

Eletricidade Aplicada

Profa. Grace S. Deaecto

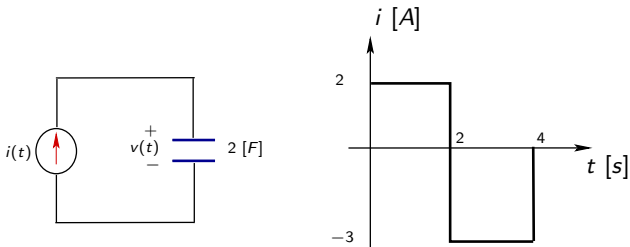
Instituto de Ciência e Tecnologia / UNIFESP
12231-280, São J. dos Campos, SP, Brasil.
grace.deaecto@unifesp.br

Novembro, 2012

1 Capacitores e Indutores

- Apresentação do capítulo
- Capacitor
- Associação de capacitores
- Exemplo - capacitores
- Indutor
- Associação de indutores
- Indutância mútua
- Exemplo - indutores
- Dualidade entre capacitores e indutores

Exemplo 1



Para o circuito apresentado, considere que o capacitor está descarregado $v(0) = 0$. Determine a tensão v indicada.

- Para $0 \leq t < 2$ [s], temos

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2} \int_0^t 2d\tau \\ &= t \text{ [V]} \end{aligned}$$

Exemplo 1

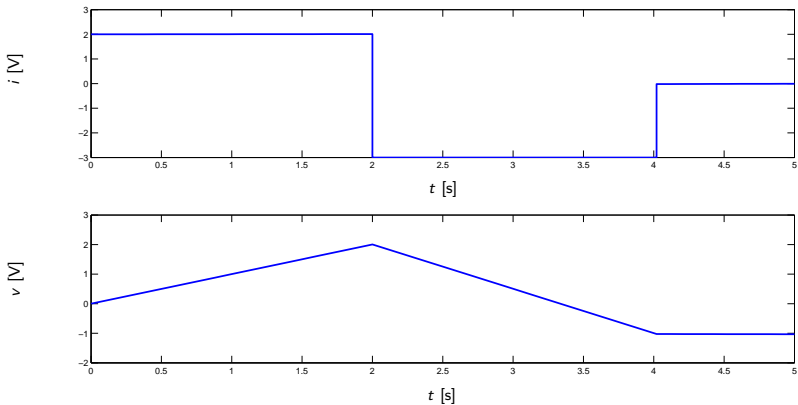
- Para $2 \leq t < 4$ [s], temos

$$\begin{aligned}v &= \frac{1}{2} \left(\int_0^2 2d\tau - \int_2^t 3d\tau \right) \\ &= -1.5t + 5 \text{ [V]}\end{aligned}$$

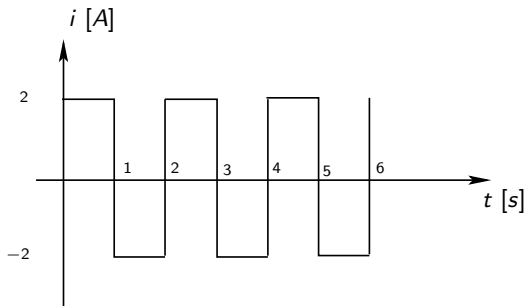
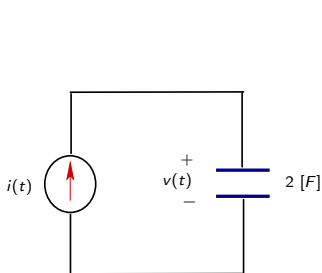
- Para $t \geq 4$ [s], temos

$$\begin{aligned}v &= \frac{1}{2} \left(\int_0^2 2d\tau - \int_2^4 3d\tau \right) \\ &= -1 \text{ [V]}\end{aligned}$$

O gráfico a seguir apresenta a corrente dada e a tensão calculada no capacitor.



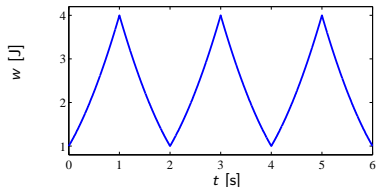
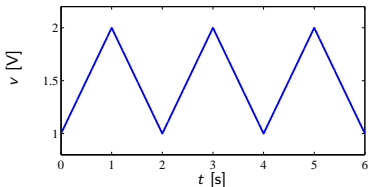
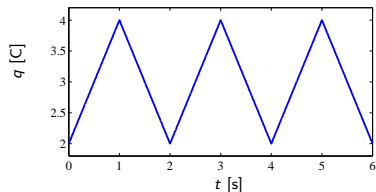
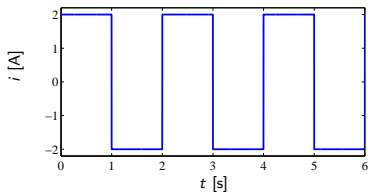
Exemplo 2



Para o circuito apresentado, considere que $v(0) = 1$. Represente graficamente, em função do tempo, as seguintes variáveis : tensão $v(t)$, carga $q(t)$ e energia $w(t)$ armazenada no capacitor.

Exemplo 2

Os gráficos obtidos estão apresentados a seguir.



Indutor

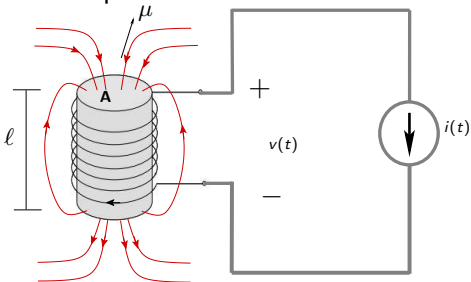
- A passagem de corrente elétrica através de um condutor gera um campo magnético em suas proximidades.
- Ademais, um fluxo magnético concatenado λ é gerado devido à passagem da corrente.
- O **indutor** é um componente elétrico constituído por espiras de um fio condutor enroladas em torno de um núcleo magnético.
- Dependendo do material magnético utilizado no núcleo o fluxo magnético pode ser ampliado.
- Se o indutor for linear, temos

$$\lambda = Li$$

em que L é a **indutância** do indutor medida em henrys (H).

Indutor

Esquema de um indutor :



- μ é a permeabilidade do material,
- l é o comprimento,
- A é a área da seção transversal,
- N é o número de espiras

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l} [H]$$

A permeabilidade do ar é $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m]$

Indutor

Tensão em um indutor linear :

$$v = \frac{d\lambda}{dt}, \quad \lambda = Li \longrightarrow v = L \frac{di}{dt}$$

Corrente em um indutor linear :

$$i = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v d\tau$$

sendo a corrente no instante $t = 0$ dada por $i(0) = \lambda(0)/L$.

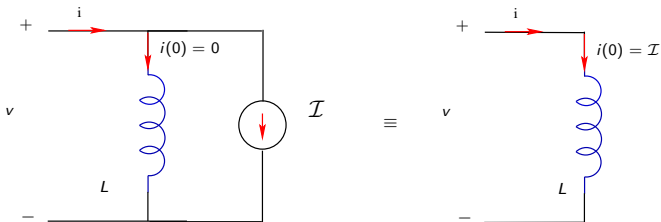
Note pela equação da tensão que se a corrente for constante, a queda de tensão sobre o indutor é nula (o indutor opera como um curto-circuito).

Indutores e fontes de corrente constantes em paralelo

Através da equação de corrente que acabamos de apresentar

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t v d\tau + \mathcal{I}$$

podemos concluir que um **indutor descarregado em paralelo com uma fonte de \mathcal{I} [A]** é equivalente a um **indutor carregado com corrente inicial $i(0) = \mathcal{I}$ [A]**. Esta equivalência é importante para a realização de associações de indutores carregados.



Energia armazenada em indutores

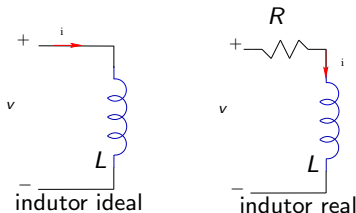
A potência fornecida a um indutor a cada instante de tempo é dada por $p = vi$. Logo, da definição $p = dw/dt$, o indutor **recebe uma energia** dada por

$$\begin{aligned}
 w(t) - w(0) &= \int_0^t p d\tau \\
 &= \int_0^t \left(L \frac{di}{d\tau} i \right) d\tau \\
 &= L \int_{i(0)}^{i(t)} i di \\
 &= \frac{Li(t)^2}{2} - \frac{Li(0)^2}{2} \text{ [J]}
 \end{aligned}$$

e, portanto, para qualquer instante de tempo $t \geq 0$ temos

$$w(t) = \frac{Li(t)^2}{2} \quad \text{ou} \quad w(t) = \frac{\lambda(t)^2}{2L} \text{ [J]}$$

Indutor real



Indutor real :

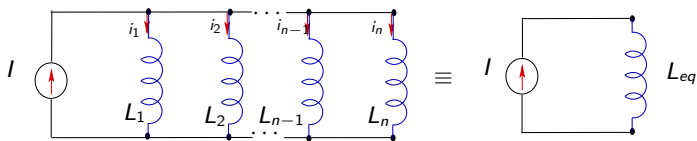
- O fio usado para enrolar o núcleo magnético possui uma resistência que não pode ser desprezada. A tensão entre os terminais do indutor é dada por

$$v = Ri + L \frac{di}{dt}$$

Ademais, note que, se a tensão v for dada, a determinação de i requer a solução de uma equação diferencial.

- Outro efeito que pode complicar o modelo do indutor é a histerese, sendo a perda de energia no núcleo magnético, proporcional à área deste ciclo.

Associação de indutores em paralelo

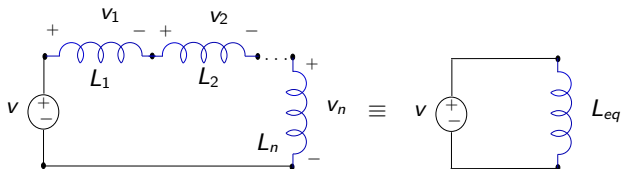


A tensão entre seus terminais é a mesma e a corrente armazenada total é a soma das correntes i_j armazenadas em cada indutor de indutância L_j para $j = 1, \dots, n$. Desta forma, temos

$$\begin{aligned}
 i &= \sum_{j=1}^n i_j \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{L_j} \int_0^t v d\tau + i_j(0) \\
 &= \frac{1}{L_{eq}} \int_0^t v d\tau + \sum_{j=1}^n i_j(0)
 \end{aligned}$$

sendo $1/L_{eq} = \sum_{i=1}^n (1/L_i)$ a indutância equivalente.

Associação de indutores em série

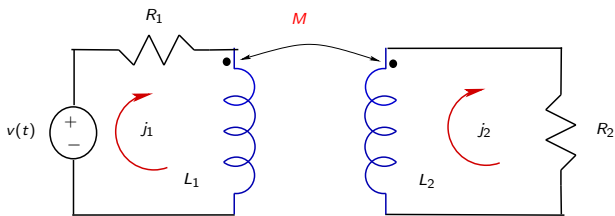


Pela lei de Kirchhoff, temos

$$\begin{aligned}
 v &= \sum_{j=1}^n v_j \\
 &= \sum_{j=1}^n L_j \frac{di}{dt} \\
 &= L_{eq} \frac{di}{dt}
 \end{aligned}$$

sendo $L_{eq} = \sum_{j=1}^n L_j$ a indutância equivalente.

Indutância mútua



Para circuitos com mais de um indutor a corrente através de um deles estabelece um fluxo magnético que concatena o outro indutor, induzindo uma tensão. Considerando, por exemplo, que dois circuitos estejam acoplados por um campo magnético, como mostrado na figura, a tensão induzida no segundo circuito está relacionada com a corrente variante no tempo do primeiro e, vice-versa, através um parâmetro conhecido como **indutância mútua M** .

Indutância mútua

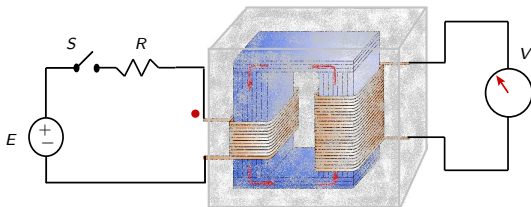
Dependendo da maneira como os núcleos magnéticos foram enrolados e dos sentidos das correntes de malha passando nos enrolamentos, os **fluxos magnéticos** podem ser **aditivos ou subtrativos**. Este conhecimento é importante para a determinação dos sinais das tensões induzidas pela indutância M .

Como, geralmente, não temos acesso à forma como os núcleos foram enrolados, utilizam-se **marcas de polaridade**, representadas por ●, para indicar o sentido dos fluxos magnéticos.

As **marcas de polaridade** indicam por qual terminal de cada um dos enrolamentos deve-se injetar corrente para a obtenção de fluxos aditivos dentro do núcleo magnético.

Alternativamente, se em um dos enrolamentos for injetada corrente no terminal marcado com a polaridade e, no outro enrolamento for retirada corrente do terminal que contém a marca de polaridade, então os fluxos magnéticos serão subtrativos.

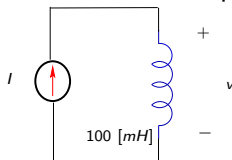
Determinação experimental das marcas de polaridade



- Considerando o acesso apenas aos terminais dos enrolamentos com os núcleos magnéticos não visíveis, conecta-se a um dos terminais uma fonte de tensão contínua, uma chave e um resistor atribuindo-se uma das marcas a este terminal e, ao outro terminal, um voltímetro como mostrado na figura.
- Quando a chave é fechada, ocorre uma deflexão do ponteiro do voltímetro. Se esta deflexão for para a direita, a segunda marca será colocada no terminal positivo do voltímetro e, no terminal negativo, caso contrário.

Exemplo 3

Considere o circuito apresentado na figura



sendo $i = 0$ para $t < 0$ e,
 $i(t) = 20te^{-5t}$ [A] para $t \geq 0$

- Para qual instante de tempo a corrente é máxima ?

$$\frac{di}{dt} = 20e^{-5t}(1 - 5t)$$

A corrente é máxima quando $di/dt = 0$, ou seja, $t = 1/5$ [s].

- Calcule a tensão $v(t)$ indicada.

$$\begin{aligned} v &= L \frac{di}{dt} \\ &= 2e^{-5t}(1 - 5t) \end{aligned}$$

Exemplo 3

- Calcule a potência p e a energia w do circuito. A potência é dada por

$$p = vi = 40te^{-10t}(1 - 5t) \text{ [W]}$$

e a energia é dada por

$$w = \frac{Li^2}{2} = 20t^2e^{-10t} \text{ [J]}$$

- Qual é a energia máxima armazenada no indutor?

$$\frac{dw}{dt} = 40te^{-10t}(1 - 5t)$$

A energia é máxima quando $dw/dt = 0$, ou seja, $t = 1/5$ [s].
Logo, $w_{max} = w(0.2) = 108.27$ [mJ].

