

PRINCÍPIOS DE CONTROLE E SERVOMECANISMO

GRACE S. DEAECTO

DMC / Faculdade de Engenharia Mecânica
UNICAMP, 13083 - 860, Campinas, SP, Brasil,
grace@fem.unicamp.br

Campinas, Novembro de 2016

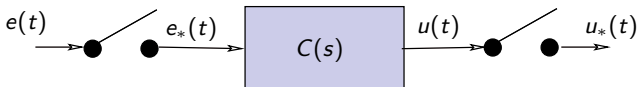
Conteúdo

- 1 Capítulo IV - Controle de Sistemas a Tempo Discreto
 - Discretização
 - Mapeamento
 - Equivalente Discreto
 - Projeto Direto do Controlador Discreto

Discretização

e $S_0(s)$ é a **transformada de Laplace do segurador de ordem zero**
 $s_0(t) = v(t) - v(t - T)$, sendo $v(t)$ o degrau unitário.

Considere agora um controlador a tempo contínuo
 $c(t) = \mathcal{L}^{-1}(C(s))$, $t \geq 0$ com entrada $e_*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e(iT)\delta(t - iT)$
 como apresentado na figura.



A sua resposta $u(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} u(t) &= c(t) * \left(\sum_{i=0}^{\infty} e(iT)\delta(t - iT) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} e(iT)c(t - iT) \end{aligned}$$

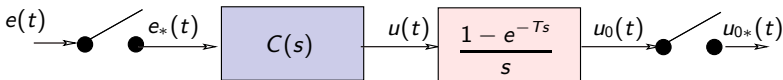
Discretização

Logo, temos

$$u(kT) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{iT}c(kT-iT) = e(kT) \bullet c(kT) \iff \hat{u}(z) = C(z)\hat{e}(z)$$

em que $C(z) = \mathcal{Z}(c(kT))$ é a **função de transferência pulsada** e \bullet representa o operador convolução discreta.

Acrescentando o segurador de ordem zero, temos



o que nos fornece

$$\begin{aligned} u_0(t) &= s_0(t) * c(t) * e_*(t) \\ &= c_0(t) * e_*(t) \end{aligned}$$

Discretização

Exemplo: Determine $C_0(z)$ para a seguinte função de transferência

$$C(s) = \frac{s + 2}{s}$$

Solução: Note que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{C(s)}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right) = (2t + 1)\nu(t)$$

e, portanto,

$$\mathcal{Z}(2kT\nu(kT) + \nu(kT)) = 2T \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1}$$

o que fornece

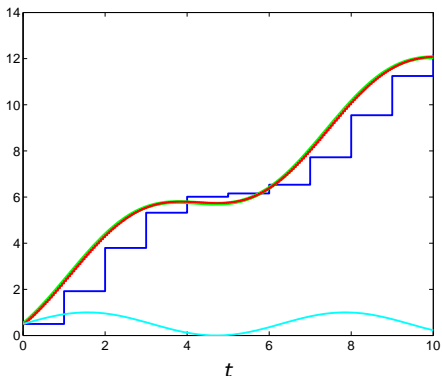
$$C_0(z) = \frac{z + 2T - 1}{z - 1} = \frac{1 + (2T - 1)z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

e a equação a diferenças correspondente

$$u(k) = u(k-1) + e(k) + (2T - 1)e(k-1)$$

Discretização

A figura abaixo mostra a resposta dos controladores $u(t)$ (em verde) e $u_0(s)$ para $T = 1$ s (em azul) e $u_0(t)$ para $T = 0.05$ s (em vermelho) à uma entrada $e(t) = 0.5 + 0.5\text{sen}(t)$ (em ciano).



A resposta é satisfatória para valores suficientemente pequenos de T .

Equivalente Discreto

No **primeiro caso** a função $C_1(s)$ deve ser discretizada da seguinte forma:

$$C_1(z) = \mathcal{Z}(\text{sen}(kT)) = \frac{\text{sen}(T)z}{z^2 - 2 \cos(T)z + 1}$$

e, como no exemplo anterior,

$$C_{2_0}(z) = \frac{z + 2T - 1}{z - 1}$$

o que para $T = 1$ s nos permite calcular

$$C(z) = C_1(z)C_{2_0}(z) = \frac{0.8415z^2 + 0.8415z}{z^3 - 2.081z^2 + 2.081z - 1}$$

Equivalente Discreto

No **segundo caso** devemos proceder da seguinte maneira

$$C(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{C_1(s)C_2(s)}{s} \right)_{t=kT} \right)$$

em que

$$\frac{C_1(s)C_2(s)}{s} = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+1}$$

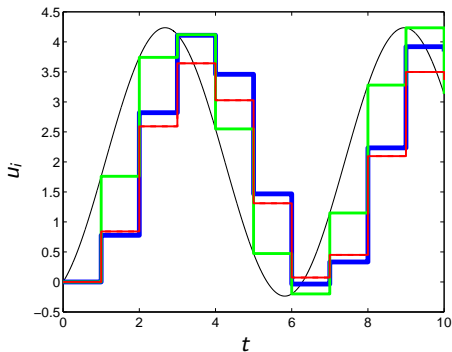
e, portanto,

$$\begin{aligned} C(z) &= \mathcal{Z} \left((2tu(t) + u(t) - \cos(t)u(t) - 2\text{sen}(t)u(t))_{t=kT} \right) = \\ &= \frac{0.7768z^2 + 1.205z - 0.1426}{z^3 - 2.081z^2 + 2.081z - 1} \end{aligned}$$

O **terceiro caso** consiste apenas em amostrar a saída de $C_2(s)$ e passá-la pelo SOZ.

Equivalente Discreto

A figura apresenta a resposta de cada um dos casos estudados a um impulso unitário aplicado na entrada.



Em preto temos o sinal contínuo sem qualquer discretização, em vermelho o Caso 1, em azul o Caso 2 e em verde o Caso 3.

Mapeamento

Considere $f(t) = e^{-at}$, $t \geq 0$, cuja Transformada de Laplace é dada por

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{s + a}$$

e considere a Transformada Z de $f(kT) = e^{-akT}$ dada por

$$\hat{f}(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

Note que seu polo é $z = e^{sT}$ com $s = -a$ que é polo do sinal contínuo. Esta relação também é válida no caso geral como enunciado a seguir:

Mapeamento z-s

A relação entre os planos s e z é dada pela seguinte expressão

$$z = e^{sT}$$

em que $T \in \mathbb{R}$ é o período de amostragem.

Mapeamento

Esta relação é muito importante e pode ser usada para **converter os requisitos de desempenho do plano s para o plano z**. De fato, retomando a função de transferência em malha fechada

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

temos que seus polos $s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ são responsáveis por definir uma região Ω onde devem ser alocados os polos dominantes do sistema.

- **Estabilidade:** O sistema a tempo contínuo é estável sempre que $\text{Re}(s) < 0$. No domínio do tempo discreto, é fácil verificar da relação $z = e^{sT}$ que $|z| = e^{\text{Re}(s)T} < 1$ indica que o sistema é **assintoticamente estável**.

Mapeamento

- **Tempo de estabilização:** Este critério é definido pela expressão

$$t_e = -\frac{\ln(\varepsilon)}{\xi\omega_n} = -\frac{\ln(\varepsilon)}{\sigma_p}$$

para um $\varepsilon > 0$ dado. Para obtermos $t_e \leq t_p$ em que t_p é um tempo de estabilização mínimo, devemos fazer $\sigma \geq \sigma_p$. No domínio do tempo discreto, temos

$$z = e^{-\sigma_p T} e^{j\omega_d T}$$

e, portanto, este requisito é satisfeito sempre que os **polos** estiverem dentro do círculo de raio $r \leq e^{-\sigma_p T}$.

Mapeamento

- **Sobrelevação:** Este critério é calculado da seguinte forma

$$\psi(\xi) = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

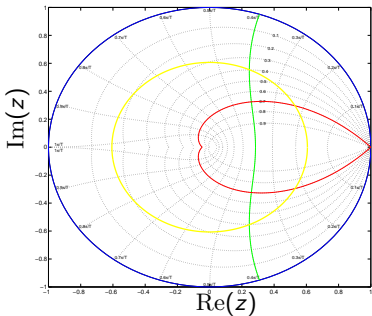
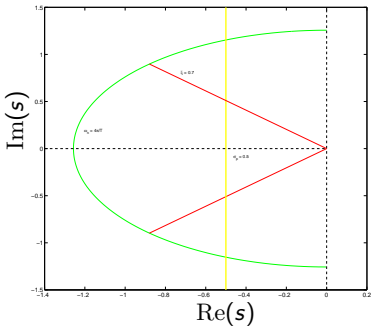
Para obtermos $\psi(\xi) \leq \psi_p(\xi)$ devemos ter $\xi > \xi_p$. No domínio do tempo discreto temos que

$$|z| = e^{-\xi\omega_n T} \text{ e } \angle z = \omega_n T \sqrt{1-\xi^2}$$

Para ξ constante e variando $\omega_n > 0$, o módulo de z decresce exponencialmente, com fase linear. Logo, as curvas relacionadas a $\xi > \xi_p$ devem estar no interior de curvas espirais logarítmicas simétricas em relação ao eixo real.

Mapeamento

A figura a seguir apresenta o plano z , à direita, com destaque para os valores $\xi = 0.7$, $\omega_n = 0.4\pi/T$, $r = e^{-0.5T}$ para $T = 1$, bem como a representação correspondente no plano s apresentado no gráfico da esquerda.



Equivalente discreto

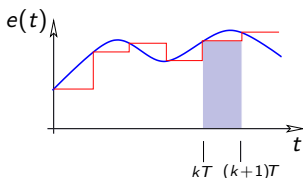
Neste momento nosso objetivo é apresentar algumas técnicas para o projeto de controladores discretos por emulação. Os seguintes passos devem ser respeitados:

- Projetar um controlador $C(s)$ de maneira a respeitar os critérios de desempenho desejados no domínio do tempo contínuo.
- Discretizar $C(s)$ de forma a obter $C(z)$
- Verificar a partir de simulação se o controlador discreto $C(z)$ atende os requisitos de projeto.

Considere a função

$$u(t) = \int_0^{\infty} e(\tau) d\tau \implies \hat{u}(s) = \left(\frac{1}{s} \right) \hat{e}(s)$$

Equivalente Discreto



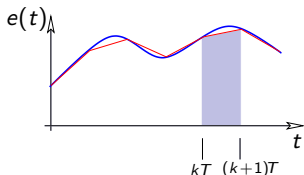
- **Euler:** Com $T > 0$ a aproximação de Euler fornece

$$u((k+1)T) = u(kT) + Te(kT)$$

cuja transformada \mathcal{Z} permite calcular $\hat{u}(z) = \left(\frac{T}{z-1}\right) \hat{e}(z)$ o que leva a

$$C(z) = C(s)|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

Equivalente Discreto



- **Tustin:** Com $T > 0$ a aproximação de Tustin fornece

$$u((k+1)T) = u(kT) + T \frac{e((k+1)T) + e(kT)}{2}$$

cuja transformada \mathcal{Z} permite calcular

$$\hat{u}(z) = \left(\frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} \right) \hat{e}(z)$$

o que leva a

$$C(z) = C(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}$$

Equivalente Discreto

- **Mapeamento de polos e zeros (MPZ):** O procedimento é descrito a seguir:
 - Mapear os polos e zeros, segundo a relação $z = e^{sT}$.
 - Ajuste o ganho de baixa frequência do controlador $C(z)$ de forma a igualá-lo com o de $C(s)$.

Equivalente Discreto

Exemplo: A aproximação de

$$C(s) = \kappa_c \frac{s + \alpha}{s(s + \beta)}$$

é dada por

$$C(z) = \kappa_d \frac{(z - e^{-\alpha T})}{(z - 1)(z - e^{-\beta T})}$$

Após eliminar os polos em $s = 0$ e $z = 1$, temos

$$\kappa_c \frac{\alpha}{\beta} = \kappa_d \left(\frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 - e^{-\beta T}} \right)$$

e, portanto

$$\kappa_d = \kappa_c \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{1 - e^{-\beta T}}{1 - e^{-\alpha T}} \right)$$

Equivalente Discreto

Os comentários seguintes referem-se à escolha do período de amostragem.

- A frequência de amostragem ω_s depende naturalmente da largura de faixa W do sistema em malha fechada a tempo contínuo.
- De forma a atender o teorema da amostragem de Nyquist-Shannon a frequência de amostragem deve obedecer o limitante inferior $\omega_s > 2W$.
- Entretanto, pode-se notar que o sistema é instável ou apresenta desempenho deteriorado para $\omega_s < 10W$.
- Resultados satisfatórios podem ser obtidos respeitando o limite $\omega_s > 30W$.
- A dificuldade de utilizar frequências de amostragem elevadas gera a necessidade de realizar o projeto diretamente no domínio do tempo discreto.

Equivalente Discreto

Exemplo: Considere um sistema a tempo contínuo com função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

para o qual foi projetado o seguinte controlador avanço

$$C(s) = \frac{8(s + 0.5)}{(s + 5)}$$

responsável por fazer com que o sistema em malha fechada respeite os seguintes critérios de desempenho $\xi \geq 0.7$ e $t_e \leq 8s$. Projete um controlador digital equivalente, de forma que o sistema em malha fechada atenda aos mesmos requisitos de desempenho.

Equivalente Discreto

A função de transferência em malha fechada deste sistema é

$$F(s) = \frac{8s + 4}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

Sua largura de faixa é de $W = 2.6 \text{ rad/s}$. A seguir apresentamos o projeto para duas frequências de amostragem diferentes, a saber, $\omega_s = 10W$ e $\omega_s = 30W$.

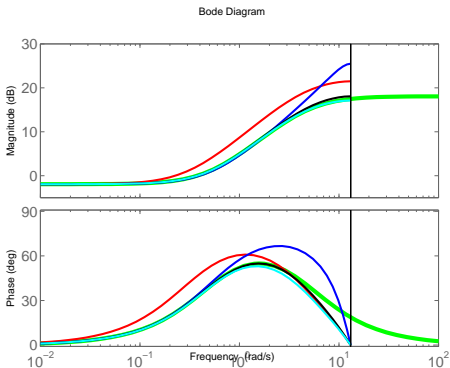
- Para $\omega_s = 10W$

A tabela apresenta os controladores discretos obtidos de acordo com os métodos apresentados.

$T = 0.24 \text{ segundos}$					
Método	Contínuo	SOZ	Euler	Tustin	MPZ
Contr.	$\frac{8s+4}{s+5}$	$\frac{8z-7.441}{z-0.3012}$	$\frac{8z-7.04}{z+0.2}$	$\frac{5.3z-4.7}{z-0.25}$	$\frac{4.944z-4.385}{z-0.3012}$

Equivalente Discreto

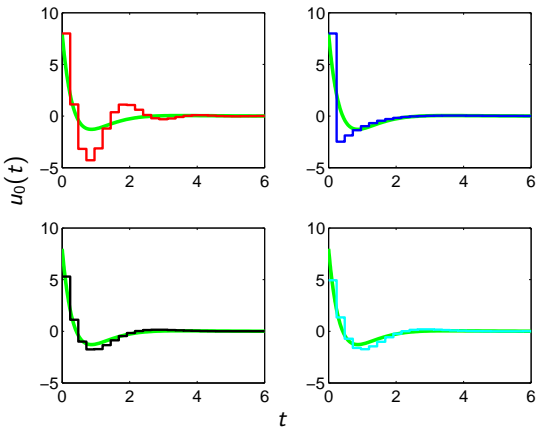
Diagrama de Bode dos controladores:



Nesta figura o controlador contínuo está apresentado em verde, SOZ em vermelho, Euler em azul, Tustin em preto e MPZ em ciano.

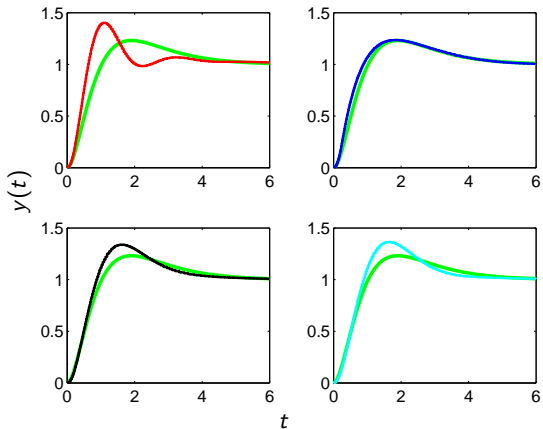
Equivalente Discreto

Esforço de controle do sistema amostrado seguindo o mesmo código de cores anterior:



Equivalente Discreto

Saída do sistema amostrado em malha fechada $y(t)$ seguindo o mesmo código de cores anterior:



Equivalente Discreto

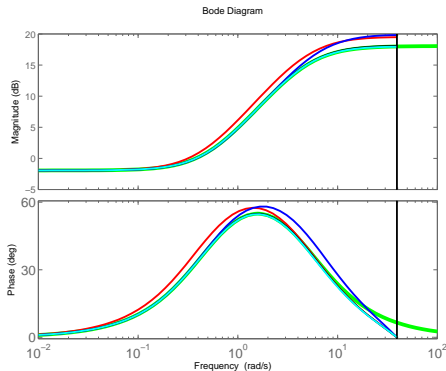
- Para $\omega_s = 30W$

A tabela apresenta os controladores discretos obtidos de acordo com os métodos apresentados.

$T = 0.08$ segundos					
Método	Contínuo	SOZ	Euler	Tustin	MPZ
Contr.	$\frac{8s+4}{s+5}$	$\frac{8z-7.736}{z-0.6703}$	$\frac{8z-7.68}{z-0.6}$	$\frac{6.8z-6.533}{z-0.6667}$	$\frac{6.726z-6.463}{z-0.6703}$

Equivalente Discreto

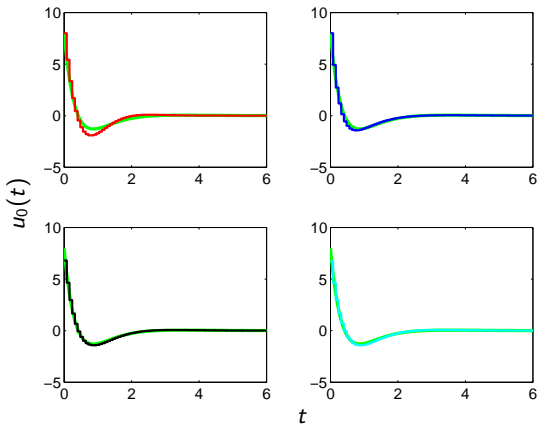
Diagrama de Bode dos controladores:



Nesta figura o **controlador contínuo** está apresentado **em verde**, **SOZ em vermelho**, **Euler em azul**, **Tustin em preto** e **MPZ em ciano**.

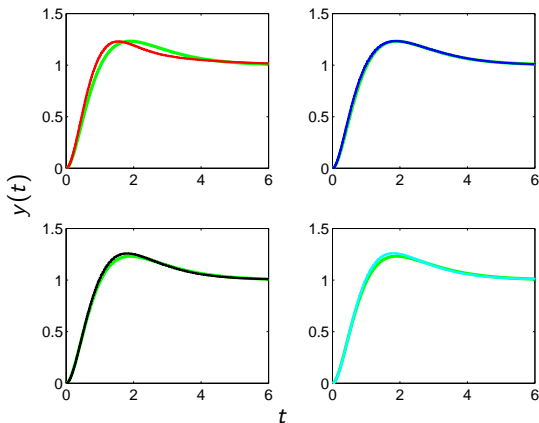
Equivalente Discreto

Esforço de controle do sistema amostrado seguindo o mesmo código de cores anterior:



Equivalente Discreto

Saída do sistema amostrado em malha fechada $y(t)$ seguindo o mesmo código de cores anterior:



Equivalente discreto

Sobre o exemplo, podemos realizar as seguintes considerações:

- O controlador a tempo discreto recupera o comportamento do controlador a tempo contínuo para T suficientemente pequeno.
- As respostas obtidas para $\omega_s = 30W$ mostraram-se adequadas para todos os métodos utilizados, tanto no domínio do tempo como no da frequência.
- As respostas obtidas para $\omega_s = 10W$, embora estáveis, apresentaram desempenho inferior àquele fornecido pelo controlador contínuo.
- Para $\omega_s = 5W$ o sistema em malha fechada com os controladores SOZ e Euler apresentou resposta instável enquanto que as respostas para os demais controladores foram insatisfatórias.

A seguir apresentamos o projeto direto do controlador discreto para qualquer período de amostragem.

Projeto Direto do Controlador Discreto

- O primeiro passo para fazer o projeto direto do controlador é encontrar a **função de transferência discreta da parte contínua**, ou seja, aquela que relaciona a entrada $u(kT)$ e a saída $y(kT)$.
- Para a planta $G(s)$ precedida pelo SOZ, temos

$$G_0(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(s)}{s} \right) \right)$$

- A função de transferência em malha fechada fica

$$F(z) = \frac{C(z)G_0(z)}{1 + C(z)G_0(z)}$$

Projeto Direto do Controlador Discreto

- Podemos utilizar o **método do lugar das raízes** de forma a alocar os polos da equação característica

$$1 + C(z)G_0(z) = 0$$

dentro da região de projeto no plano z onde os requisitos de desempenho são atingidos. As técnicas são idênticas às apresentadas nos capítulos anteriores e serão ilustradas através de um exemplo.

Classe de Controladores: Os principais controladores estão apresentados a seguir:

- Proporcional:** A equação a diferenças é

$$u(k) = \kappa e(k)$$

para a qual a função de transferência é

$$C(z) = \kappa$$

Projeto Direto do Controlador Discreto

- **Derivativo:** A equação a diferenças é

$$u(k) = \kappa T_D (e(k) - e(k - 1))$$

para a qual a função de transferência é

$$C(z) = \kappa_D \frac{z - 1}{z}, \quad \kappa_D = \kappa T_D$$

- **Integral:** A equação a diferenças é

$$u(k) = u(k - 1) + \frac{\kappa}{T_I} e(k)$$

para a qual a função de transferência é

$$C(z) = \kappa_I \frac{z}{z - 1}, \quad \kappa_I = \frac{\kappa}{T_I}$$

Projeto Direto do Controlador Discreto

Exemplo: Considere a mesma planta utilizada no exemplo anterior

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Projete um controlador digital $C(z)$ com período de amostragem $T = 1$ s de forma que $\xi \geq 0.7$ e $t_e \leq 8$ s.

A função de transferência da planta junto com o SOZ é dada por

$$\begin{aligned} G_0(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^3} \right)_{t=kT} \right) \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left(\frac{k^2 T^2}{2} \right) \\ &= \frac{T^2}{2} \frac{(z + 1)}{(z - 1)^2} \end{aligned}$$

Projeto Direto do Controlador Discreto

Da figura anterior, podemos concluir que o controlador mais simples, do tipo proporcional, não é capaz de levar as raízes da equação característica para a região de interesse.

Projetamos então com o auxílio do "sisotool" do Matlab o seguinte controlador

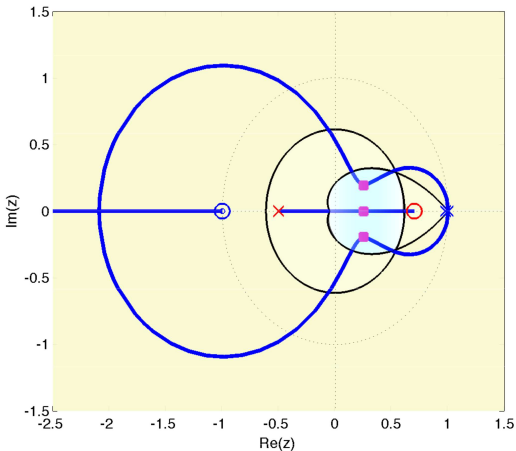
$$C(z) = 1.5 \frac{(z - 0.7)}{(z + 0.5)}$$

cuja equação a diferenças associada é dada por

$$u(k) = 1.5(e(k) - 0.7e(k - 1))) - 0.5u(k)$$

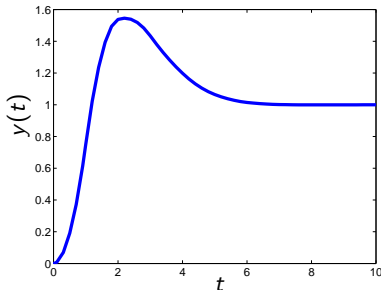
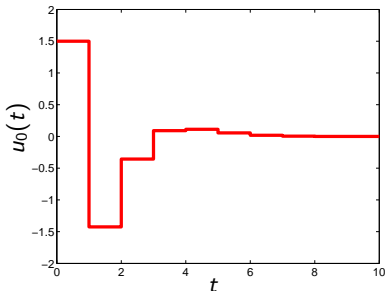
Projeto Direto do Controlador Discreto

Como podemos verificar, o controlador projetado aloca os polos do sistema na região desejada.



Projeto Direto do Controlador Discreto

Saída do sistema em malha fechada e esforço de controle para $C(z)$ com $T = 1$ s.



Vale lembrar que para os métodos anteriores, verificamos que para $T = 0.48$ s ($\omega_s = 5W$) o sistema em malha fechada é instável, para alguns métodos ou apresentou desempenhos insatisfatórios para outros.