

**EA-721 : PRINCÍPIOS DE CONTROLE E SERVOMECANISMO**  
**Terceira Lista de Exercícios**

José C. Geromel e Rubens H. Korogui

**Exercício 1** Considere as funções de transferência dadas a seguir e, a partir de sua resposta em frequência estime o pico máximo do diagrama de Bode de módulo e a largura de faixa, utilizando a aproximação de segunda ordem e em seguida compare com os valores obtidos via simulação numérica.

a)  $G(s) = \frac{5(s+1)}{s^2+4s+5}$

e)  $G(s) = \frac{425(s+10)}{10(s+1)(s^2+10s+425)}$

b)  $G(s) = \frac{s+20}{4(s^2+4s+5)}$

f)  $G(s) = \frac{4250(s+1)}{(s+10)(s^2+10s+425)}$

c)  $G(s) = \frac{40}{(s+1)(s^2+4s+40)}$

g)  $G(s) = \frac{272(s+100)}{5(s+20)(s^2+8s+272)}$

d)  $G(s) = \frac{400}{(s+10)(s^2+4s+40)}$

h)  $G(s) = \frac{1360(s+20)}{(s+100)(s^2+8s+272)}$

**Exercício 2** O diagrama de Bode assintótico de módulo de um sistema de fase mínima, denotado pela função de transferência  $G(s)$ , e a estrutura de controle em malha fechada estão representados na Figura 1. Sabendo que  $G(s)$  apresenta dois polos complexos conjugados com fator de amortecimento 0,7:

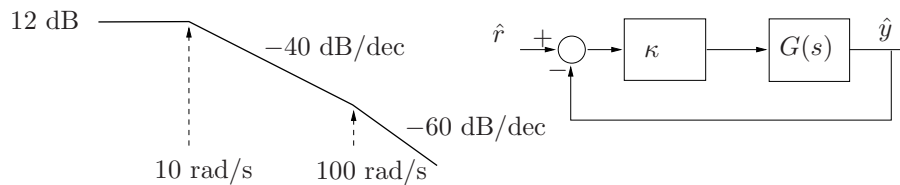


Figura 1: Diagrama de Bode em malha aberta e estrutura em malha fechada.

a) Estime, para  $\kappa = 1$ , a margem de fase, a margem de ganho e calcule as constantes de erro  $K_p$ ,  $K_v$  e  $K_a$  associadas ao sistema em malha fechada.

- b) A partir dos valores encontrados no item anterior, determine o valor do ganho  $\kappa_{osc} > 0$  de modo que o sistema em malha fechada permaneça estável.

**Exercício 3** O diagrama de Bode assintótico de módulo de um sistema de fase mínima, denotado pela função de transferência  $G(s)$ , e a estrutura de controle em malha fechada estão representados na Figura 2. Sabendo que todos os polos e zeros de  $G(s)$  são reais:

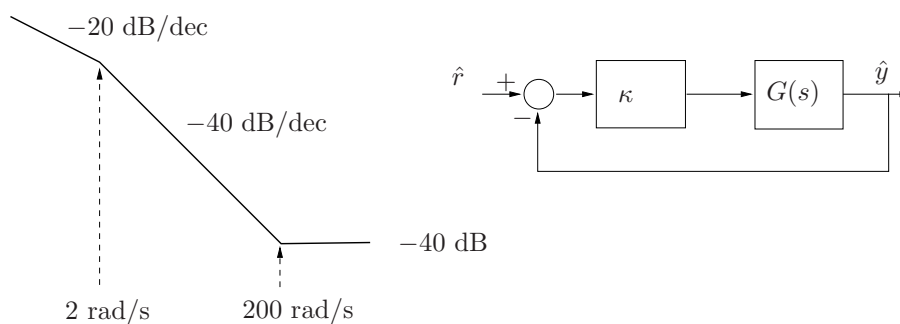


Figura 2: Diagrama de Bode em malha aberta e estrutura em malha fechada.

- a) Estime, considerando  $\kappa = 1$ , a margem de fase e a margem de ganho e calcule as constantes de erro  $K_p$ ,  $K_v$  e  $K_a$  associadas ao sistema em malha fechada.
- b) Determine os valores de  $\kappa > 0$  de modo que a margem de fase do sistema seja maior ou igual a  $45^\circ$ .

**Exercício 4** Considere um sistema de controle com realimentação unitária, segundo a Figura 3, cuja planta é dada por

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+10)^2}$$

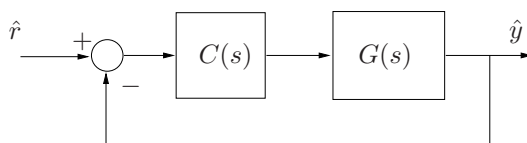


Figura 3: Sistema com realimentação unitária.

- a) Para  $C(s) = \kappa > 0$ , expresse os erros de regime, em função do tempo, para as seguintes entradas  $r_1(t) = A$ ,  $r_2(t) = At$  e  $r_3(t) = At^2$ ,  $\forall t \geq 0$ . Em seguida, determine  $\kappa_m > 0$  para que o tempo de estabilização do sistema em malha fechada seja mínimo.
- b) Utilizando um pacote computacional, verifique se a aproximação via polos dominantes para o sistema em malha fechada é válida. Altere o ganho  $\kappa > 0$  e verifique o que ocorre com o tempo de estabilização do sistema em malha fechada. É possível determinar outro ganho que melhore o tempo de estabilização?
- c) Com o controlador projetado no item b), calcule a margem de fase, a margem de ganho e a largura de faixa do sistema em malha fechada.
- d) Utilizando um controlador proporcional, é possível que o erro relativo a uma entrada do tipo degrau seja menor ou igual a 5%?

**Exercício 5** Com relação à planta do Exercício 4, deseja-se projetar um controlador  $C(s)$  de modo que o sistema em malha fechada apresente tempo de estabilização próximo ao valor encontrado anteriormente e que o erro relativo a uma entrada do tipo degrau não ultrapasse 5%.

- a) Para atendermos a especificação sobre o erro de regime podemos utilizar um controlador PI. Projete o controlador PI utilizando a regra de Ziegler-Nichols e verifique se as especificações sobre o transitório foram atendidas.
- b) Refaça o projeto do controlador PI alocando o zero do controlador de modo a cancelar o polo em  $-1$  da planta. Em seguida, imagine que o cancelamento entre o polo e o zero não é perfeito. Utilizando um pacote computacional, verifique o efeito de haver um erro de 10% no valor do polo da planta para o projeto realizado.
- c) Projete um controlador  $C(s) = k_c \frac{s+z}{s+p}$  do tipo atraso de modo que o zero do controlador cancele o polo da planta em  $-1$  e aloque convenientemente o polo do controlador. A seguir, verifique utilizando um pacote computacional se as especificações foram atendidas e analise os efeitos de um cancelamento imperfeito entre polo e zero.
- d) Projete o controlador  $C(s)$  alocando os polos dominantes do sistema em malha fechada nas posições encontradas no exercício 4 e os não dominantes com, pelo menos, 4 constantes de tempo mais rápidas e resolva a equação Diofantina. Nesse projeto, imponha que o erro em regime para a entrada degrau seja nulo.

Após finalizado cada projeto, determine as margens de ganho e de fase e a largura de faixa do sistema em malha fechada.

**Exercício 6** Denotando por  $W$  a largura de faixa do sistema de controle em malha fechada projetado no exercício anterior, implemente os controladores PI e atraso projetados no Exercício 5 utilizando um segurador de ordem zero. Faça as implementações utilizando as frequências de amostragem  $W$ ,  $5W$ ,  $10W$ ,  $20W$  e  $30W$  e compare os desempenhos de cada

implementação com o desempenho do controle a tempo contínuo. Utilize um pacote computacional para realizar esta tarefa.

**Exercício 7** Considere o sistema de controle em malha fechada representado na Figura 3, no qual a planta  $G(s)$  é definida por

$$G(s) = \frac{0,1(s + 10)}{s(s + 2)(s + 3)}$$

Supondo que se queira utilizar um controlador proporcional  $C(s) = \kappa > 0$ :

- Calcule as constantes de posição ( $K_p$ ), de velocidade ( $K_v$ ) e de aceleração ( $K_a$ ) e os erros em regime permanente para entradas do tipo degrau, rampa e parábola unitários.
- A partir das respostas do item a), qual a melhor escolha para o ganho  $\kappa$  considerando apenas o desempenho em regime permanente? Qual a consequência dessa escolha no comportamento do sistema em malha fechada durante o transitório?
- Projete  $C(s) = \kappa_m > 0$ , de modo a minimizar o tempo de estabilização e, a partir desse valor, calcule o erro à rampa unitária e estime a margem de ganho, a margem de fase e a largura de faixa do sistema em malha fechada.

**Exercício 8** Dada a planta  $G(s)$  do Exercício 7, deseja-se que a saída  $y(t)$  do sistema em malha fechada representado na Figura 3 apresente as seguintes características:

- Erro em relação à rampa unitária inferior a 0,1.
  - Tempo de estabilização menor ou igual a 4 [s].
  - Máximo pico para uma entrada degrau igual a 30%.
- Verifique se o controlador  $C(s) = \kappa_m$  projetado no Exercício 6 é capaz de atender a todas as especificações.
  - Delimite no plano complexo a região  $\Omega$  em que os polos do sistema em malha fechada devem permanecer para atender as restrições sobre o transitório de  $y(t)$ .
  - Utilizando o lugar das raízes, projete um controlador  $C(s) = k_c(s + z)$  do tipo proporcional-derivativo escolhendo adequadamente a região da reta real em que se deve alocar seu zero e, em seguida, determine o valor do ganho  $k_c$  de modo a alocar convenientemente os polos dominantes do sistema em malha fechada. Finalmente, verifique se o valor encontrado satisfaz a restrição sobre o transitório.
  - A partir do controlador PD obtido no item c), projete um controlador  $C(s) = k_c \frac{s+z}{s+p}$  do tipo avanço de modo a garantir os critérios de desempenho impostos. Mantenha o zero do controlador avanço igual ao do PD, aloque convenientemente o polo do novo controlador, de modo a não alterar em demasia as características do lugar das raízes na região de interesse e ajuste adequadamente o ganho  $k_c$ .

Após finalizado cada projeto, determine, utilizando um pacote computacional, as margens de fase e de ganho e a largura de faixa do sistema em malha fechada.

**Exercício 9** Denotando por  $W$  a largura de faixa do sistema de controle em malha fechada projetado no Exercício 8, implemente os controladores PD e avanço discretizados utilizando um segurador de ordem zero. Faça as implementações utilizando as frequências de amostragem  $W$ ,  $5W$ ,  $10W$ ,  $20W$  e  $30W$  e compare os desempenhos de cada implementação com o desempenho do controle a tempo contínuo. Utilize um pacote computacional para realizar essa tarefa.

**Exercício 10** Com relação ao projeto de um controlador para a função de transferência dada no Exercício 7, qual a consequência de se utilizar um controlador do tipo PI a fim de zerar o erro para uma entrada rampa? E se utilizarmos um controlador do tipo atraso? De um modo geral, qual a consequência de adicionarmos um polo em frequência mais baixa que a do zero de  $C(s)$ ?

**Exercício 11** Considere um sistema de controle com realimentação unitária, segundo a Figura 3, cuja planta é denotada pela função de transferência

$$G(s) = \frac{250}{s(s+5)^2}$$

- a) Considerando um controlador proporcional  $C(s) = k_p > 0$ , calcule os erros em regime permanente para entradas degrau, rampa e parábolas unitários em função de  $k_p$ . Para  $k_p \in \{0,1; 1; 10\}$ , estime as margens de fase e de ganho do sistema em malha fechada e conclua sobre sua estabilidade.
- b) Utilizando a regra de Ziegler-Nichols projete um controlador  $C(s)$  do tipo PID e estime a margem de fase e a largura de faixa do sistema em malha fechada, bem como o valor do erro em regime para a rampa unitária.
- c) Supondo que o controlador  $C(s)$ , de acordo com a estrutura da Figura 3, deva garantir que o sistema em malha fechada atenda as seguintes especificações:
  - Erro para uma entrada rampa unitária menor ou igual a 0,1.
  - Margem de fase de, no mínimo,  $30^\circ$ .
  - Largura de faixa em torno de 100 [rad/s].

verifique se um controlador proporcional  $C(s) = k_p > 0$  é capaz de atendê-las. A seguir, analise se o controlador PID projetado no item b) satisfaz as especificações.

- d) Utilizando um controlador do tipo proporcional-derivativo verifique se é possível satisfazer os critérios de desempenho. Em caso negativo proponha uma maneira de contornar o problema encontrado.

e) Refaça o projeto do item anterior empregando controladores do tipo avanço.

Em todos os itens anteriores, utilize um pacote computacional para validar os projetos realizados.

**Exercício 12** Considere a planta

$$G(s) = \frac{s + 2}{s(s + 4)(s + 5)}$$

para a qual deseja-se projetar um sistema de controle com realimentação unitária, segundo a Figura 3.

- Calcule um controlador proporcional  $C(s) = k_p > 0$  de modo que o tempo de estabilização do sistema em malha fechada seja de, no máximo, 4 [s] e calcule o erro em relação a uma entrada do tipo rampa unitária.
- Deseja-se projetar um controlador  $C(s)$  de modo a satisfazer as seguintes especificações:
  - o erro em relação à rampa não superior a 5%.
  - o tempo de estabilização próximo a 4 [s].
  - a atenuação em altas frequências de  $-40$  [dB/dec].

A partir das especificações dadas, determine a estrutura do controlador que deve ser utilizado e calcule-o. Utilize um pacote computacional para validar o projeto realizado.

**Exercício 13** Considere o sistema de controle com realimentação unitária apresentado na Figura 4

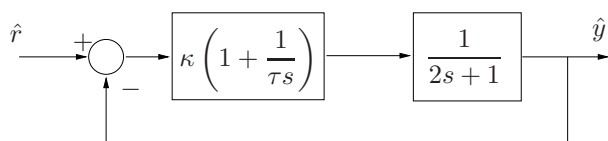


Figura 4: Sistema com dois graus de liberdade.

- Determine no plano  $\kappa \times \tau$ , para  $\kappa, \tau > 0$ , sua região de estabilidade.
- Se possível, determine  $\kappa > 0$  e  $\tau > 0$  de tal forma a satisfazer, simultaneamente, as seguintes especificações:
  - tempo de estabilização menor que 1,5 [s].

- constante de velocidade maior que 50.
- fator de amortecimento igual a 0,5.

**Exercício 14** Um sistema de controle a tempo contínuo em malha fechada, com realimentação unitária, apresenta uma planta  $G(s)$  de fase mínima cujo diagrama de Bode assintótico de módulo é dado na Figura 5. O controlador  $C(s)$  no diagrama de blocos da Figura 5 deve ser projetado de modo a garantir:

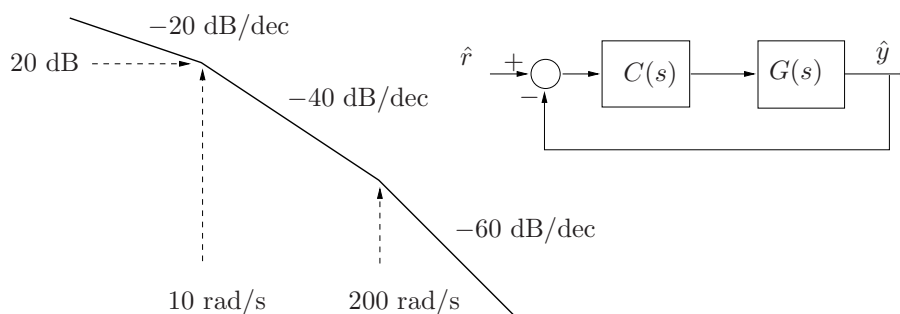


Figura 5: Diagrama de Bode em malha aberta e estrutura em malha fechada.

- precisão em regime permanente, em resposta a uma rampa, maior que 1%.
  - margem de fase não inferior a  $45^\circ$ .
  - largura de faixa entre 200 [rad/s] e 300 [rad/s].
- a) Para  $C(s) = k_p$ , determine o valor do ganho de modo a satisfazer a especificação em regime permanente e determine o correspondente valor da margem de fase.
- b) A partir do controlador determinado no item anterior, estabeleça a estrutura do controlador a ser projetado a fim de satisfazer todas as especificações e aloque convenientemente os polos e zeros de  $C(s)$ .

**Exercício 15** Considere um regulador de tensão cuja estrutura é apresentada na Figura 3, com

$$G(s) = \frac{10}{\left(1 + \frac{s}{10}\right) \left(1 + \frac{s}{2}\right)}$$

Deseja-se projetar um controlador  $C(s)$  de modo que a tensão regulada, dada pela saída  $y(t)$ , seja  $2000 \pm 0,2$  [V]. Como especificação do transitório, a margem de fase do sistema não deve ser inferior a  $35^\circ$  e deseja-se atenuar os ruídos com frequência superior a 100 [rad/s].

- a) Partindo de um controlador proporcional  $C(s) = k_p$  verifique se, ao atender a especificação em regime permanente, o transitório do sistema em malha fechada é adequado.
- b) Pensando apenas no comportamento do sistema em regime permanente, projete um controlador  $C_1(s)$  do tipo atraso de modo a regular a tensão dentro do valor especificado. Em seguida, verifique a margem de fase associada ao sistema  $C_1(s)G(s)$ .
- c) Para satisfazer a especificação da margem de fase, considere o sistema em malha aberta dado por  $C_1(s)G(s)$  e então projete um controlador  $C_2(s)$  do tipo avanço de modo a adequar o comportamento durante o transitório. Assim, o controlador para o regulador de tensão é definido por  $C(s) = C_1(s)C_2(s)$ .
- d) Verifique qual o efeito de um controlador PID, projetado através da regra de Ziegler-Nichols, no comportamento do sistema em malha fechada.

Em todos os itens, utilize um pacote computacional para verificar se as especificações do projeto foram atendidas.

**Exercício 16** Considere a planta

$$G(s) = \frac{s - 2}{(s + 1)(s + 4)(s^2 + 4s + 5)}$$

para a qual deseja-se projetar um sistema de controle com realimentação unitária, segundo a Figura 3.

- a) Considerando um controlador proporcional  $C(s) = k_p > 0$ , esboce o lugar das raízes e verifique se é possível fazer com que o sistema em malha fechada apresente tempo de estabilização menor ou igual a 4 [s].
- b) Para um controlador do tipo  $C(s) = k_c \frac{s+z}{s+p}$ , escolha convenientemente  $z$  e  $p$  e calcule  $k_c > 0$  para satisfazer a condição de tempo de estabilização menor ou igual a 4 [s].

**Exercício 17** Considere um sistema em malha aberta instável, representado pela função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5}$$

Deseja-se projetar um controlador  $C(s)$  para que o sistema de controle representado na Figura 3 possua margem de fase de  $70^\circ$ .

- a) A partir da planta fornecida e das especificações de projeto, qual a estrutura do controlador que deve ser projetada?
- b) Projete o controlador com a estrutura definida no item anterior e calcule a margem de ganho e a largura de faixa do sistema em malha fechada.



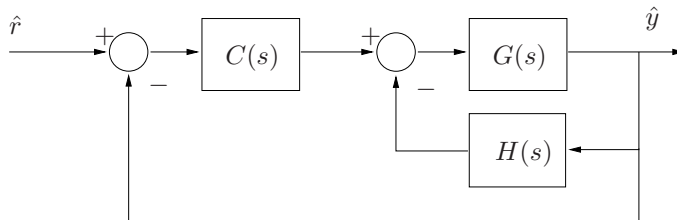


Figura 6: Sistema com duas malhas de realimentação.

**Exercício 18** Para o sistema em malha fechada da Figura 6, na qual

$$G(s) = \frac{16(s+2)}{s^2(s^2+2s+2)}$$

- Determine sua função de transferência em malha fechada.
- Considerando  $C(s) = 0,1$  e  $H(s) = s$ , determine as constantes de erro  $K_p$ ,  $K_v$  e  $K_a$ , as margens de estabilidade e a largura de faixa do sistema em malha fechada.
- Para os controladores  $C(s)$  e  $H(s)$  dados, determine a saída em regime permanente correspondente à entrada  $r(t) = 10 + 5t \forall t \geq 0$ .
- Se  $C(s) = H(s) = 1$ , é possível calcular o erro em regime para a entrada dada no item anterior?

**Exercício 19** Considerando o sistema de controle da Figura 6, uma estratégia de projeto é calcular  $H(s)$  e  $C(s)$  em duas etapas, iniciando-se com a malha de realimentação mais interna.

- Primeiramente, vamos projetar  $H(s) = k_d s$  de modo que os polos assintoticamente estáveis da função de transferência da malha de realimentação interna apresentem o menor tempo de estabilização possível. Para a malha de realimentação interna, qual o erro para uma entrada degrau?
- Na segunda etapa de projeto, queremos que  $C(s) = k_c \frac{s+z}{s+p}$ , garanta, para uma entrada degrau, um valor de pico em relação à entrada de, no máximo, 15% e tempo de estabilização não superior a 10 [s]. Utilize um pacote computacional para verificar a qualidade do projeto.

**Exercício 20** Um sistema com realimentação unitária e sinal de referência nulo, de acordo com a Figura 7, tem como função de transferência em malha aberta

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

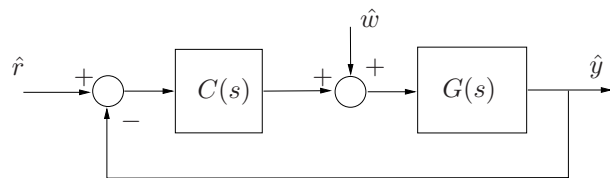


Figura 7: Sistema com realimentação unitária sujeito a ruído de atuação.

- Deseja-se projetar um controlador  $C(s)$  de forma que, para  $w(t)$  do tipo degrau, seu efeito na saída  $y(t)$  em regime permanente não ultrapasse 5% da sua amplitude. Calcule um controlador  $C(s) = k_p > 0$  que satisfaça esta especificação. É possível utilizar tal controlador?
- Projete um controlador do tipo  $C(s) = k_c \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s+p}$  de modo a satisfazer as restrições de projeto. Seria possível utilizar um controlador PID?
- Supondo um ruído  $w(t) = \text{sen}(100t)$ , qual a atenuação aplicada pelo sistema na composição do sinal de saída  $y(t)$ ?

**Exercício 21** A Figura 8 esquematiza o modelo linearizado do controle automático da tensão de um gerador síncrono, no qual a tensão de saída do gerador denotada por  $V_t(t)$  deve estar dentro de certos limites em relação à tensão de referência  $V_r(t)$ . Considere inicialmente que  $\Delta\delta(t) = 0$ .

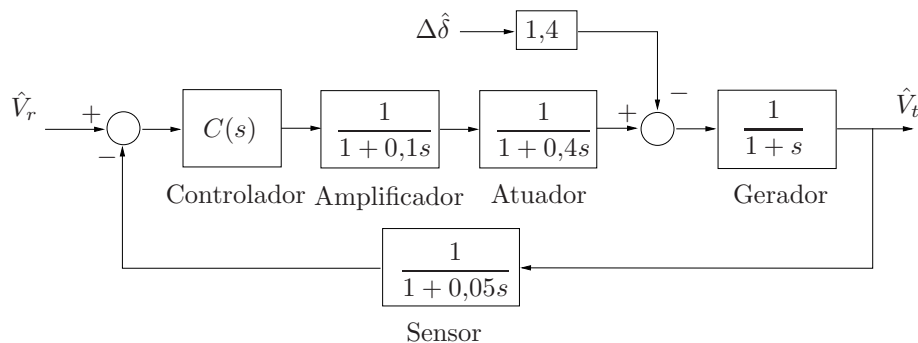


Figura 8: Regulador automático de tensão.

- a) Supondo  $C(s) = k_p$ , determine os valores de  $k_p > 0$  de modo que o sistema seja estável.
- b) Qual deve ser o valor de  $k_p$  para que a precisão da tensão de saída  $V_t(t)$  seja de 10% em relação a uma tensão  $V_r(t)$  do tipo degrau?
- c) Determine o valor de  $k_p$  de modo que o tempo de estabilização do sistema em malha fechada seja mínimo.
- d) Projete um controlador  $C(s)$  do tipo PID de modo a garantir que o tempo de estabilização de  $V_t(t)$  não ultrapasse 2 [s] e que seu valor de pico, para uma referência do tipo degrau, seja menor que 15%.

**Exercício 22** Com relação ao problema de regulação automática de tensão tratado no Exercício 21, percebemos pelo diagrama de blocos da Figura 8 que uma variação no ângulo de potência do gerador síncrono, denotada por  $\Delta\delta(t)$ , afeta a tensão de saída  $V_t(t)$ .

- a) Para uma variação de  $\Delta\delta(t) = 0,05$  calcule a variação correspondente na tensão de saída  $V_t(t)$  em função de  $C(s) = k_p$  e determine o valor de  $k_p > 0$  que minimiza a influência do distúrbio em regime permanente. Qual a consequência para o comportamento da tensão de saída durante o transitório?
- b) Recalcule a variação que o distúrbio  $\Delta\delta(t) = 0,05$  causa na saída  $V_t(t)$  em regime permanente para o controlador  $C(s)$  projetado no item d) da questão anterior.