

Laboratório de Controle de Sistemas

Profa. Grace S. Deaecto

Faculdade de Engenharia Mecânica / UNICAMP
13083-860, Campinas, SP, Brasil.
grace@fem.unicamp.br

Primeiro Semestre de 2017

- 1 Experimento 10
 - Objetivo
 - Modelo matemático
 - Identificação

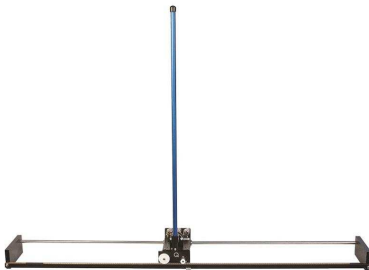
- 2 Roteiro

Experimento 10

Identificação de um pêndulo invertido acoplado a um carro

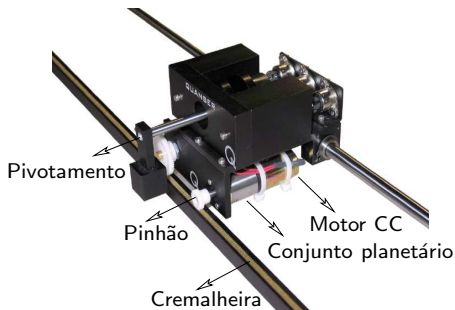
Objetivo

O sistema consiste em um carro atuado por um motor de corrente contínua. Sua montagem permite apenas a translação sobre um trilho horizontal. No carro é acoplado um pêndulo com eixo de rotação perpendicular ao movimento. Como apresentado a seguir :



Objetivo

O motor de corrente contínua que movimenta o carro é de baixa indutância e a transmissão de potência ocorre através de uma caixa de transmissão, composta por um conjunto de engrenagens em montagem planetária e pinhão cremalheira, como apresentado na figura



Objetivo

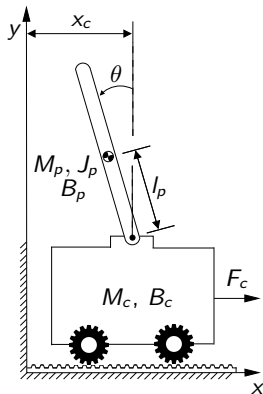
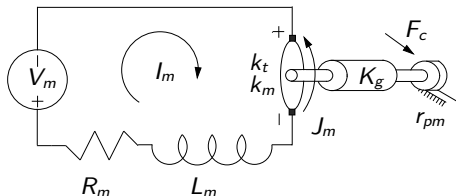
As constantes que descrevem a dinâmica do sistema são :

Símbolo	Significado
B_p	coeficiente de atrito viscoso do pêndulo
M_p e l_p	massa e comprimento do pêndulo
J_p e J_m	momento de inércia do pêndulo e do rotor
R_m e L_m	resistência e indutância de armadura do motor
k_m e k_t	constantes força contra-eletromotriz e corrente-torque do motor
η_m e η_g	eficiência do motor e da caixa de transmissão
K_g e r_{pm}	razão da transmissão e raio do pinhão
M_c e B_c	massa e coeficiente de atrito viscoso do carro

O objetivo consiste então em identificar os parâmetros elétricos e mecânicos do conjunto.

Modelo matemático

O esquema da bancada está apresentado a seguir



Modelo matemático

O seu modelo matemático é descrito pelas seguintes equações

- Circuito do motor

$$V_m - R_m I_m(t) - L_m \dot{I}_m(t) - k_m \dot{\theta}_m = 0 \quad (1)$$

- Torque gerado é proporcional à corrente elétrica

$$\tau_m = \eta_m k_t I_m \quad (2)$$

- Força e velocidade angular após transmissão pelo conjunto de engrenagens e pinhão-cremalheira

$$F_c = \frac{\eta_g k_g \tau_m}{r_{pm}}, \quad \dot{\theta}_m = \frac{k_g \dot{x}_c}{r_{pm}} \quad (3)$$

Modelo matemático

- Carro

$$M_c \ddot{x}_c + B_c \dot{x}_c + T_x + F_a = F_c \quad (4)$$

onde $F_a = \frac{\eta_g k_g \tau_m}{r_{pm}}$ é a força inercial da armadura e T_x é a força causada pela haste do pêndulo.

- Pêndulo - Translação

$$M_p \frac{d^2}{dt^2} (x_c - l_p \text{sen}(\theta)) - T_x = 0 \quad (5)$$

- Pêndulo - Rotação

$$(M_p l_p^2 + J_p) \ddot{\theta} + B_p \dot{\theta} - M_p l_p \cos(\theta) \ddot{x}_c - M_p l_p g \text{sen}(\theta) = 0 \quad (6)$$

Modelo matemático

- Desprezando a indutância L_m e utilizando as Equações (1) à (3) obtém-se

$$F_c = \frac{\eta_g k_g k_t \eta_m}{r_{pm} R_m} \left(V_m(t) - \frac{k_m k_g}{r_{pm}} \dot{x}_c \right) \quad (7)$$

- O acoplamento das Equações (4) e (5) através de T_x e a substituição de F_c por (7) resulta, juntamente com (6), nas equações não lineares do sistema

$$(M_p + \mathcal{M}_{eq}) \ddot{x}_c + B_{eq} \dot{x}_c - M_p l_p \cos(\theta) \ddot{\theta} + M_p l_p \sin(\theta) \dot{\theta}^2 = \mathcal{A}_{eq} V_m$$

$$(M_p l_p^2 + J_p) \ddot{\theta} + B_p \dot{\theta} - M_p l_p \cos(\theta) \ddot{x}_c - M_p l_p g \sin(\theta) = 0$$

$$\mathcal{M}_{eq} = M_c + \frac{\eta_g k_g^2 J_m}{r_{pm}^2}, \quad B_{eq} = B_c + \frac{\eta_g \eta_m k_g^2 k_t k_m}{r_{pm}^2 R_m}, \quad \mathcal{A}_{eq} = \frac{\eta_g \eta_m k_g k_t}{r_{pm} R_m}$$

Linearização

A linearização em torno do ponto de equilíbrio $(x_0, \theta_0) = (0, 0)$ resulta em

$$(M_p + \mathcal{M}_{eq}) \ddot{x}_c + \mathcal{B}_{eq} \dot{x}_c - M_p l_p \ddot{\theta} = \mathcal{A}_{eq} V_m \quad (8)$$

$$(M_p l_p^2 + J_p) \ddot{\theta} + B_p \dot{\theta} - M_p g l_p \theta - M_p l_p \ddot{x}_c = 0 \quad (9)$$

que, para o vetor de estados $x = [x_c \ \theta \ \dot{x}_c \ \dot{\theta}]' \in \mathbb{R}^4$, retorna as matrizes

$$A = \frac{1}{J_T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_T \\ 0 & M_p^2 l_p^2 g & -B_{eq} (M_p l_p^2 + J_p) & -B_p M_p l_p \\ 0 & M_p l_p g (\mathcal{M}_{eq} + M_p) & -B_{eq} M_p l_p & -B_p (\mathcal{M}_{eq} + M_p) \end{bmatrix}, \quad B = \frac{\mathcal{A}_{eq}}{J_T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_p l_p^2 + J_p \\ M_p l_p \end{bmatrix}$$

nas quais $J_T = \mathcal{M}_{eq} (M_p l_p^2 + J_p) + J_p M_p$.

Identificação

A partir das equações lineares do sistema apresentadas no slide anterior, observa-se :

- Os valores de M_p , l_p e g são fáceis de medir e bem definidos.
- Adote $M_p = 0.23 [kg]$, $l_p = 0.3302 [m]$ e $g = 9.81 [\frac{m}{s^2}]$.
- Para a Equação (8), do carro : Os termos \mathcal{M}_{eq} , \mathcal{B}_{eq} e \mathcal{A}_{eq} contêm constantes mecânicas e elétricas que dependem de termos desconhecidos e de condições ambiente (ex : eficiências η_m e η_g)
- Para a Equação (9), do pêndulo : B_p não é simples de medir e pode depender de fatores externos.

Realizaremos a identificação em dois testes : uma para o **carro** e outra para o **pêndulo**.

Identificação

- **Identificação do carro :**

Note que o desacoplamento do pêndulo transforma (8) em uma equação de primeira ordem do tipo

$$\tau \dot{v}_c + v_c = \kappa_0 V_m \quad (10)$$

com :

$$\dot{x}_c = v_c, \quad \kappa_0 = \frac{A_{eq}}{B_{eq}}, \quad \tau = \frac{M_{eq}}{B_{eq}}$$

Teste 1 - Remova o pêndulo do sistema

- A identificação de M_{eq} , B_{eq} e A_{eq} será baseada na resposta ao degrau de um sistema linear de primeira ordem.

Identificação

- A resposta deste sistema a uma entrada degrau com ν_0 de amplitude $V_m(t) = \nu_0, \forall t \geq 0$, é dada por :

$$v_c(t) = \kappa_0 \nu_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

permitindo a fácil identificação dos parâmetros de constante de tempo τ e do ganho κ_0 . O procedimento é composto por duas etapas bastante simples :

- Fazendo $t \rightarrow \infty$ é fácil verificar que $\kappa_0 \nu_0$ é o valor em regime permanente de $v_c(t)$;
- Para $t = \tau$ temos que $v_c(\tau) = \kappa_0 \nu_0 (1 - e^{-1})$ e, portanto, τ é o instante em que a resposta $v_c(t)$ atinge 63% do seu valor de regime.

Identificação

- Note que apenas este ensaio não permite determinar os três parâmetros \mathcal{M}_{eq} , \mathcal{B}_{eq} e \mathcal{A}_{eq} de interesse.
- Desta forma, vamos repetir o mesmo ensaio com uma massa extra M_k conhecida acoplada ao carro.
- A dinâmica (10) passa a ter uma nova constante de tempo $\tau' = \frac{\mathcal{M}_{eq} + M_k}{\mathcal{B}_{eq}}$ e ganho κ'_0 .
- Determinamos, então

$$\mathcal{B}_{eq} = \frac{M_k}{\tau' - \tau}, \quad \mathcal{M}_{eq} = \mathcal{B}_{eq}\tau, \quad \mathcal{A}_{eq} = \mathcal{B}_{eq}\kappa_0$$

- Observe que κ'_0 deve ser igual à κ_0 representando um ponto de conferência dos resultados!

Identificação

● Identificação do pêndulo :

Teste 2 - Trave o carro do sistema

- Para a identificação do pêndulo utilizaremos um novo ponto de equilíbrio $(x_c, \alpha) = (0, \theta + \pi)$ que representa o carro fixo e o pêndulo na posição vertical para baixo.
- A Equação (9) fica do tipo

$$\ddot{\alpha} + \underbrace{\left(\frac{B_p}{M_p l_p^2 + J_p} \right)}_{2\xi\omega_n} \dot{\alpha} + \underbrace{\frac{M_p l_p g}{M_p l_p^2 + J_p}}_{\omega_n^2} \alpha = 0$$

Identificação

- Desta forma, a frequência natural ω_n e o fator de amortecimento ξ que serão obtidos em seguida, levam às relações

$$J_p = \frac{M_p l_p g}{\omega_n^2} - M_p l_p^2$$
$$B_p = 2\xi\omega_n(M_p l_p^2 + J_p)$$

que junto com a equação dinâmica permitem obter todos os parâmetros desejados.

Identificação : Obtenção de ξ e de ω_n

- O procedimento a seguir permite obter os valores do coeficiente de amortecimento ξ e da frequência natural de oscilação ω_n através da medida do deslocamento angular $\alpha(t)$ descrito pela equação

$$\ddot{\alpha} + 2\xi\omega_n\dot{\alpha} + \omega_n^2\alpha = 0$$

com condição inicial $\alpha(0) = \alpha_0$ e $\dot{\alpha}(0) = 0$. Aplicando a transformada de Laplace temos

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(s) &= \frac{\alpha_0(s + 2\xi\omega_n)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \alpha_0 \left(\frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \left(\frac{\xi\omega_n}{\omega_d} \right) \frac{\omega_d}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right)\end{aligned}$$



Identificação : Obtenção de ξ e de ω_n

Identificação do pêndulo

- Aplicando a transformada de Laplace inversa, temos

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \frac{\alpha_0 e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_d} (\omega_d \cos(\omega_d t) + \xi\omega_n \text{sen}(\omega_d t)) \\ &= \frac{\alpha_0 e^{-\xi\omega_n t}}{\text{sen}(\phi)} \text{sen}(\omega_d t + \phi)\end{aligned}\quad (11)$$

com

$$\text{tg}(\phi) = \frac{\omega_d}{\xi\omega_n} = \sqrt{\xi^{-2} - 1}\quad (12)$$

para $0 < \xi < 1$.

- Derivando $\alpha(t)$ no tempo observamos que os pontos de máximo e mínimo ocorrem nos instantes que satisfazem $\text{tg}(\omega_d t + \phi) = \text{tg}(\phi)$, ou seja

$$\omega_d t_i = i\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Conceitos fundamentais

Identificação do pêndulo

- Como $\omega_d(t_{i+1} - t_i) = \pi$, para m pontos de máximo e mínimo capturados da medida do deslocamento, temos que o valor médio fornece a relação

$$\omega_d = \frac{(m-1)\pi}{\sum_{i=1}^{m-1} (t_{i+1} - t_i)} \quad (13)$$

- Utilizando (12) nestes mesmos instantes de tempo, obtemos

$$\alpha(t_i) = \alpha_0 e^{-\xi\omega_n t_i} (-1)^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

fazendo com que os pontos de máximos e mínimos satisfaçam a seguinte relação

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha(t_{i+1})|}{|\alpha(t_i)|} &= e^{-\xi\omega_n(t_{i+1}-t_i)} \\ &= e^{-\pi/\text{tg}(\phi)} \end{aligned}$$



Conceitos fundamentais

Identificação do pêndulo

- Algumas manipulações algébricas simples colocam em evidência a igualdade

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{(m-1)\pi}{\sum_{i=1}^{m-1} (\ln(|\alpha(t_i)|) - \ln(|\alpha(t_{i+1})|))} \quad (14)$$

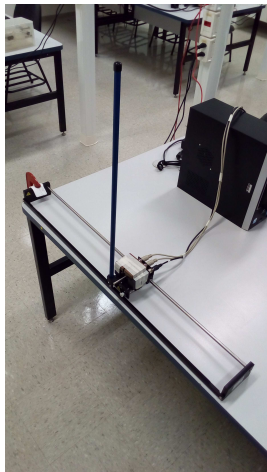
- A equação (14) junto com (12) permite obter ξ .
- Utilizando ξ e o valor de ω_d obtido em (13), obtemos ω_n .
- Aplicando este conceito para o pêndulo podemos calcular todos os parâmetros desejados.

- 1 Experimento 10
 - Objetivo
 - Modelo matemático
 - Identificação

- 2 Roteiro

Roteiro

O esquema a ser montado no laboratório é o seguinte :



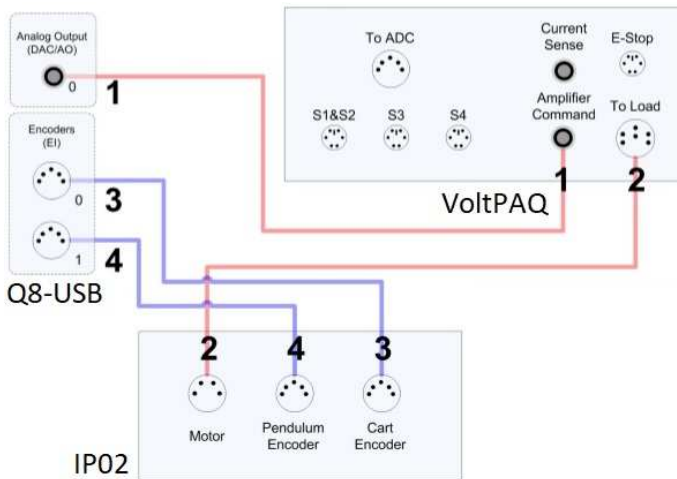
Roteiro

Materiais

- Placa de aquisição Q8-USB
- Amplificador VoltPAQ
- Kit didático IP02 contendo base, motor e pêndulo
- 2 cabos 5-pin-stereo-DIN para 5-pin-stereo-DIN
- 1 cabo 4-pin-stereo-DIN para 6-pin-stereo-DIN
- 1 cabo RCA para RCA
- 1 cabo de força para o amplificador e 1 cabo de força para a placa Q8-USB
- Software Quarc e MATLAB

Roteiro

Cabeamento



Roteiro

Identificação do carro

- 1 Realize as ligações descritas no slide anterior.
- 2 Abra o arquivo *IP02_car_identification.slx* no *SIMULINK*.
- 3 Execute os parâmetros de simulação no arquivo *setup_ip02.m*.
- 4 Coloque o carro no início do trilho. Retire o pêndulo.
- 5 Altere o valor de **Amplitude** para 3 do arquivo *SIMULINK*.
- 6 Clique no botão *Build Model* e logo após em *Connect to Target*.
- 7 Clique em *Run*, espere o fim da simulação. Guarde os valores salvos no *workspace* no arquivo *data.m*.
- 8 Repita os passos de 4 à 7 para o valor de **Amplitude** de 4 V.
- 9 Repita os passos de 4 à 8 com uma massa extra $M_k = 0.5$ [kg] acoplada conhecida e identifique os parâmetros \mathcal{M}_{eq} , \mathcal{B}_{eq} e \mathcal{A}_{eq} .

Roteiro

Identificação do pêndulo

- 1 Abra o arquivo *IP02_pendulum_identification.slx* no *SIMULINK*.
- 2 Execute os parâmetros de simulação no arquivo *setup_ip02.m*.
- 3 Coloque o carro no centro do trilho. Fixe o carro.
- 4 Clique no botão *Build Model* e logo após em *Connect to Target*.
- 5 Clique em *Run*. Levante o pêndulo até α_0 qualquer. Mantenha-o estático naquela posição e solte. Após cessar o movimento, clique em *Stop*.
- 6 Guarde os valores salvos do arquivo *data.m* no *workspace*.
- 7 Repita os passos de 5 à 7 para outros valores de α_0 e identifique os parâmetros B_p e J_p .

Roteiro

Validação

- Determine as matrizes de estado A e B e insira no arquivo *setup_ip02.m*.
- Abra o arquivo *IP02_validation.slx* no *SIMULINK* e rode *setup_ip02.m*.
- Escolha uma entrada adequada de tensão.
- Clique no botão *Build Model* e logo após em *Connect to Target*.
- Clique em *Run*. Após 10 segundos, clique em *Stop*.
- Para validar o modelo, plote no mesmo gráfico, as variáveis de estado obtidas via simulação e experimentalmente.

Obs : Para **TODOS** os ensaios sempre **verifique** os valores de saturação para o motor $V_{MAX_AMP} = 24$ e $V_{MAX_DAC} = 10$. São gerados pelo arquivo *setup_ip02.m*.