PRINCÍPIOS DE CONTROLE E SERVOMECANISMO

JOSÉ C. GEROMEL e RUBENS H. KOROGUI

DSCE / Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
UNICAMP, CP 6101, 13083 - 970, Campinas, SP, Brasil,
geromel@dsce.fee.unicamp.br

Campinas, Janeiro de 2007

NOTA AO LEITOR

- Este material foi preparado como suporte às aulas e é inteiramente baseado no livro texto, em fase de redação :
    - José C. Geromel e Rubens H. Korogui, *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos : Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*, 2007.

onde o leitor deverá encontrar maiores informações e detalhes a respeito dos tópicos aqui abordados. Sugestões, de qualquer natureza, que permitam o aprimoramento deste texto serão muito apreciadas e desde já agradecidas.

Conteúdo

Princípio da variação do argumento

- Um resultado bastante importante e de largo uso no estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos é o chamado Princípio da variação do argumento, que se aplica a funções de variáveis complexas. Antes, porém, alguns resultados intermediários são necessários. Considere uma função de variável complexa $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida em um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$.
  - Função analítica : A função $f(z)$ é analítica em $z_0 \in \mathcal{D}$ se ela for diferenciável em z_0 e em todos os pontos de uma vizinhança de z_0. Ela é analítica no domínio $\mathcal{D}$ sempre que $f'(z)$ existir em todo $z \in \mathcal{D}$.
  - Ponto singular isolado : O ponto $z_0 \in \mathcal{D}$ é um ponto singular isolado de $f(z)$ se $f(z)$ for analítica em todo ponto de uma vizinhança de z_0 excetuando-se o proprio z_0. Seus pólos são os únicos ponto singulares isolados de qualquer função racional.

Princípio da variação do argumento

- Uma função $f(z)$ pode ser desenvolvida em série de Laurent em um ponto onde ela não é analítica como, por exemplo, em um ponto singular isolado.

$$f(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i (z - z_0)^i$$

  - Resíduo : O resíduo de $f(z)$ em $z_0 \in \mathcal{D}$ é dado por

$$\begin{aligned} R(f, z_0) &:= c_{-1} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C f(z) dz \end{aligned}$$

    onde $C \subset \mathbb{C}$ é um contorno fechado contendo o ponto z_0 no seu interior.

Princípio da variação do argumento

- O Teorema dos resíduos de Cauchy estabelece que

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{r} R(f, z_k)$$

onde :

- $z_1, \cdots, z_n$ são pontos singulares isolados de $f(z)$.
- o contorno fechado $C \subset \mathbb{C}$ contém os pontos singulares $z_1, \cdots, z_r$ no seu interior.

$$\Downarrow$$

Os resíduos podem ser calculados através da decomposição em frações parciais de $f(z)$

Princípio da variação do argumento

- O Teorema dos resíduos de Cauchy pode ser aplicado para estabelecer a seguinte igualdade

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{g'(z)}{g(z)}dz = N_z - N_p$$

onde N_z é o número de zeros de $g(z)$ que se encontram no interior do contorno $C \in \mathbb{C}$ e N_p é o número de pólos de $g(z)$ que se encontram no interior do mesmo contorno.

  - Fato importante : Os pontos singulares da função

$$f(z) := \frac{g'(z)}{g(z)}$$

são os pólos e os zeros de $g(z)$. Assim sendo, a função $f(z)$ deixa de ser analítica nos zeros e pólos de $g(z)$ que se encontram no interior de C.

Princípio da variação do argumento

- De fato, assumindo que z_0 seja um zero de $g(z)$ com multiplicidade m_0, localizado no interior do contorno fechado C. Podemos então escrever

$$g(z) = (z - z_0)^{m_0} p(z)$$

onde $p(z)$ é uma função analítica em z_0 e $p(z_0) \neq 0$ e, assim

$$f(z) = \frac{m_0}{z - z_0} + \frac{p'(z)}{p(z)}$$

Entretanto, como $p'(z)/p(z)$ é analítica em z_0 ela pode ser desenvolvida em série de Taylor, permitindo a conclusão de que $R(f, z_0) = m_0$. Adotando o mesmo procedimento para todos os pólos e zeros que estão localizados no interior de C obtemos a igualdade anteriormente introduzida.

Princípio da variação do argumento

- A integral de linha indicada pode ser calculada de maneira diversa, isto é

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{g'(z)}{g(z)} dz &= \oint_C d\ln(g(z)) \\ &= j\arg\left(g(z)\right)\big|_C \end{aligned}$$

que permite estabelecer o resultado final

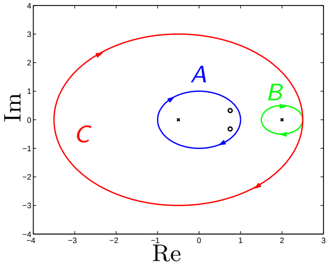
Fato (Princípio da variação do argumento)

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \; arg(g(z)) = N_z - N_p$$

A variação do argumento de $g(z)$ quando z percorre C é igual à diferença entre o número de zeros e o número de pólos de $g(z)$ que se encontram no interior de C.

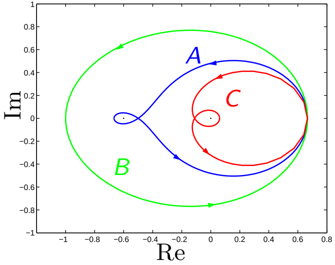
Princípio da variação do argumento

- Considere a função racional $g(z) = \frac{1}{(z+0.5)(z-2)}$ e os contornos fechados A, B and C como mostrados na figura abaixo. Os pólos de $g(z)$ são indicados por "$\times$" enquanto que "$\circ$" indica os zeros de $h(z) = 0.6 + g(z)$.



Exemplo

- A figura abaixo mostra os contornos fechados obtidos pelo mapeamento dos contornos A, B and C através da função $g(z)$. Note os pontos $(0,0)$ e $(-0.6,0)$ colocados em evidência.



Exemplo

- A função $g(z)$ tem dois pólos $\{-0.5, 2\}$ e nenhum zero. Portanto, para os contornos A, B e C considerados temos $\{N_z = 0, N_p = 1\}$, $\{N_z = 0, N_p = 1\}$ e $\{N_z = 0, N_p = 2\}$ respectivamente.
  - Olhando para o ponto $(0, 0)$ temos $(1/2\pi)\Delta_A = -1$, $(1/2\pi)\Delta_B = -1$ e $(1/2\pi)\Delta_C = -2$ respectivamente.
- A função $h(z)$ tem dois pólos $\{-0.5, 2\}$ e dois zeros $\{0.75 \pm j0.3227\}$. Portanto, para os contornos A, B and C considerados temos $\{N_z = 2, N_p = 1\}$, $\{N_z = 0, N_p = 1\}$ e $\{N_z = 2, N_p = 2\}$ respectivamente.
  - Olhando para o ponto $(-0.6, 0)$ temos $(1/2\pi)\Delta_A = 1$, $(1/2\pi)\Delta_B = -1$ e $(1/2\pi)\Delta_C = 0$ respectivamente.

$$\Downarrow$$

Verifique a validade do Princípio da variação do argumento

Matrizes simétricas

- Uma importante classe de matrizes é a classe das matrizes simétricas. Uma matriz quadrada e real $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita simétrica se os elementos situados nas posições simétricas, em relação à diagonal principal, forem iguais. Isto é, se

$$Q_{ij} = Q_{ji} \ , \ \ i \neq j = 1, \cdots, n$$

então Q é uma matriz simétrica.

Fato (Matrizes simétricas)

As seguintes propriedades são válidas para as matrizes simétricas :

- *Todos os seus autovalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ são reais.*
- *Todos os seus autovetores $v_1, \ldots, v_n$ são reais. Autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.*

Matrizes simétricas

- Mesmo se houver coincidência de alguns autovalores podemos determinar os autovetores associados mantendo a ortogonalidade entre eles. Portanto, podemos determinar os autovetores $v_i \in \mathbb{R}^n$, com $i = 1, \cdots, n$ de tal forma que

$$v_i' v_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

e formar a matriz $V = [v_1, \cdots, v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, denominada matriz unitária pois

$$V'V = I \implies V^{-1} = V'$$

Para determinar a inversa de uma matriz unitária basta calcular a sua transposta !

Matrizes simétricas

- Uma matriz simétrica é definida positiva ($Q > 0$) se

$$x'Qx > 0 \ , \ \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$$

de maneira similar podemos definir $Q \geq 0$, $Q < 0$ e $Q \leq 0$. O teste a seguir permite verificar se uma dada matriz satisfaz alguma destas definições.

Fato (Matrizes simétricas)

Seja $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica com autovalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

- $Q > 0$ *se somente se* $\lambda_1 > 0, \cdots, \lambda_n > 0$
- $Q \geq 0$ *se somente se* $\lambda_1 \geq 0, \cdots, \lambda_n \geq 0$
- *De maneira similar para* $Q < 0$ *e* $Q \leq 0$.

Matrizes simétricas

- A prova deste fato não é difícil. Note que

$$\begin{aligned} V'QV &= V'[Qv_1 \ \cdots \ Qv_n] \\ &= V'V\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \\ &= \underbrace{\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)}_{\Lambda} \end{aligned}$$

o que leva a $Q = V\Lambda V'$. Portanto

$$x'Qx = x'V\Lambda V'x = (\underbrace{V'x}_{y})'\Lambda(\underbrace{V'x}_{y}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

e como $x \neq 0 \iff y \neq 0$, a matriz será definida negativa se e somente se todos os seus autovalores forem negativos. Os demais casos decorrem de forma similar.

Matrizes simétricas

- As seguintes considerações são pertinentes :
  - Uma matriz simétrica com autovalores positivos e negativos não se encaixa em nenhuma das definições anteriores. Trata-se de um matriz indefinida.
  - Com uma matriz simétrica $Q > 0$ podemos definir a distância entre dois pontos quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ na forma

    $$d(x, y) = \sqrt{(x-y)'Q(x-y)}$$

    onde nota-se que $d(x, y) = 0$ apenas se $x = y$ e $d(x, y) > 0$ para todo $x \neq y \in \mathbb{R}^n$. Para $Q = I$ obtemos a chamada distância Euclidiana caracterizada pelo fato de que o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes da origem $x = 0$ é uma superfície esférica. No caso geral $Q \neq I$ o referido lugar geométrico é uma superfície elíptica.

Caracterização

- Anteriormente, para a estrutura de controle em malha fechada determinamos $\hat{y} = F\hat{r}$, para a qual introduzimos a seguinte definição:

Fato (Estabilidade)

Um sistema a tempo contínuo é assintoticamente estável se $F(s)$ é analítica em $\mathrm{Re}(s) \geq 0$. De forma equivalente, todos os pólos de $F(s)$ estão localizados na região $\mathrm{Re}(s) < 0$.

É importante notar que os pólos de $F(s)$ são raízes da equação característica $1 + C(s)G(s)H(s) = 0$ que pode ser escrita na forma

$$1 + \kappa \frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

onde $N(s)$ e $D(s)$ são polinômios com coeficientes reais e $\kappa \in \mathbb{R}$.

Caracterização

- Portanto, os pólos de $F(s)$ são raízes de uma equação algébrica com coeficientes reais

$$\Delta(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i s^i = 0 \ , \ \ a_n = 1$$

- Como já sabemos, com a representação de estado mínima de $F(s)$ definida pelas matrizes (A, B, C, D) podemos determinar $\Delta(s) = \det(sI - A)$. Assim, o estudo de estabilidade se resume a:
  - testar se todas as raízes de $\Delta(s) = 0$ estão localizadas na região $\mathrm{Re}(s) < 0$. Note que não é requerido saber as localizações exatas destas raízes no plano complexo.

Caracterização

- Conseqüências importantes:
  - Como $F(s)$ é analítica em $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ então o seu domínio contém esta região e assim, $s = 0 \in \mathcal{D}(F)$. Neste caso, o teorema do valor final fornece

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s) = 0$$

  - Uma entrada limitada no tempo que, portanto, satisfaz $|r(t)| \leq R$ para todo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^\infty f(\tau) r(t-\tau) d\tau \right| \\ &\leq \underbrace{R \int_0^\infty |f(\tau)| d\tau}_{\text{valor limitado}} \end{aligned}$$

sempre produz uma saída limitada no tempo.

Caracterização

- A seguir vamos estudar alguns critérios clássicos de estabilidade de sistemas LIT. Na verdade são condições necessárias e suficientes (e, portanto, equivalentes) que asseguram que todas as raízes da equação característica estejam localizadas na região $\mathrm{Re}(s) < 0$. Uma condição apenas necessária mas não suficiente é a seguinte:

Fato (Condição necessária)

Se todas as raízes de $\Delta(s) = 0$ estão localizadas na região $\mathrm{Re}(s) < 0$ então $a_{n-1} > 0, \cdots, a_1 > 0, a_0 > 0$.

A prova é simples. Um polinômio de ordem qualquer pode ser decomposto no produto de polinômios de 1ª ordem (raízes reais) e de polinômios de 2ª (raízes complexas) cujos coeficientes devem ser positivos.

Critério de Routh-Hurwitz

- O critério de Routh-Hurwitz é baseado na chamada tabela de Routh:

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & & & \\
s^1 & \cdots & & & \\
s^0 & \cdots & & &
\end{array}
$$

  As duas primeiras linhas são construídas com os coeficientes de $\Delta(s)$ e qualquer linha subseqüente é determinada a partir das duas anteriores com a regra :

$$
\begin{aligned}
b_1 &= (a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3})/a_{n-1} \\
b_2 &= (a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5})/a_{n-1} \\
b_3 &= \cdots
\end{aligned}
$$

Critério de Routh-Hurwitz

- Resultado importante : O número de trocas de sinal nos elementos da 1ª coluna da tabela de Routh é igual ao número de raízes de $\Delta(s) = 0$ situadas na região $\mathrm{Re}(s) > 0$.
- A construção da tabela requer que todos os elementos da 1ª coluna sejam não nulos. Dois casos especiais, que precisam ser tratados separadamente, podem ocorrer:
  - todos os elementos de uma linha são nulos : Neste caso, o polinômio $\Delta(s)$ é divisível pelo polinômio gerador da linha anterior $A(s)$. A linha nula deve ser substituída pela linha gerada por $A'(s)$.
  - apenas o primeiro elemento de uma linha é nulo : Neste caso, substitui-se o elemento nulo por $\epsilon > 0$ e determina-se a tabela limite para $\epsilon \to 0$.
- Qualquer linha da tabela pode ser multiplicada por um número positivo sem que o resultado final se altere.

Critério de Routh-Hurwitz

- Outro resultado importante, lembrando que sem perda de generalidade consideramos $a_n = 1$, é o seguinte:

Fato (Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz)

Todas as raízes da equação algébrica $\Delta(s) = 0$ *estão localizadas na região* $\mathrm{Re}(s) < 0$ *se e somente se a* 1ª *coluna da tabela de Routh for positiva.*

- Se $\Delta(s)$ possuir algum coeficiente negativo ou nulo, não é preciso construir a tabela de Routh para concluir que alguma raíz de $\Delta(s) = 0$ estará fora do lado esquerdo de $\mathbb{C}$.
- Se algum dos dois casos especiais ocorrer também não é preciso continuar a construção da tabela de Routh para concluir que alguma raíz de $\Delta(s) = 0$ estará fora do lado esquerdo de $\mathbb{C}$.

Exemplos

- Exemplo 1 : Aplique o critério de Routh-Hurwitz em

$$\Delta(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2$$

A tabela de Routh fica na forma

$$\begin{array}{c|cc}
\hline
s^3 & 1 & 5 \\
s^2 & 4 & 2 \\
s^1 & 9/2 & \\
s^0 & 2 & \\
\hline
\end{array}$$

Todos os elementos da primeira coluna são positivos. Todas as raízes estão situadas no semi-plano esquerdo complexo.

Exemplos

- Exemplo 2 : Aplique o critério de Routh-Hurwitz em

$$\Delta(s) = s^3 - 3s + 2$$

A tabela de Routh fica na forma

s^3	1	-3
s^2	$0 \to \epsilon$	2
s^1	$-2/\epsilon$	
s^0	2	

Duas trocas de sinal na primeira coluna. Duas raízes estão situadas no semi-plano direito complexo.

Exemplos

- Exemplo 3 : Aplique o critério de Routh-Hurwitz em

$$\Delta(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2$$

A tabela de Routh fica na forma

s^4	1	3	2
s^3	3	3	
s^2	2	2	$A(s) = 2s^2 + 2$
s^1	$0 \rightarrow 4$		
s^0	2		

Nenhuma troca de sinal na primeira coluna. Nenhuma raiz está situada no semi-plano direito complexo. Aquelas de A(s) = 0 estão localizadas sobre o eixo imaginário.

Exemplos

- Exemplo 4 : Aplique o critério de Routh-Hurwitz em

$$\Delta(s) = s^4 + 6s^3 + (13+\kappa)s^2 + (12-2\kappa)s + (4+\kappa)$$

A tabela de Routh fica na forma

s^4	1	$13+\kappa$	$4+\kappa$
s^3	3	$6-\kappa$	
s^2	$33+4\kappa$	$12+3\kappa$	
s^1	$81-9\kappa-2\kappa^2$		
s^0	$4+\kappa$		

Impondo nenhuma troca de sinal na primeira coluna obtemos $-4 < \kappa < 4.5$. Para $\kappa = 4.5$ a linha s^1 é nula e, portanto, $A(s) = 51s^2 + 25.5 = 0 \implies s \approx \pm j0.7$.

Motor de corrente contínua

- Deseja-se controlar a velocidade angular de um motor de corrente contínua com função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{14s^2 + 15s + 2}$$

com um controlador PI. Quais são os ganhos $k_p \geq 0$ e $k_i \geq 0$ do controlador que asseguram a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada? Considerando um sensor de velocidade ideal com $H(s) = 1$, os pólos em malha fechada são dados por

$$1 + \left(k_p + \frac{k_i}{s}\right) \frac{1}{14s^2 + 15s + 2} = 0$$

ou seja

$$\Delta(s) = 14s^3 + 15s^2 + (2 + k_p)s + k_i = 0$$

Motor de corrente contínua

- Neste caso, a tabela de Routh fica na forma

s^3	14	$2+k_p$
s^2	15	k_i
s^1	$30+15k_p-14k_i$	
s^0	k_i	

e concluímos que, na região de interesse, a estabilidade assintótica é assegurada para

$$k_p \geq 0 \ , \ \ 0 < k_i < 1.0714k_p + 2.1429$$

Anteriormente, controlamos a velocidade deste motor com um controlador PI definido pelos parâmetros $k_p = 0$ e $k_i = 0.25$. Como sabemos, este controlador estabiliza o sistema em malha fechada.

Critério de Routh-Hurwitz

- Para sistemas a tempo discreto com a mesma estrutura de controle em malha fechada determinamos $\hat{y} = F\hat{r}$, para a qual introduzimos a seguinte definição:

Fato (Estabilidade)

Um sistema a tempo discreto é assintoticamente estável se $F(z)$ é analítica em $|z| \geq 1$. De forma equivalente, todos os pólos de $F(z)$ estão localizados na região $|z| < 1$.

Novamente, é importante notar que os pólos de $F(z)$ são raízes da equação característica $1 + C(z)G(z)H(z) = 0$ que pode ser escrita na forma

$$1 + \kappa \frac{N(z)}{D(z)} = 0$$

onde $N(z)$ e $D(z)$ são polinômios com coeficientes reais e $\kappa \in \mathbb{R}$.

Critério de Routh-Hurwitz

- Portanto, os pólos de $F(z)$ são raízes de uma equação algébrica com coeficientes reais

$$\Delta(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i z^i = 0 \ , \ \ a_n = 1$$

- Como já sabemos, com a representação de estado mínima de $F(z)$ definida pelas matrizes (A, B, C, D) podemos determinar $\Delta(z) = \det(zI - A)$. Assim, o estudo de estabilidade se resume a:
  - testar se todas as raízes de $\Delta(z) = 0$ estão localizadas na região $|z| < 1$. Note que não é requerido saber as localizações exatas destas raízes no plano complexo.

Critério de Routh-Hurwitz

- Conseqüências importantes:
  - Como $F(z)$ é analítica em $|z| \geq 1$ então o seu domínio contém esta região e assim, $z = 1 \in \mathcal{D}(F)$. Neste caso, o teorema do valor final fornece

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z) = 0$$

  - Uma entrada limitada no tempo que, portanto, satisfaz $|r(k)| \leq R$ para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |y(k)| &= \left|\sum_{i=0}^{\infty} f(i)r(k-i)\right| \\ &\leq R \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} |f(i)|}_{\textit{valor limitado}} \end{aligned}$$

sempre produz uma saída limitada no tempo.

Critério de Routh-Hurwitz

- A estabilidade de sistemas a tempo discreto é estudada a partir da transformação bilinear definida por

$$z = \frac{1+s}{1-s}$$

que mapeia todos os pontos da região $\mathrm{Re}(s) \leq 0$ na região $|z| \leq 1$. Com esta transformação, determinamos

$$\Delta_{mod}(s) = 0 \Longleftrightarrow \Delta(z) = 0$$

e aplicamos o critério de Routh-Hurwitz em $\Delta_{mod}(s) = 0$. As conclusões obtidas para as raízes de $\Delta_{mod}(s) = 0$ em relação à região $\mathrm{Re}(s) \leq 0$, são válidas para as raízes de $\Delta(z) = 0$ em relação à região $|z| \leq 1$.

Critério de Nyquist

- O critério de estabilidade de Nyquist baseia-se no Princípio da variação do argumento e, assim sendo, algumas manipulações preliminares são necessárias. Considere a equação característica escrita na forma

$$1 + \kappa \frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

onde $\kappa \in \mathbb{R}$ é um escalar não nulo. Dada uma curva fechada C no plano complexo, desejamos determinar o número de raízes que estão situadas no seu interior. Observe que reescrevendo de forma alternativa

$$\frac{D(s) + \kappa N(s)}{D(s)} = \frac{\Delta(s)}{D(s)} = 0$$

notamos que os valores de $s \in \mathbb{C}$ de interesse são raízes da equação algébrica $\Delta(s) = 0$.

Critério de Nyquist

- Definido a função

$$g(s) = \frac{D(s) + \kappa N(s)}{D(s)}$$

e determinando o mapeamento de C, a variação do seu argumento fornece o número de voltas entorno da origem do plano complexo

$$N_{crit} = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \; arg(g(s))$$

Porém, pelo Princípio da variação do argumento $N_{crit} = N_z - N_p$ onde N_z é o número de zeros de $g(s)$ (e, portanto raízes de $\Delta(s) = 0$) e N_p é o número de pólos de $g(s)$ (e, portanto raízes de $D(s) = 0$) que se encontram no interior de C.

Critério de Nyquist

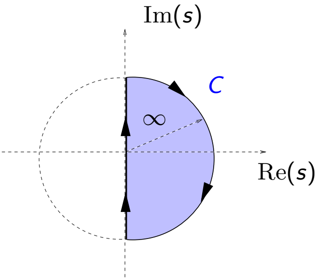
- Devemos observar que :
  - Como $g(s) = 1 + \kappa N(s)/D(s)$ o valor de N_{crit} poder ser alternativamente determinado pelo mapeamento de $N(s)/D(s)$, contadas as voltas entorno ao ponto crítico $-1/\kappa + j0$.
  - O valor de N_{crit} tem sinal! É positivo se o sentido de percurso de C e o do seu mapeamento forem concordantes e negativo se forem discordantes.
  - Como as raízes de $D(s) = 0$ são conhecidas, o valor de N_p é determinado por mera verificação daquelas que se encontram no interior da curva fechada C escolhida.
  - Pelo Princípio da variação do argumento determinamos

$$N_z = N_{crit} + N_p$$

que é o número de raízes de $\Delta(s) = 0$ que se encontram no interior de C.

Critério de Nyquist

- Desde que seja fechada, não há nenhuma restrição adicional para a escolha de C. Para a curva C ilustrada na figura abaixo é importante observar que o seu interior é a região $\mathrm{Re}(s) > 0$. Portanto, a condição $N_z = 0$ assegura que todas as raízes de $\Delta(s) = 0$ estejam localizadas fora desta região.



Critério de Nyquist

- Para a curva C escolhida podemos enunciar :

Fato (Critério de estabilidade de Nyquist)

Todas as raízes da equação algébrica $\Delta(s) = 0$ estão localizadas na região $\mathrm{Re}(s) < 0$ se e somente se $N_{crit} + N_p = 0$.

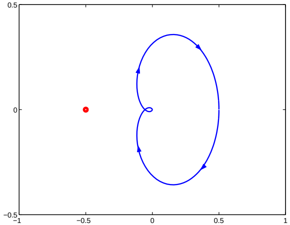
- Se uma ou mais raízes de $\Delta(s) = 0$ estiverem localizadas no eixo imaginário (nem dentro e nem fora de C), o valor de N_{crit} torna-se indefinido, ou seja, o mapeamento de $N(s)/D(s)$ passa sobre o ponto crítico $-1/\kappa + j0$.
- A curva C é composta por um segmento de reta e por um semi-círculo. O mapeamento do segmento de reta é feito através do cálculo de $N(s)/D(s)$ para $s = j\omega$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, que nada mais é que a sua resposta em freqüência. O mapeamento do semi-círculo com raio $|s| \to \infty$ é um ponto no eixo real (geralmente a origem).

Exemplos

- Exemplo 1 : Aplique o critério de Nyquist em

$$s^3 + 4s^2 + 5s + 4 = 0 \iff 1 + \frac{2}{(s+2)(s+1)^2} = 0$$

As raízes de $D(s) = (s+2)(s+1)^2$ estão fora de C e assim $N_p = 0$. O mapeamento de C e o ponto crítico $-1/2 + j0$ indicam que $N_{crit} = 0$. Todas as raízes estão situadas no semi-plano esquerdo complexo ($N_z = 0$).

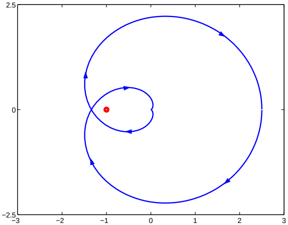


Exemplos

- Exemplo 2 : Aplique o critério de Nyquist em

$$1 + \frac{(s+5)}{(s^2+s+1)(s+2)(s+1)^2} = 0$$

As raízes de $D(s)$ estão fora de C e assim $N_p = 0$. O mapeamento de C e o ponto crítico $-1 + j0$ indicam que $N_{crit} = 2$. Duas raízes estão situadas no semi-plano direito complexo ($N_z = 2$).

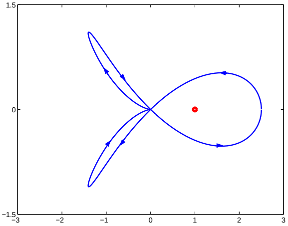


Exemplos

- Exemplo 3 : Aplique o critério de Nyquist em

$$1 - \frac{(20s^2 + 10)}{(s+2)^2(s-1)^2} = 0$$

Duas raízes de $D(s)$ estão no interior de C e assim $N_p = 2$. O mapeamento de C e o ponto crítico $1 + j0$ indicam que $N_{crit} = -1$. Uma raíz está situada no semi-plano direito complexo ($N_z = 1$).

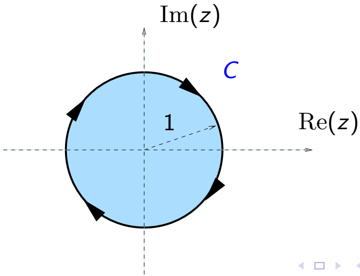


Critério de Nyquist

- Para sistemas a tempo discreto com equação característica

$$1 + \kappa \frac{N(z)}{D(z)} = 0$$

adotamos a curva C ilustrada na figura abaixo cujo interior é a região $|z| < 1$. Portanto, a condição $N_z = n$ assegura que todas as raízes de $\Delta(s) = 0$, de grau n, estejam localizadas dentro desta região.



Critério de Nyquist

- Para a curva C escolhida podemos enunciar :

Fato (Critério de estabilidade de Nyquist)

Todas as raízes da equação algébrica $\Delta(z) = 0$, de grau n, estão localizadas na região $|z| < 1$ se e somente se $N_{crit} + N_p = n$.

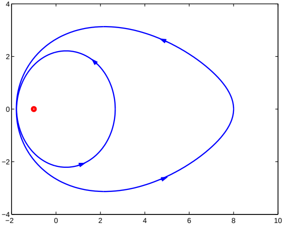
- Se uma ou mais raízes de $\Delta(z) = 0$ estiverem localizadas sobre o círculo unitário, (nem dentro e nem fora de C), o valor de N_{crit} torna-se indefinido, ou seja, o mapeamento de $N(z)/D(z)$ passa sobre o ponto crítico $-1/\kappa + j0$.
- Como a curva C é o círculo unitário, o seu mapeamento é feito através do cálculo de $N(z)/D(z)$ para $z = e^{j\omega}, \ \omega \in [0, 2\pi]$ que nada mais é que a sua resposta em freqüência.
- Uma outra possibilidade é a aplicação da versão contínua do critério de Nyquist na equação $\Delta_{mod}(s)$.

Exemplo

- Aplique o critério de Nyquist na seguinte equação característica de um sistema a tempo discreto

$$1 + \frac{(z+4)}{(z-1/2)(z+1/2)(z+3/2)} = 0$$

Duas raízes de $D(z)$ estão no interior de C e assim $N_p = 2$. O mapeamento de C e o ponto crítico $-1 + j0$ indicam que $N_{crit} = -2$. Nenhuma raíz está situada no interior do círculo unitário ($N_z = 0$).



Critério de Lyapunov

- O critério de Lyapunov é bastante geral e se aplica a sistemas dinâmicos lineares ou não lineares, a tempo contínuo ou discreto, descritos através de suas equações de estado. A idéia central, simples e intuitiva, é a seguinte:
  - O ponto $x_e \in \mathbb{R}^n$ no espaço de estado de um sistema dinâmico é denominado ponto de equilíbrio se

$$x(0) = x_e \implies x(t) = x_e \ \forall t \geq 0$$

  - Sendo $v(x)$ uma função que mede a distância de um ponto genérico $x \in \mathbb{R}^n$ no espaço de estado até um ponto de equilíbrio x_e, se para toda condição inicial $x(0) = x_0$ a função $v(x(t))$ diminui e tende para zero no decorrer do tempo, então x_e é globalmente assintoticamente estável.

O critério de Lyapunov baseia-se na escolha da função distância $v(x)$ e na imposição de que $v(x(t))$ seja uma função decrescente em relação a $t \geq 0$.

Critério de Lyapunov

- Para um sistema linear a tempo contínuo com representação de estado

$$\dot{x} = Ax$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, a origem é um ponto de equilíbrio. Escolhendo $v(x) = x'Px$ com $P > 0$ e derivando em relação ao tempo obtemos

$$\dot{v} = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(A'P + PA)x$$

Dada $Q > 0$, se for possível determinar $P > 0$ solução da chamada equação de Lyapunov

$$A'P + PA = -Q$$

então $\dot{v} = -x'Qx < 0$ para todo $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, fazendo com que $v(x(t))$ seja uma função decrescente em relação ao tempo.

Critério de Lyapunov

- Ademais, como Q e P são matrizes definidas positivas, existe $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que $\alpha P < Q$. Portanto

$$\dot{v} \leq -\alpha v \quad \longrightarrow \quad v(t) \leq e^{-\alpha t} v(0)$$

ou seja $v(t)$ tende a zero e, da mesma forma, $x(t)$ tende ao ponto de equilíbrio $x_e = 0$ assintoticamente. Observe que quanto maior α, maior é a velocidade com que $x(t)$ se aproxima da origem.

Lema (Critério de Lyapunov)

O sistema a tempo contínuo $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável se e somente se para $Q > 0$ dada, existir $P > 0$ solução da equação matricial $A'P + PA = -Q$.

Critério de Lyapunov

- Considere um sistema dinâmico assintoticamente estável

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \ x(0) = x_0 \\ y &= Cx \end{aligned}$$

o qual, a partir da condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, produz uma saída $y(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Desejamos avaliar a qualidade do transitório através do cálculo do índice

$$J = \int_0^\infty y(t)'y(t)dt$$

Com a solução $P \geq 0$ de $A'P + PA = -C'C$, temos

$$J = -\int_0^\infty \dot{v}dt = v(x_0) - \underbrace{v(x(\infty))}_{=0} = x_0'Px_0$$

Critério de Lyapunov

- De maneira análoga podemos obter os resultados válidos para sistemas a tempo discreto, com representação de estado

$$x(k+1) = Ax(k)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$. Como a origem é um ponto de equilíbrio, escolhendo novamente $v(x) = x'Px$ com $P > 0$, obtemos

$$v(x(k+1)) - v(x(k)) = x(k)'(A'PA - P)x(k)$$

Dada $Q > 0$, se for possível determinar $P > 0$ solução da chamada equação de Lyapunov discreta

$$A'PA - P = -Q$$

então $v(x(k+1)) - v(x(k)) = -x(k)'Qx(k) < 0$ para todo $x(k) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, fazendo com que $v(x(k))$ seja uma função decrescente em relação ao tempo.

Critério de Lyapunov

- Ademais, como Q e P são matrizes definidas positivas, existe $\beta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\beta P < Q$. Portanto

$$v(k+1) \leq (1-\beta)v(k) \longrightarrow v(k) \leq (1-\beta)^k v(0)$$

ou seja $v(k)$ tende a zero e, da mesma forma, $x(k)$ tende ao ponto de equilíbrio $x_e = 0$ assintoticamente. Observe que quanto mais $\beta \to 1$, maior é a velocidade com que $x(k)$ se aproxima da origem.

Lema (Critério de Lyapunov)

O sistema a tempo discreto $x(k+1) = Ax(k)$ é assintoticamente estável se e somente se para $Q > 0$ dada, existir $P > 0$ solução da equação matricial $A'PA - P = -Q$.

Critério de Lyapunov

- Considere um sistema dinâmico assintoticamente estável

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k), \; x(0) = x_0 \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

o qual, a partir da condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, produz uma saída $y(k) \to 0$ quando $k \to \infty$. Desejamos avaliar a qualidade do transitório através do cálculo do índice

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)' y(k)$$

Com a solução $P \geq 0$ de $A'PA - P = -C'C$, temos

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (v(x(k)) - v(x(k+1))) = v(x_0) - \underbrace{v(x(\infty))}_{=0} = x_0' P x_0$$

Lugar das raízes

- Considere a equação característica de um sistema a tempo contínuo escrita na forma

$$1 + \kappa \frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

onde $N(s)$ é um polinômio de grau m com coeficientes reais, $D(s)$ é um polinômio de grau $n \geq m$ com coeficientes reais e κ é um número positivo arbitrário. Lugar das raízes é a denominação do lugar geométrico das n raízes desta equação parametrizadas em relação a $\kappa > 0$. Devemos notar que :

  - O lugar das raízes pode ser obtido resolvendo-se $D(s) + \kappa N(s) = 0$ para todo $\kappa > 0$.
  - O lugar das raízes tem n ramos, cada um deles correspondente a uma das raízes da equação.
  - Um traçado aproximado do lugar das raízes pode ser feito a partir de algumas regras simples dadas a seguir.

Lugar das raízes

- Assumindo que $N(s)$ e $D(s)$ possam ser fatorados como

$$N(s) = \prod_{i=1}^{m}(s - z_i) \ , \ \ D(s) = \prod_{i=1}^{n}(s - p_i)$$

onde z_i são os zeros e p_i são os pólos, para um ponto genérico $s \in \mathbb{C}$ podemos determinar as formas polares

$$s - z_i = |s - z_i| e^{j\psi_i}, \ \ i = 1, \cdots, m$$

$$s - p_i = |s - p_i| e^{j\phi_i}, \ \ i = 1, \cdots, n$$

e, portanto, para que um ponto $s \in \mathbb{C}$ pertença ao lugar das raízes, duas condições devem ser satisfeitas simultaneamente para algum $\kappa > 0$.

Lugar das raízes

- condição de módulo :

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}=\frac{1}{\kappa}$$

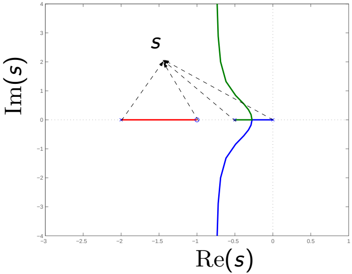
- condição de ângulo :

$$\sum_{i=1}^{m}\psi_i-\sum_{i=1}^{n}\phi_i=(2k+1)\pi$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$. É muito importante observar que para testar se um determinado ponto $s \in \mathbb{C}$ pertence ao lugar das raízes, basta verificar a condição de ângulo. Se ela for satisfeita, o ponto em questão pertence ao lugar das raízes e o ganho correspondente $\kappa > 0$ é determinado pela condição de módulo.

Exemplo

- A figura abaixo mostra o lugar das raízes para
$$1 + \kappa \frac{s+1}{s(s+2)(s+0.5)} = 0$$
onde observamos que o ponto s indicado não satisfaz a condição de ângulo. Note que o lugar das raízes tem três ramos, cada um correspondente a cada raíz da equação.



Regras básicas

- A regra número 1 permite determinar os pontos onde começam e onde terminam os ramos do lugar das raízes.

Regra (1)

Os n ramos do lugar das raízes começam nos pólos $p_i, i = 1, \cdots, n$ com $\kappa \to 0$ e terminam nos zeros $z_i, i = 1, \cdots, m$ com $\kappa \to \infty$.

Considere a equação em estudo escrita na forma $D(s) + \kappa N(s) = 0$. Fazendo $\kappa \to 0$ as suas raízes tendem para as raízes $D(s) = 0$. Por outro lado, com a forma alternativa $\kappa^{-1} D(s) + N(s) = 0$, fazendo $\kappa \to \infty$ as suas raízes tendem para as raízes de $N(s) = 0$.

Se $n > m$, existem $n - m$ ramos cujas terminações não estão definidas pela regra 1. Este aspecto é tratado pela regra 2.

Regras básicas

- A regra número 2 permite determinar as terminações de $n-m$ ramos quando $n > m$ e $\kappa \to \infty$.

Regra (2)

Se $n > m$, $n-m$ ramos do lugar das raízes tendem para infinito assintoticamente a $n-m$ retas com coeficiente linear

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

e coeficientes angulares

$$\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{n-m} \ , \ \ k = 1, \cdots, (n-m)$$

Note que todas estas (n-m) retas, desenhadas no plano complexo, passam pelo mesmo ponto do eixo real $\sigma + j0$.

Regras básicas

- Observe que para $n > m$ e $|s|$ arbitrariamente grande podemos adotar a aproximação

$$\frac{N(s)}{D(s)} \approx \frac{1}{(s-\sigma)^{(n-m)}}$$

e assim a equação aproximada tem como raízes

$$s = \sigma + \sqrt[n-m]{\kappa}\,\sqrt[n-m]{(-1)}$$

Por outro lado, lembrando que $\sqrt[n-m]{(-1)} = e^{j\theta_k}$, obtemos

$$s = \sigma + \sqrt[n-m]{\kappa}e^{j\theta_k},\ k = 1, \cdots, n-m$$

No plano complexo, fazendo $\kappa > 0$ variar, determinamos $n-m$ retas que passam pelo ponto $\sigma + j0$, cada uma delas com coeficiente angular θ_k.

Regras básicas

- A regra número 3 permite determinar os pontos do eixo real que pertencem ao lugar das raízes.

Regra (3)

Todos os pontos do eixo real que estejam localizados à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros pertence ao lugar das raízes.

De fato, considere s um ponto qualquer do eixo real. Para pólos e zeros complexos e seus conjugados temos $\phi_i + \phi_j = \psi_i + \psi_j = 2\pi$. Por outro lado, para pólos e zeros reais situados à esquerda de s temos $\phi_p = \psi_p = 0$. Finalmente, para pólos e zeros reais situados à direita de s temos $\phi_q = \psi_q = \pi$ e, quando forem em número ímpar, a condição de ângulo será satisfeita.

Regras básicas

- A regra número 4 é bastante geral e consolida propriedades já conhecidas de equações algébricas.

Regra (4)

Como todos os coeficientes dos polinômios $N(s)$ e $D(s)$ são reais, as seguintes propriedades são válidas :

- *O lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real.*
- *O cruzamento do lugar das raízes com o eixo imaginário $j\omega$ pode ser calculado com o critério de Routh-Hurwitz ou de Nyquist.*

A primeira propriedade decorre do fato de que se $s \in \mathbb{C}$ é raíz de uma equação algébrica com coeficientes reais então o mesmo ocorre com o seu conjugado. A segunda propriedade simplesmente indica que os critérios de estabilidade mencionados permitem identificar raízes imaginárias puras.

Regras básicas

- A regra número 5 fornece uma condição necessária que permite identificar pontos onde ocorrem cruzamento de ramos.

Regra (5)

Se no ponto $s \in \mathbb{C}$ um ou mais ramos se cruzam então

$$N(s)D'(s) - D(s)N'(s) = 0$$

Para um determinado valor de $\kappa > 0$, se em um ponto $s \in \mathbb{C}$ um ou mais ramos se cruzam então $D(s) + \kappa N(s) = 0$ admite soluções múltiplas. Da mesma forma $D'(s) + \kappa N'(s) = 0$ da qual eliminado-se o valor de κ obtemos o resultado desejado. Observe que se trata apenas de uma condição necessária. Assim sendo, podem existir raízes da equação acima onde não ocorre cruzamento de ramos.

Regras básicas

- A regra número 6 fornece um procedimento de cálculo para alguns ângulos do lugar das raízes.

Regra (6)

Os ângulos de saída dos pólos, os ângulos de chegada nos zeros e os ângulos de saída nos pontos de cruzamento de ramos podem ser determinados pela condição de ângulo.

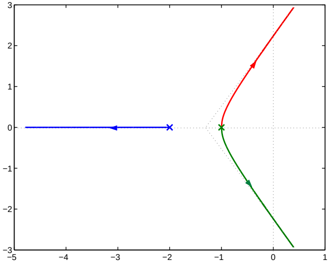
Esta regra parece óbvia mas sua aplicação precisa ser bem entendida. Por exemplo, considere um pólo qualquer p_1 e um ponto $s \in \mathbb{C}$ arbitrariamente próximo. A reta entre s e p_1 se confunde com a reta tangente ao ramo que passa por p_1. Como s e p_1 estão localizados arbitrariamente próximos um do outro, o ângulos ϕ_i, $i \neq 1$ e ψ_i são conhecidos. A condição de ângulo permite determinar ϕ_1 e, portanto, o ângulo de saída do pólo p_1.

Exemplos

- Exemplo 1 : Na figura abaixo mostramos o lugar das raízes de

$$1 + \kappa \frac{2}{(s+2)(s+1)^2} = 0$$

Observe as três assíntotas para $\kappa \to \infty$.

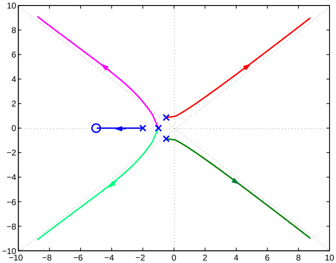


Exemplos

- Exemplo 2 : Na figura abaixo mostramos o lugar das raízes de

$$1+\kappa\frac{(s+5)}{(s^2+s+1)(s+2)(s+1)^2}=0$$

Observe as quatro $(n-m=4)$ assíntotas para $\kappa\to\infty$.

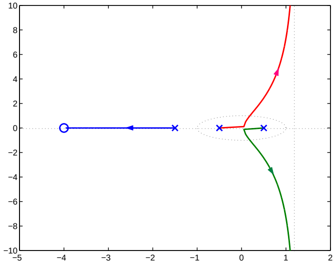


Exemplos

- Exemplo 3 : Na figura abaixo mostramos o lugar das raízes de um sistema a tempo discreto

$$1 + \kappa \frac{(z+4)}{(z-1/2)(z+1/2)(z+3/2)} = 0$$

Observe as duas assíntotas e dois ramos cruzando o círculo unitário.



Regras básicas

- Conforme o leitor pode constatar, o traçado do lugar das raízes é invariante para sistemas a tempo contínuo ou a tempo discreto. Sob as hipóteses já comentadas, as regras se aplicam para a equação

$$1 + \kappa \frac{N(\zeta)}{D(\zeta)} = 0 \ , \ \ \kappa > 0$$

  onde ζ é uma variável complexa (s ou z).
- Entretanto, as regras mudam em algumas situações. Por exemplo, as regras para o traçado do lugar das raízes para a equação

$$1 - \kappa \frac{N(s)}{D(s)} = 0 \ , \ \ \kappa > 0$$

  são diferentes daquelas apresentadas. Discuta as diferenças!

Redução de modelos

- Sendo $G(s)$ uma função de transferência assintoticamente estável de ordem elevada deseja-se aproximá-la por outra $G_{ap}(s)$ de ordem menor. A idéia é manter na função aproximada os modos de $G(s)$ mais lentos (pólos dominantes) pois os demais desaparecerão mais rapidamente. Decompondo $G(s)$ em frações parciais (pólos distintos)

$$G(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{s - p_i}$$

com $0 > \mathrm{Re}(p_1) \geq \cdots \geq \mathrm{Re}(p_n)$, se desejarmos manter os $r << n$ pólos dominantes então

$$G_{ap}(s) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta_i}{s - p_i}$$

onde $\beta_i, \; i = 1, \cdots, r$ são constantes a determinar.

Redução de modelos

- As seguintes considerações são importantes :
  - Se um pólo dominante complexo for retido em $G_{ap}(s)$, o mesmo deve ocorrer com o seu complexo conjugado.
  - Os coeficientes β_i associados a pólos complexos conjugados devem ser complexos conjugados para que os coeficientes de $G_{ap}(s)$ sejam reais.
  - É preciso determinar um critério para escolher os coeficientes $\beta_i, \; i = 1, \cdots, r$. A escolha óbvia $\beta_i = \alpha_i$ para todo $i = 1, \cdots, r$ geralmente não leva a uma boa aproximação.
- Como o transitório foi levado em conta pela escolha dos r modos mais lentos, a escolha dos coeficientes $\beta_i, \; i = 1, \cdots, r$ deve ser feita de tal forma a reduzir o erro entre a resposta de $G(s)$ e $G_{ap}(s)$ em regime permanente.

Redução de modelos

- Neste sentido, é importante notar que a decomposição em frações parciais permite determinar:
  - resposta ao degrau unitário :

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{G(0)}{s} + U(s)$$

  - resposta à rampa unitária :

$$\frac{G(s)}{s^2} = \frac{G'(0)}{s} + \frac{G(0)}{s^2} + R(s)$$

onde as inversas de $U(s)$ e $R(s)$ desaparecem no decorrer do tempo. Portanto, em regime permanente, o comportamento da resposta de $G(s)$ depende exclusivamente de $G(s)$ e de suas derivadas sucessivas calculadas em $s = 0$.

Redução de modelos

- Assim sendo, com o critério

$$G_{ap}^{(k)}(0) = G^{(k)}(0)\ ,\ \ k = 0, \cdots, r-1$$

podemos determinar os coeficientes $\beta_i \in \mathbb{C},\ \ i = 1, \cdots, r$ através da solução do sistema linear de equações :

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{p_1} & \cdots & \frac{-1}{p_r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{-(r-1)!}{p_1^r} & \cdots & \frac{-(r-1)!}{p_r^r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(0) \\ \vdots \\ G^{r-1}(0) \end{bmatrix}$$

Note que sendo $G(0)$ e as derivadas sucessivas calculadas em $s = 0$ números reais a solução do sistema acima fornecerá valores complexos conjugados de β_i associados aos pares de pólos complexos conjugados.

Exemplo

- Considere a função de transferência

$$G(s) = \frac{150(s+1)}{(s+2)(s^2+2s+2)(s^2+6s+18)}$$

que tem cinco pólos $\{-1 \pm j, -2, -3 \pm 3j\}$ e um zero $\{-1\}$. Com as derivadas sucessivas de $G(s)$ obtemos

$$G(0) = 2.0833, \;\; G^{(1)}(0) = -1.7361, \;\; G^{(2)}(0) = -0.1157$$

que permitem calcular aproximações com até três pólos dominantes. Por exemplo, para $r = 3$ determinamos a aproximação de fase não mínima

$$G_{ap} = -2.3148\frac{(s-3.445)(s+1.045)}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

Exemplo

- Na figura abaixo mostramos as respostas ao degrau unitário para $G(s)$ e para as aproximações de ordem 2 e 3. Nota-se, como requerido, que as três respostas tendem para o mesmo valor em regime permanente. Ademais, a aproximação de ordem 3 é melhor que a de ordem 2 em boa parte do tempo de simulação mas não para todo $t \geq 0$.