duas classes de controladores que são bastante utilizadas em aplicações práticas :
  - **Atraso / Avanço** : Definidos pela função de transferência

$$C(s) = k \frac{s + z}{s + p}$$

com  $k \geq 0$ ,  $z \geq 0$  e  $p \geq 0$ . Se  $p < z$  a fase de  $C(j\omega)$  é negativa e o controlador é do tipo Atraso. Ao contrário, se  $p > z$  a fase de  $C(j\omega)$  é positiva e o controlador é do tipo Avanço.

- **PID** : Definido pela função de transferência

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

com  $k_p \geq 0$ ,  $k_i \geq 0$  e  $k_d \geq 0$ .

Em ambos os casos, o projeto destes controladores requer a determinação de três parâmetros reais.

## Atraso / Avanço

- Para fins de projeto, os controladores Atraso / Avanço devem ser vistos com aproximações dos controladores PI e PD, respectivamente. De fato

$$k_p + \frac{k_i}{s} = k \frac{s+z}{s+p} \implies k = k_p, z = \frac{k_i}{k_p} > p = 0$$

$$k_p + k_d s \approx k \frac{s+z}{s+p} \implies k = k_d p, z = \frac{k_p}{k_d} \ll p$$

Para o controlador PD, a aproximação obtida através de um controlador Avanço com  $p$  suficientemente grande, permite sua implementação prática através de dispositivos bastante simples. Resta, portanto, discutirmos as regras básicas para o projeto de controladores PID.

# PID

- **Controlador PI (Atraso)** - Características básicas:
  - Transitório - Conforme  $z > p \geq 0$  aumenta, no lugar das raízes o coeficiente linear das assíntotas aumenta e, portanto, os pólos tendem para a direita. O tempo de estabilização tende a aumentar.
  - Regime permanente - Como  $C(0) \approx kz/p \rightarrow \infty$  então as constantes de erro tendem a aumentar. Como consequência, os erros de regime permanente tendem a diminuir.
- **Controlador PD (Avanço)** - Características básicas:
  - Transitório - Conforme  $z \ll p$  diminui, no lugar das raízes o coeficiente linear das assíntotas diminui e, portanto, os pólos tendem para a esquerda. O tempo de estabilização tende a diminuir.
  - Regime permanente - Como  $C(0) \approx kz/p \rightarrow 0$  então as constantes de erro tendem a diminuir. Como consequência, os erros de regime permanente tendem a aumentar.



# PID

- De maneira geral, os seguintes fatos são verificados:

## Fato (PI e PD)

*O controlador PI é projetado para melhorar o desempenho em regime permanente enquanto que o controlador PD é projetado para melhorar o desempenho durante o transitório.*

Neste contexto, o projeto de um controlador PID pode ser feito em três etapas:

- Projetar um PI e obter o tempo  $T_i = k_p/k_i$ .
- Projetar um PD e obter o tempo  $T_d = k_d/k_p$ .
- Projetar o controlador PID

$$C(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

onde  $k_p > 0$  é determinado pelo lugar das raízes.

## Regra de Ziegler-Nichols

- Esta regra é importante pois tem sido usada com sucesso em diversas situações práticas onde  $G(s)$  é estável. Com a equação característica  $1 + \kappa G(s) = 0$  determina-se o valor de  $\kappa = \kappa_{osc} > 0$  de tal forma que o sistema passe a oscilar com período de oscilação  $T_{osc}$ . Os coeficientes dos controladores são dados na tabela seguinte :

Controlador	$k_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.50\kappa_{osc}$		
PI	$0.45\kappa_{osc}$	$T_{osc}/1.2$	
PID	$0.60\kappa_{osc}$	$T_{osc}/2.0$	$T_{osc}/8.0$

Note que os parâmetros ( $\kappa_{osc}$ ,  $T_{osc} = 2\pi/\omega_{osc}$ ) podem ser determinados experimentalmente ou pela aplicação do [critério de Routh](#) ou de [Nyquist](#).

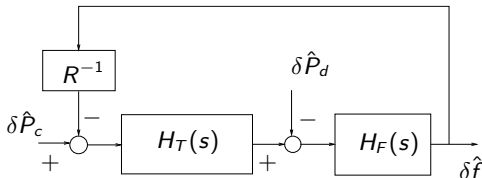
# Considerações Finais

- É preciso enfatizar que os projetos dos controladores clássicos são baseados em algumas características gerais que não são exatas. Assim sendo, devemos estar atentos para :
  - Ter em mãos um suporte computacional que permita fazer tentativas e comparar os respectivos desempenhos para a escolha do melhor controlador.
  - Validar, através de simulações, o controlador escolhido.
- Um bom projeto começa pela definição correta dos critérios de desempenho. Na prática, os seguintes valores são considerados adequados se forem simultaneamente atendidos:
  - Fator de amortecimento mínimo  $\xi > 0.3$
  - Valor de pico máximo no tempo  $\psi < 0.3$
  - Valor de pico máximo em frequência  $\phi < 1.6$
  - Margem de fase mínima  $MF > 30^\circ$

# Projeto via lugar das raízes

- Vamos ilustrar os procedimentos estudados para projetar um controlador para a malha “Potência Ativa - Frequência” em um sistema de geração de energia elétrica - controle  $Pf$ . Para maiores detalhes, ver [O. I. Elgred, “Electric Energy Systems Theory : An Introduction”, MacGraw-Hill, 1971.](#)

Em operação normal, a demanda  $P_d$  é suprida pela geração  $P_g$  e o sistema opera em uma frequência nominal  $f_0$ . A figura abaixo fornece um modelo aproximado (linear) para pequenos desvios em relação a este ponto de operação.



# Projeto via lugar das raízes

- As seguintes considerações são importantes :
  - A função de transferência

$$H_T(s) = \frac{1}{(0.3s + 1)(0.08s + 1)}$$

cuja saída é  $\delta\hat{P}_g$ , representa a turbina e o dispositivo de controle do fluxo de água (ou de vapor) que são acionados por um sinal de controle  $\delta\hat{P}_c$ .

- A função de transferência

$$H_F(s) = \frac{120}{(20s + 1)}$$

tem como entrada a diferença entre a geração e a demanda. Esta diferença produz uma variação na frequência de geração  $\delta\hat{f}$  cuja dinâmica depende da inércia do gerador.

## Projeto via lugar das raízes

- Deseja-se projetar um controlador com função de transferência  $C(s)$  de tal forma que o sistema em malha fechada com a lei de realimentação

$$\delta \hat{P}_c = -C \delta \hat{f}$$

apresente as seguintes características :

- Erro de regime permanente nulo para variação da demanda na forma

$$\delta \hat{P}_d = \frac{0.01}{s}$$

que corresponde a uma variação de 1% da demanda nominal. Observe que o controle deve alterar a geração para suprir a demanda e fazer com que a frequência retorne ao seu valor nominal  $f_0$ .

- Margem de fase, tempo de estabilização e valor de pico (no tempo) em níveis aceitáveis.

# Projeto via lugar das raízes

- Aplicando a transformada de Laplace no diagrama de blocos anterior obtemos

$$\delta\hat{f} = \underbrace{\frac{-H_F}{1 + H_T H_F R^{-1}}}_{W} \delta\hat{P}_d + \underbrace{\frac{H_T H_F}{1 + H_T H_F R^{-1}}}_{G} \delta\hat{P}_c$$

que são calculadas como sendo ( $R = 2.4$ ):

$$W(s) = \frac{-6s^2 - 95s - 250}{s^3 + 15.88s^2 + 42.46s + 106.2}$$

$$G(s) = \frac{250}{s^3 + 15.88s^2 + 42.46s + 106.2}$$

Os seus pólos são  $-13.2902$  e  $-1.2966 \pm j2.5127$ . Os dois mais próximos do eixo real são claramente dominantes.

# Projeto via lugar das raízes

- Finalmente, com a lei de controle  $\delta \hat{P}_c = -C \delta \hat{f}$  podemos calcular a função de transferência em malha fechada

$$\delta \hat{f} = \frac{W}{\underbrace{1 + GC}_F} \delta \hat{P}_d$$

É interessante notar que esta função de transferência depende de  $C(s)$  de uma forma diversa daquela já estudada (o seu numerador não depende de  $C(s)$ ). Entretanto, sua equação característica

$$1 + C(s)G(s) = 0$$

é idêntica à equação característica de um sistema com realimentação unitária. Assim sendo, os conceitos e técnicas apresentados se aplicam.





# Projeto via lugar das raízes

- Como  $W(0)$  e  $G(0)$  são não nulos, para que  $\delta f(t)$  possa ser nula para  $t \rightarrow \infty$  é necessário que  $C(s)$  tenha ao menos um pólo na origem. Assim sendo, determinamos os seguintes controladores com a regra de Ziegler-Nichols :
  - PI :  $k_p = 1.01$ ,  $T_i = 0.81$  [s] e

$$C(s) = \frac{s + 1.236}{s}$$

Malha Fechada :  $\xi \approx 0.04$ ,  $MF \approx 7^\circ \leftarrow$  Inaceitável.

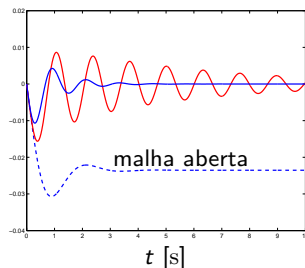
- PID :  $k_p = 1.34$ ,  $T_i = 0.49$  [s],  $T_d = 0.12$  [s] e

$$C(s) = 0.161 \frac{(s + 4.762)(s + 3.571)}{s}$$

Malha Fechada :  $\xi \approx 0.21$ ,  $MF \approx 27^\circ \leftarrow \approx$  Aceitável.

# Projeto via lugar das raízes

- A figura abaixo mostra as simulações dos controladores que acabamos de projetar, bem como o sistema de potência operando em malha aberta. Nota-se que o desempenho do controlador PI não é adequado. Por outro lado, através da simulação verificamos que o desempenho do controlador PID é melhor que o estimado através dos pólos dominantes!

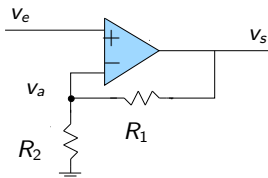


# Projeto via resposta em frequência

- Vamos agora aplicar os resultados anteriores em um projeto envolvendo um amplificador operacional realimentado. Considere o circuito abaixo onde o amp-op, em malha aberta, é modelado por

$$\hat{v}_s = \underbrace{\frac{A_0}{1 + \tau_0 s}}_{A(s)} (\hat{v}_e - \hat{v}_a)$$

onde  $A_0 \in (10^4, 10^5)$  é o ganho DC e  $\tau_0^{-1} \in (10, 100)$  [Hz] a frequência de corte.



# Projeto via resposta em frequência

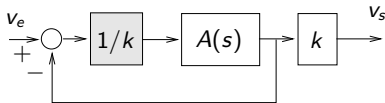
- Como a impedância de entrada é infinita temos

$$\hat{v}_a = \left( \frac{1}{k} \right) \hat{v}_s, \quad k = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \geq 1$$

A figura abaixo mostra o diagrama de blocos correspondente que permite determinar a função de transferência em malha fechada

$$F(s) = k \frac{A(s)/k}{1 + A(s)/k}$$

que é **assintoticamente estável** para qualquer valor do ganho que se deseja implementar  $k \geq 1$ .



# Projeto via resposta em frequência

- Considerando que desejamos projetar um amplificador com ganho  $k \in (1, 100)$  podemos supor que  $A_0/k \gg 1$  e

$$F(s) \approx \frac{k}{(k\tau_0/A_0)s + 1}$$

Trata-se portanto de um filtro passa-baixa com ganho  $k$  e largura de faixa definida pela frequência  $W = A_0/k\tau_0$ . Como é sabido, o produto  $Wk = A_0/\tau_0$  é constante para qualquer ganho  $k$  pois depende exclusivamente dos parâmetros internos do amp-op.

- Para efeito de cálculo adotamos  $A_0 = 10^5$ ,  $\tau_0^{-1} = 10$  [Hz] o que leva a uma largura de faixa de  $W = 1$  [MHz] para  $k = 1$ .

# Projeto via resposta em frequência

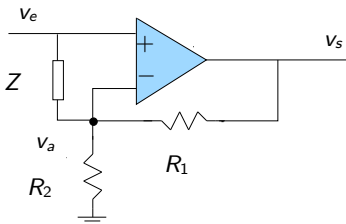
- Entretanto, o modelo em malha aberta  $A(s)$  representa um amp-op para o qual, internamente, os efeitos que aparecem em altas frequências (pólos adicionais) foram devida e corretamente **compensados**. Para estudar este aspecto vamos supor que dispomos de um amp-op **sem compensação**, cuja função de transferência em malha aberta é dada por

$$A_{sem}(s) = \frac{A_0}{(1 + \tau s)(1 + \alpha s)(1 + \beta s)}$$

Deseja-se projetar um amplificador que opere com uma margem de fase da ordem de  $45^\circ$  para todo ganho  $k \in (1, 100)$ . Adotamos os valores numéricos  $\tau^{-1} = 1$  [KHz],  $\alpha^{-1} = 50$  [KHz] e  $\beta^{-1} = 1$  [MHz].

# Projeto via resposta em frequência

- **Importante** : Se utilizarmos a estrutura anterior com  $A_{sem}(s)$  no lugar de  $A(s)$  verificamos que o circuito torna-se **instável** para todo  $k \in (1, 100)$ . Assim sendo, aquela estrutura deve ser modificada para que o critério de desempenho estabelecido seja atendido.
- A figura abaixo mostra a nova estrutura proposta onde o amp-op é representado por  $A_{sem}(s)$  e a impedância  $Z$  é a variável a ser projetada.





# Projeto via resposta em frequência

- Utilizando a transformada de Laplace, o circuito anterior é definido pelas relações

$$\hat{v}_a = H_e \hat{v}_e + H_s \hat{v}_s, \quad \hat{v}_s = A_{sem}(\hat{v}_e - \hat{v}_a)$$

onde

$$H_e = (Z^{-1} + kR_1^{-1})^{-1} Z^{-1}$$
$$H_s = (Z^{-1} + kR_1^{-1})^{-1} R_1^{-1}$$

É importante notar que estas duas funções satisfazem a relação linear

$$H_e + kH_s = 1$$

# Projeto via resposta em frequência

- Levando em conta esta última relação determinamos a função de transferência em malha fechada

$$F_{sem}(s) = k \frac{C(s)A_{sem}(s)}{1 + C(s)A_{sem}(s)}, \quad C(s) = H_s(s)$$

Observe que ela apresenta a mesma estrutura que a anteriormente estudada porém com  $A(s)/k$  substituída por  $C(s)A_{sem}(s)$ . O efeito da impedância  $Z$  aparece em  $C(s)$  que pode ser interpretada como a função de transferência de um controlador a ser projetado.

- Escolhendo  $Z(s)$  bastante simples, como sendo um capacitor em série com um resistor, obtemos

$$Z(s) = R_x + \frac{1}{sC_x}$$

# Projeto via resposta em frequência

- O que permite determinar

$$C(s) = k^{-1} \frac{C_x R_x s + 1}{C_x R_y s + 1}$$

onde

$$R_y = R_x + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

As seguintes observações são pertinentes :

- Como  $R_y > R_x$  o controlador  $C(s)$  é do tipo **atraso**.
- Considerando  $R_1 = kR$  e  $R_2 = kR/(k - 1)$ , temos

$$R_y = R_x + R$$

ou seja, sob a validade desta regra, o resistor  $R_y$  se torna **independente do ganho  $k$** .

# Projeto via resposta em frequência

- O nosso projeto requer a determinação de um controlador  $C(s)$  do tipo atraso de tal forma que o amplificador em malha fechada atenda as especificações :
  - Seja assintoticamente estável.
  - Largura de faixa  $W_{sem}$  aproximadamente igual à largura de faixa de  $F(s)$ .

para todo ganho  $k \in (1, 100)$ . Vamos inicialmente considerar  $k = 50$  fixo, determinar  $C(s)$  e, em seguida, avaliar o seu desempenho para os demais valores do ganho. Observe que para  $k = 50$  a largura de faixa de  $F(s)$  é  $W \approx 20$  [KHz].

- **Importante :** O projeto é realizado tendo em vista que os pólos de  $F_{sem}(s)$  são soluções de

$$1 + C(s)A_{sem}(s) = 0$$

## Projeto via resposta em frequência

- Para as especificações anteriores temos :
  - A estabilidade de  $F_{sem}(s)$  será assegurada exigindo que a margem de fase de  $C(s)A_{sem}(s)$  seja maior do que  $45^\circ$ .
  - Para este valor de margem de fase, a largura de faixa do sistema em malha fechada satisfaz

$$W_{sem} \approx \left(\frac{3}{2}\right) \omega_g$$

onde  $\omega_g$  é frequência que define a margem de fase.

- Como  $C(s)A_{sem}(s)$  é de **fase mínima** o seu módulo define a sua fase que pode ser aproximada por

$$\angle C(j\omega)A_{sem}(j\omega) \approx \left(\frac{n}{20}\right) 90^\circ$$

onde  $n$  é a declividade de  $|C(j\omega)A_{sem}(j\omega)|$  em [dB / déc].

# Projeto via resposta em frequência

- Assim sendo, para se ter uma boa margem de fase, geralmente acima de  $45^\circ$  adota-se a seguinte regra :

## Fato (Regra padrão para a margem de fase)

*Na década no entorno de  $\omega_g$ , o controlador  $C(s)$  deve impor uma declividade de  $-20$  [dB / déc] para  $|C(j\omega)A_{sem}(j\omega)|$ .*

- A partir destas considerações adotamos os seguintes passos para determinar um controlador da forma requerida, isto é, com função de transferência

$$C(s) = k^{-1} \frac{\tau_x s + 1}{\tau_y s + 1}$$

que pode ser sintetizada pela impedância  $Z(s)$  desde que

$$\tau_x < \tau_y$$

# Projeto via resposta em frequência

- **Procedimento :**

- 1 Defina  $W_{sem}$  e determine  $\omega_g \approx 2W_{sem}/3$ .
- 2 Escolhendo  $\tau_x^{-1} \approx \tau^{-1}$  verifica-se que  $|C(j\omega)A_{sem}(j\omega)|$  tem declividade  $-20$  [dB / déc] no intervalo  $(\tau_y^{-1}, \alpha^{-1})$ . Note que  $\omega_g$  deve pertencer a este intervalo de frequências.
- 3 Determine  $\tau_y$  de tal forma que

$$|C(j\omega_g)A_{sem}(j\omega_g)| = 1 \implies \tau_y \approx \frac{A_0}{k\omega_g}$$

Note que a restrição  $\tau_y > \tau_x$  deve ser satisfeita.

- Com os valores numéricos e impondo  $W_{sem} \approx W \approx 20$  [KHz] obtemos  $\omega_g \approx 13.3$  [KHz] e o controlador

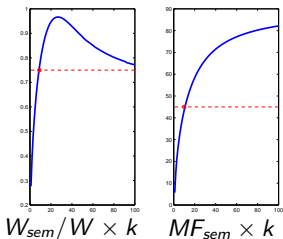
$$C(s) = 0.02 \frac{10^{-3}s + 1}{0.15s + 1}$$





# Projeto via resposta em frequência

- A seguir avaliamos o desempenho do controlador  $C(s)$  calculado para  $k = 50$  em função de  $k \in (1, 100)$ . A figura à esquerda mostra a largura de faixa de  $F_{sem}(s)$  em relação àquela produzida por  $F(s)$  enquanto que a figura à direita mostra a margem de fase. Podemos concluir que o desempenho do controlador  $C(s)$  projetado é bastante adequado para todo  $k \in (10, 100)$ .



# Projeto via resposta em frequência

- A solução que acabamos de obter tem um sério inconveniente de ordem prática. A impedância de entrada do amplificador compensado não é mais infinita. Esta deficiência pode ser sanada pela estrutura dada abaixo. Verifica-se, sem grandes dificuldades, que a impedância  $Z(s)$  pode ser determinada com o mesmo procedimento.

