Matemática para Engenharia

Profa. Grace S. Deaecto

Faculdade de Engenharia Mecânica / UNICAMP
13083-860, Campinas, SP, Brasil.
grace@fem.unicamp.br

Segundo Semestre de 2013

NOTA AO LEITOR

Estas notas de aula foram inteiramente baseadas nas seguintes referências :

- J. C. Geromel e A. G. B. Palhares, "*Análise Linear de Sistemas Dinâmicos - Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*", 2ª Edição, Edgard Blucher Ltda, 2011.
- A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab, "*Signals & Systems*", 2nd Edition, *Prentice Hall*, 1997.
- S. Haykin, B. V. Veen, "*Sinais e Sistemas*", Bookman, 1999.

1. Funções de Variáveis Complexas
   - Números complexos
   - Funções de variáveis complexas
   - Limite, continuidade e derivada
   - Teorema de Cauchy
   - Integral de Cauchy
   - Série de Taylor
   - Série de Laurent
   - Teorema dos resíduos de Cauchy
   - Transformação bilinear

Variáveis complexas

Os números complexos pertencem ao conjunto $\mathbb{C}$ e são aqueles que assumem a forma genérica

$$z := x + jy$$

em que x e y pertencem ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e $j = \sqrt{-1}$ é chamada de unidade imaginária solução da equação $j^2 + 1 = 0$. Para este número, seguem as definições :

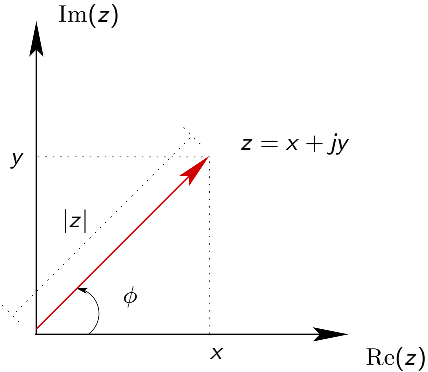
- $\mathrm{Re}(z) := x \quad \longrightarrow$ parte real de z.
- $\mathrm{Im}(z) := y \quad \longrightarrow$ parte imaginária de z.
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \longrightarrow$ módulo de z.
- $\phi(z) := \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \longrightarrow$ argumento de z.

Números complexos

Podemos verificar sem dificuldades que

$$\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\phi)\ ,\ \mathrm{Im}(z) = |z|\mathrm{sen}(\phi)$$

o que permite representar o número z na forma polar.



Números complexos

As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão são realizadas normalmente considerando que $j^2 = -1$. Exemplo :

$$(x + jy)(\alpha + j\beta) = x\alpha - y\beta + j(x\beta + y\alpha)$$

O conjugado z^* de um número complexo é definido de tal forma que $zz^* = |z|^2$, o que leva a

$$z^* = |z|\big(\cos(\phi) - j\mathrm{sen}(\phi)\big)$$

O inverso de um número complexo deve satisfazer a equação $zz^{-1} = 1$ a qual multiplicada de ambos os lados pelo conjugado de z fornece

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}\left(\cos(\phi) - j\mathrm{sen}(\phi)\right), \ |z| \neq 0$$

Números complexos

Utilizando a representação polar, para dois números complexos quaisquer z_1 e z_2, temos

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left(\cos(\phi_1 + \phi_2) + j\text{sen}(\phi_1 + \phi_2)\right)$$

Da mesma maneira, realizando a multiplicação sucessiva de z da forma

$$z^n = |z|^n \left(\cos(n\phi) + j\text{sen}(n\phi)\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

para qualquer z com módulo unitário, obtemos

Fórmula de De Moivre

$$\Big(\cos(\phi) + j\text{sen}(\phi)\Big)^n = \Big(\cos(n\phi) + j\text{sen}(n\phi)\Big)$$

Funções de variáveis complexas

Uma função de variável complexa é uma aplicação que associa para cada $z \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ um único $w = f(z) \in \mathcal{F} \subset \mathbb{C}$, ou seja

$$f(z) \ : \ \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{F} \subset \mathbb{C}$$

em que $\mathcal{D}$ é o seu domínio e $\mathcal{F}$ é a sua imagem ou contra-domínio.

Tomando $z = x + jy \in \mathcal{D}$ o valor correspondente de $f(z)$ pode ser representado como

$$f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$$

Desta forma, podemos interpretar $f(z)$ como uma função de duas variáveis que mapeia os pontos $(x,y) \in \mathcal{D}$ em $(u,v) \in \mathcal{F}$.

Funções de variáveis complexas

Um das mais importantes funções de variáveis complexas é a função exponencial

$$e^{x+jy} = e^{x}\Big(\cos(y) + j\mathrm{sen}(y)\Big)$$

a qual para $y = 0$ torna-se uma função de variável real e para $x = 0$ fornece a chamada fórmula de Euler, que permite expressar qualquer número complexo como

$$z = |z|e^{j\phi}$$

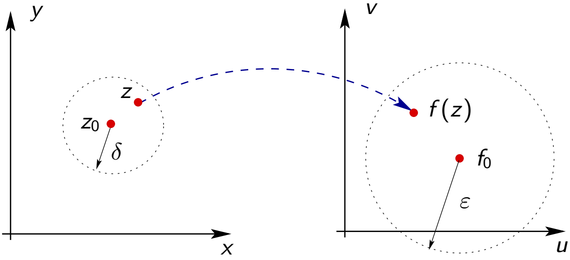
Limite, continuidade e derivada

Limite

Para $z_0 \in \mathcal{D}$, podemos calcular o limite

$$f_0 = \lim_{z \to z_0} f(z)$$

desde que para todo $\varepsilon > 0$ exista um $\delta > 0$ tais que $|f(z) - f_0| < \varepsilon$ sempre que $z \in \mathcal{D}$ e $|z - z_0| < \delta$.



Note que z pode se aproximar de z_0 por qualquer direção !

Continuidade

Seja $f(z)$ uma função definida em $\mathcal{D}$ e seja z_0 um ponto de $\mathcal{D}$. Então $f(z)$ é contínua em z_0 se $f_0 = f(z_0)$.

Podemos afirmar também que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) + j \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = f_0 = f(z_0)$$

Derivada

A derivada de uma função $f(z)$ no ponto z_0 é definida como

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

sendo que este limite deve ser invariante com a trajetória escolhida para z tender a z_0.

Limite, continuidade e derivada

A exigência de se ter o mesmo valor para o limite é equivalente a exigir que a derivada direcional seja a mesma em qualquer direção. Explicitando o limite anterior, temos

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u \Delta x + \Delta v \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} + j \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta v \Delta x - \Delta u \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

em que, as quantidades Δu e Δv são dadas por

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y \quad , \quad \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y$$

com as derivadas parciais calculadas em $x = x_0$ e $y = y_0$.

Substituindo estas quantidades no limite que define $f'(z_0)$, segue

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left\{ \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x \Delta y + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} + \right.$$

$$\left. + j\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x \Delta y - \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right\}$$

Para que $f'(z_0)$ seja constante independente da variação de Δx e Δy é preciso lembrar que a relação

$$\kappa := \frac{\alpha \Delta x^2 + \beta \Delta x \Delta y + \gamma \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

com α, β e γ reais é constante para todo $\Delta x \in \mathbb{R}$ e $\Delta y \in \mathbb{R}$ se e somente se $\beta = 0$ e $\alpha = \gamma = \kappa$.

Limite, continuidade e derivada

Logo, aplicando este resultado, temos que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y}$$

de onde seguem as condições de Cauchy-Riemann.

Condições de Cauchy-Riemann

A função $f(z)$ é diferenciável em $z = z_0$, desde que as seguintes condições sejam simultaneamente satisfeitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Limite, continuidade e derivada

Estas condições asseguram que não somente a derivada $f'(z)$ exista mas que ela também seja contínua em $z = z_0$.

Derivando-as parcialmente em relação a x e posteriormente a y, verificamos as seguintes equações de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

cujas soluções u e v são chamadas harmônicas.

Função Analítica

Uma função de variável complexa $f(z)$, definida em um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ é analítica se $f'(z)$ existir e for contínua em todo $z \in \mathcal{D}$.

Sobre a função analítica :

- A analiticidade de uma função $f(z)$ definida para todo $z \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ pode ser imediatamente constatada através da verificação das condições de Cauchy-Riemann.
- Sua derivada se expressa diretamente em função de $z \in \mathcal{D}$ como se fosse uma variável real.
  - Exemplo : A função $f(z) = z^2$ é analítica em todo plano complexo pois $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$ verificam as condições de Cauchy-Riemann para todo $z \in \mathbb{C}$ e $f'(z) = 2z$.
- A soma, o produto e a divisão de funções analíticas em $\mathcal{D}$ são analíticas, desde que na divisão não exista em $\mathcal{D}$ nenhum ponto onde o denominador se anula.
  - Função racional é analítica em todo domínio que não contenha nenhum de seus polos.

Teorema de Cauchy

Teorema de Cauchy

Se $f(z)$ for uma função analítica em um domínio $\mathcal{D} \in \mathbb{C}$ simplesmente conexo, então para toda curva fechada C que possui seus pontos e seu interior pertencentes a $\mathcal{D}$, temos

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

onde o sentido anti-horário é tomado como o sentido positivo.

Este resultado decorre do Teorema de Green para o qual a igualdade

$$\oint_C Pdx + Qdy = \int\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

é verificada com C sendo uma curva fechada tal que $\mathcal{R} = \text{int}\, C \subset \mathcal{D}$.

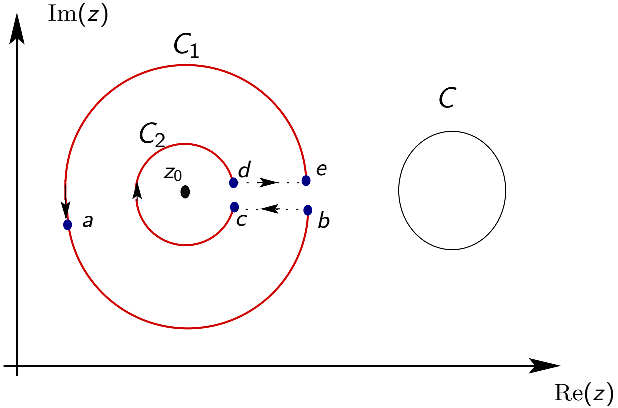
De fato, aplicando o Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned}
\oint_C f(z)dz &= \oint_C (u+jv)(dx+jdy) \\
&= \oint_C udx - vdy + j\oint_C vdx + udy \\
&= \int\int_{\mathcal{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + j\int\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy \\
&= 0
\end{aligned}$$

sendo que a última igualdade é consequência direta das condições de Cauchy-Riemann que são válidas uma vez que a função $f(z)$ é analítica para todo $\mathcal{D}$.

Se a função deixar de ser analítica em um ponto de $\mathcal{D}$, a integral sobre uma curva fechada C envolvendo este ponto não será necessariamente nula, mas será independente da escolha de C.

Considere que $f(z)$ não é analítica em z_0. Vamos portanto, considerar uma região com um furo na posição de z_0 formada pelas curvas C_1 e C_2.



Para a curva fechada C analítica em todo seu contorno e no seu interior, a integral, como esperado, é nula.

Para as curvas C_1 e C_2 a função $f(z)$ deixa de ser analítica em $z = z_0$. Entretanto, escolhendo a curva fechada *abcdea* indicada pelas setas, sua região interna pertence ao domínio $\mathcal{D}$ e, portanto, podemos aplicar o Teorema de Cauchy obtendo

$$\oint_{abcdea} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz = 0$$

pois nos caminhos *bc* e *de* a integral resultante se anula

$$\oint_{bc} f(z)dz + \oint_{de} f(z)dz = 0$$

A generalização do Teorema de Cauchy para n furos é dada por

$$\oint_{C} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)dz$$

Integral de Cauchy

Uma aplicação importante do Teorema de Cauchy é a integral de Cauchy.

Integral de Cauchy

Se $f(z)$ é analítica em uma região $\mathcal{R}$, e z_0 é qualquer ponto no interior de $\mathcal{R}$ delimitado por uma curva simples fechada C, temos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Note que, embora $f(z)$ seja analítica em z_0, o integrando $f(z)/(z - z_0)$ não é, a menos que $f(z_0) = 0$. Para resolver esta integral, vamos considerar o resultado anterior.

Integral de Cauchy

Do Teorema de Cauchy, temos

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Escolhendo a curva C_2 uma circunferência de raio r arbitrariamente pequeno centrada em z_0, tal que $z = z_0 + re^{j\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi \Rightarrow dz = jre^{j\theta} d\theta$ temos

$$\begin{aligned}
\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{j\theta})}{re^{j\theta}} jre^{j\theta} d\theta \\
&= f(z_0) \int_0^{2\pi} j d\theta \\
&= 2\pi j f(z_0)
\end{aligned}$$

Logo, denotando $C_1 = C$, uma curva fechada arbitrária envolvendo $z = z_0$, a integral de Cauchy é válida.

Série de Taylor

Série de Taylor

Uma função $f(z)$ analítica em um domínio $\mathcal{D}$, pode ser desenvolvida em série de Taylor. Ou seja, para $z_0 \in \mathcal{D}$ o valor de $f(z)$ em qualquer z da região circular $|z - z_0| < R \subset \mathcal{D}$ é dado por

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (z - z_0)^i$$

em que os coeficientes c_i são calculados através de

$$c_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{d^i f(z_0)}{dz^i}\right) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{i+1}} dz$$

Série de Taylor

De fato, a primeira igualdade é verificada, realizando derivadas sucessivas em $f(z)$ e calculando-as em $z = z_0$. Exemplo :

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \ldots$$

logo temos $f^{(1)}(z_0) = c_1$, $f^{(2)}(z_0) = 2c_2$, $f^{(3)}(z_0) = 6c_3$ e, portanto, na i-ésima derivada temos $f^{(i)}(z_0) = i!c_i$.

A segunda igualdade vem de um resultado que estabelece a convergência de uma série geométrica complexa, ou seja,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i$$

que é analítica para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$.

Série de Taylor

Logo escolhendo um $z \in R \subset \mathcal{D}$ tal que $|z - z_0| = r < R$ podemos verificar para s no seu interior $|s - z_0| < r$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-s} &= \frac{1}{z-z_0}\left(\frac{1}{1-\frac{s-z_0}{z-z_0}}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(s-z_0)^i}{(z-z_0)^{i+1}} \end{aligned}$$

uma vez que $|s - z_0|/|z - z_0| < 1$ e, portanto

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{z-s}dz \\ &= \left\{\frac{1}{2\pi j}\sum_{i=0}^{\infty}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{i+1}}dz\right\}(s-z_0)^i \end{aligned}$$

que é o desenvolvimento da série de Taylor calculado em $z = s \in \mathcal{D}$.

Exercício

- Escreva a série de Taylor de $f(z) = 3/(1-5z)^2$ em torno de $z_0 = 2$ e informe o seu raio de convergência.

  Resposta : Primeiramente, podemos notar que

$$f(z) = \left(\frac{3}{5}\right)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-5z}\right)$$

Ademais, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-5z} &= \frac{1}{1-5(z-2+2)} \\ &= \frac{-1/9}{1+(5/9)(z-2)} \\ &= (-1/9)\sum_{i=0}^{\infty}(-5/9)^i(z-2)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i+1}\left(\frac{5^i}{9^{i+1}}\right)(z-2)^i \end{aligned}$$

Exercício

- Note que a série anterior converge para todo z na região

$$|z-2| < \frac{9}{5}$$

Desta maneira, a igualdade

$$f(z) = \left(\frac{3}{5}\right) \sum_{i=1}^{\infty} i(-1)^{i+1} \left(\frac{5^i}{9^{i+1}}\right) (z-2)^{i-1}$$

é válida em todos os pontos daquela região. Além disso, no seu interior, $f(z)$ é analítica.

Série de Laurent

A chamada série de Laurent é usada quando desejamos desenvolver a função $f(z)$ em série de potências, porém em um ponto que pertence a uma região onde a função não é analítica.

Série de Laurent

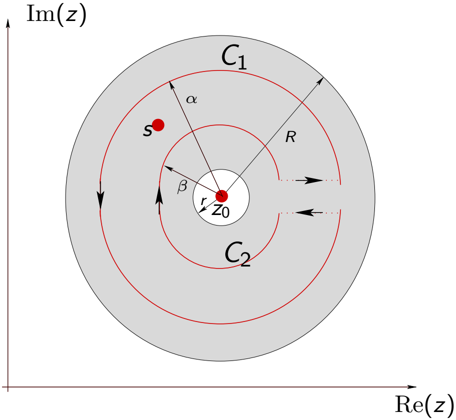
Uma função $f(z)$ analítica no interior do anel $r < |z - z_0| < R$, pode ser desenvolvida em série de Laurent. Então para todo z nesta região vale a igualdade

$$f(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i (z - z_0)^i \ , \ \ c_i = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{i+1}} dz$$

sendo C uma curva fechada inteiramente contida no anel onde $f(z)$ mantém-se analítica.

Série de Laurent

A figura a seguir destaca o anel $r < |z - z_0| < R$ em que $f(z)$ é analítica e no interior dele considera duas curvas C_1 definida por $|z - z_0| = \alpha < R$ e C_2 definida por $|z - z_0| = \beta > r$.



Série de Laurent

Como $f(z)/(z-s)$ deixa de ser analítica em $z = s$, na figura anterior, podemos escolher uma curva composta por C_1 e C_2 que envolve somente o ponto $z = s$. Neste caso a fórmula da integral de Cauchy fornece

$$f(s) = \underbrace{\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-s}dz}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-s}dz}_{I_2}$$

Note que, como s está no interior do anel, então $|s - z_0| < \alpha$ e a primeira integral pode ser calculada com o desenvolvimento em série de Taylor como feito anteriormente, o que fornece

$$I_1 = \left\{\frac{1}{2\pi j}\sum_{i=0}^{\infty}\oint_{C_1}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{i+1}}dz\right\}(s-z_0)^i$$

Série de Laurent

Para o cálculo da segunda integral, podemos também usar a propriedade de convergência da série geométrica notando que para todo $z \in C_2$ e $|s - z_0| > \beta$ a seguinte igualdade é verdadeira

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-s} &= -\frac{1}{s-z_0}\left(\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}}\right) \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(s-z_0)^{k+1}} \\ &= -\sum_{i=-\infty}^{-1} \frac{(s-z_0)^i}{(z-z_0)^{i+1}} \end{aligned}$$

a segunda igualdade vem do fato que $|z - z_0|/|s - z_0| < 1$ e, a terceira é obtida fazendo a seguinte mudança de variável $i = -k - 1$.

Série de Laurent

Logo, multiplicando por $f(z)$ e integrando sobre C_2 obtemos

$$I_2 = -\left\{ \frac{1}{2\pi j} \sum_{i=-\infty}^{-1} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{i+1}} dz \right\} (s-z_0)^i$$

Lembrando que a curva C, apresentada em vermelho na figura, está inteiramente contida no domínio onde $f(z)$ é analítica e é a composição das curvas C_1 e C_2, temos

$$f(s) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{C} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{i+1}} dz \right\} (s-z_0)^i$$

que é exatamente a representação de $f(z)$ em série de Laurent.

Teorema dos resíduos de Cauchy

Singularidade isolada

Um ponto $z = z_0$ é uma singularidade isolada, se $f(z)$ não for analítica em z_0 mas sim na sua vizinhança.

- A função exponencial $f(z) = e^z \ : \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é analítica em todo o seu domínio e pode ser desenvolvida em série de Taylor

$$e^z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$$

- A função $f(z) = z/(z-1) \ : \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pode ser desenvolvida em série de Taylor em $z_0 = 2$ para $|z-2| < 1$. Em $z_0 = 1$ a representação da função no anel $0 < |z-1| < \infty$ deve ser realizada em série de Laurent

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z-1}$$

Teorema dos resíduos de Cauchy

Resíduo

Seja $f(z)$ uma função analítica em um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ e seja $z_0 \in \mathcal{D}$ um ponto singular isolado. O resíduo $f(z)$ em z_0, denotado $R(f, z_0)$, é o coeficiente c_{-1} da expansão em série de Laurent de $f(z)$ em $z = z_0$.

Uma das propriedades mais importantes dos resíduos de uma função $f(z)$ é a seguinte integral

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \oint_C (z - z_0)^i dz \\ &= 2\pi j c_{-1} \\ &= 2\pi j R(f, z_0) \end{aligned}$$

Teorema dos resíduos de Cauchy

De fato, calculando a integral sobre uma circunferência de raio $|z - z_0| = r$ com interior contido em $\mathcal{D}$, temos que $z - z_0 = re^{j\theta}$ o que implica em $dz = rje^{j\theta}d\theta$ e

$$I = \oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^i dz = jr^{i+1} \int_0^{2\pi} e^{j(i+1)\theta} d\theta$$

note que para $i = -1$ temos que $I = 2\pi j$. Por outro lado, para $i \neq -1$, temos

$$I = \frac{r^{i+1}}{i+1}(e^{2\pi(i+1)j} - 1) = 0$$

pois $e^{2\pi(i+1)j} = 1, \ \forall i \in \mathbb{Z}$. Logo, conhecido o valor do resíduo em um determinado ponto singular isolado, a integral sobre qualquer curva C envolvendo somente este ponto é

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi j R(f, z_0)$$

Teorema dos resíduos de Cauchy

Uma generalização deste resultado é o teorema seguinte.

Teorema dos Resíduos de Cauchy

Seja uma função $f(z)$ analítica em $\mathcal{D}$, sendo $z_k \in \mathcal{D}$ para $k = 1, 2, \cdots, n$ seus pontos singulares isolados, então a seguinte igualdade se verifica

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi j \sum_{i=1}^{r} R(f, z_i)$$

sendo C uma curva fechada envolvendo os pontos $z_1, z_2, \cdots, z_r$.

Em particular, se C for escolhida de maneira a não envolver nenhum ponto singular, a integral se anula, em conformidade com o Teorema de Cauchy.

Teorema dos resíduos de Cauchy

No caso de funções racionais do tipo

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

sendo $N(z)$ e $D(z)$ polinômios de ordem m e n, respectivamente. Denotando z_k os pontos singulares isolados e decompondo $f(z)$ em frações parciais, temos

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n_d} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{f_{ki}}{(z - z_k)^i}$$

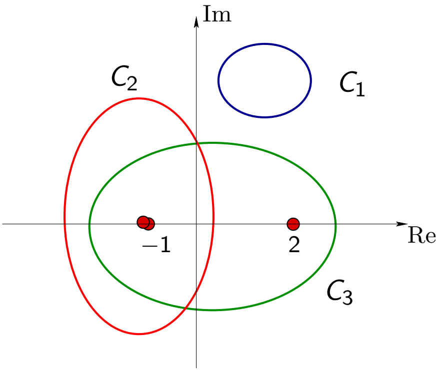
sendo m_k a multiplicidade de z_k e n_d o número de polos distintos. Seus resíduos são $R(f, z_k) = f_{k1},\ k = 1, \cdots, n_d$ e, portanto, a integral da função sobre qualquer curva fechada pode ser calculada facilmente, pois a decomposição em frações parciais fornece os resíduos em todos os polos da função racional dada.

Teorema dos resíduos de Cauchy

Calcule a seguinte integral

$$\oint_{C_i} \frac{z-1}{z^3-3z-2} dz$$

para as curvas C_1, C_2 e C_3 indicadas na figura.



Teorema dos resíduos de Cauchy

Primeiramente, podemos verificar que a função $f(z)$ é racional e analítica em todo $z \in \mathbb{C}$ com exceção dos seus polos $\{-1, 2\}$. Descrevendo $f(z)$ em frações parciais, temos

$$f(z) = \frac{z-1}{z^3 - 3z - 2} = \frac{-1/9}{(z+1)} + \frac{2/3}{(z+1)^2} + \frac{1/9}{(z-2)}$$

No qual podemos identificar os resíduos

$$R(f, -1) = -\frac{1}{9} \, , \; R(f, 2) = \frac{1}{9}$$

Desta forma, aplicando o Teorema dos Resíduos de Cauchy, temos

$$\oint_{C_1} f(z)dz = 0 \, , \; \oint_{C_2} f(z)dz = -\frac{2\pi j}{9} \, , \; \oint_{C_3} f(z)dz = 2\pi j \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) = 0$$

Transformação bilinear

Algumas vezes é interessante obtermos a imagem $\mathcal{F}$ de um determinado domínio $\mathcal{D}$ através de uma transformação $T(z)$:

$$\mathcal{F} = \{T(z) \ : \ \forall z \in \mathcal{D}\}$$

Uma transformação de grande importância em engenharia é a transformação bilinear que mapeia o semiplano esquerdo complexo dentro do círculo de raio unitário. Ela é definida como

$$w = T(z) := \frac{1+z}{1-z}$$

que é analítica em $z \in \mathbb{C}$ com exceção de $z = 1$. Sua inversa é, portanto

$$z = T^{-1}(z) := \frac{w-1}{w+1}$$

analítica para todo $z \in \mathbb{C}$ com exceção de $w = -1$

Transformação bilinear

Para determinarmos $\mathcal{F}$, podemos decompor $\mathcal{D}$ em um conjunto de retas verticais $z = \sigma + j\omega$ com $\sigma \leq 0$ fixo e $\omega \in (-\infty, \infty)$. Aplicando a transformação, obtemos