# Eletricidade Aplicada

**Profa. Grace S. Deaecto**

Instituto de Ciência e Tecnologia / UNIFESP
12231-280, São J. dos Campos, SP, Brasil.
grace.deaecto@unifesp.br

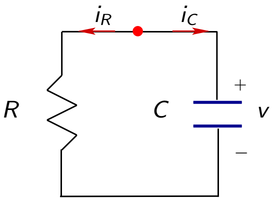
Novembro, 2012

1. Análise de circuitos RC, RL e RLC
   - Apresentação do capítulo
   - Circuito RC
   - Circuito RL
   - Circuito com comutações
   - Circuito RLC - Série e Paralelo

# Apresentação do capítulo

- Neste capítulo, trataremos da análise de circuitos RC, RL e RLC autônomos e com fontes constantes independentes.
- Circuitos autônomos são aqueles que não possuem fontes independentes.
- Sendo os capacitores e indutores armazenadores de energia, os circuitos contendo estes dispositivos não dependem somente das fontes, mas também das tensões ou cargas iniciais nos capacitores ou das correntes ou fluxos iniciais nos indutores.
- As equações que descrevem estes circuitos são equações diferenciais obtidas através da aplicação das leis de Kirchhoff considerando a relação tensão-corrente dos dispositivos armazenadores.

# Circuito RC autônomo




Aplicando a lei das correntes de Kirchhoff no circuito RC de primeira ordem com tensão inicial no capacitor $v(0) = v_0$, temos

$$i_C + i_R = 0$$

em que $i_C = Cdv/dt$ e $i_R = v/R$. Logo, podemos obter a equação diferencial ordinária de primeira ordem dada por

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0, \ \ v(0) = v_0$$

# Circuito RC autônomo

A equação anterior permite a utilização do método dos coeficientes a determinar que baseia-se no fato de que a única solução proporcional às suas derivadas é a exponencial. Logo, a solução procurada será da forma $v(t) = \kappa e^{\lambda t}$, com $\kappa \neq 0$ e $\lambda \neq 0$ constantes a serem determinadas. Assim,

$$\left(C\lambda + \frac{1}{R}\right)\kappa e^{\lambda t} = 0$$

como $e^{\lambda t} \neq 0$ e $v(0) \neq 0$, temos

$$\underbrace{C\lambda + \frac{1}{R} = 0}_{\text{equação característica}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{RC}$$

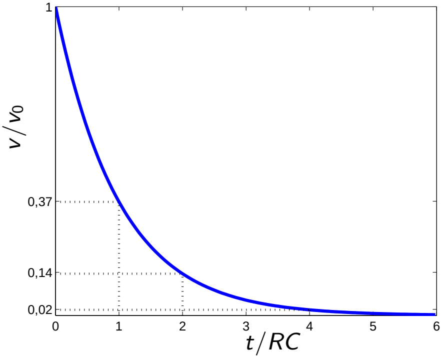
e, portanto, a solução fica

$$v(t) = \kappa e^{-\frac{1}{RC}t}$$

# Circuito RC autônomo

O valor da constante $\kappa$ é determinado de forma a satisfazer a condição inicial $v(0) = v_0$. Logo, $\kappa = v_0$ e a tensão no capacitor é dada por

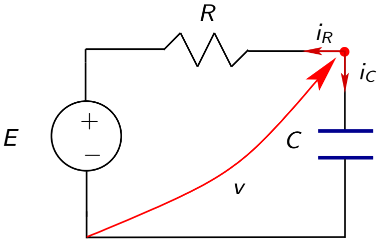
$$v(t) = v_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$




O produto $RC$ é chamado de constante de tempo.

Transcorrido $4RC$ a tensão se reduz a 2% do seu valor inicial.

# Circuito RC com fontes constantes




- Possuem pelo menos uma fonte (entrada).
- Se o circuito é linear, é sempre possível representá-lo como na figura acima, em que o estado do capacitor é obtido substituindo-se o restante do circuito pelo seu equivalente de Thévenin ou Norton. Procedendo desta forma teríamos $E = V_{th}$ e $R = R_{th}$.

# Circuito RC com fontes constantes

No circuito anterior, temos $v = E + Ri_R$ e, portanto,

$$i_R = \frac{v - E}{R}$$

Aplicando a lei das correntes de Kirchhoff $i_R + i_C = 0$ e

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = \frac{E}{R}, \; v(0) = v_0$$

Como a equação é linear com coeficientes constantes, sua solução, será do tipo $v(t) = v_h(t) + v_p(t)$, em que $v_p(t)$ é chamada de solução particular e $v_h(t)$ é chamada de solução homogênea. Como a entrada é constante, a solução particular será do tipo $v_p(t) = \beta$ com $\beta$ constante, que substituída na equação fornece $v_p(t) = \beta = E$.

# Circuito RC com fontes constantes

Para a obtenção da solução homogênea, consideramos a equação diferencial com entrada nula

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

cuja solução é $v_h(t) = \kappa e^{-\frac{t}{RC}}$ em que $\kappa$ é uma constante qualquer. A solução geral é dada por

$$v(t) = \kappa e^{-\frac{t}{RC}} + E$$

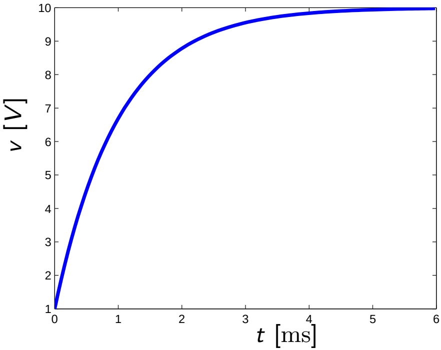
em que $\kappa$ é calculada impondo a condição inicial $v(0) = v_0$. Logo, $\kappa = v_0 - E$ e, finalmente, temos

$$v(t) = \underbrace{E}_{\text{componente forçada}} + \underbrace{\Big(v_0 - E\Big)e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{componente transitória}}$$

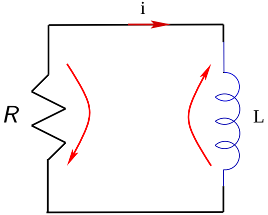
A solução também poderia ser escrita da forma seguinte

$$v(t) = \underbrace{v_0 e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{resposta à entrada nula}} + \underbrace{E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}_{\text{resposta com c.i. nulas}}$$

Para $E = 10$ $[V]$, $v_0 = 1$ $[V]$, $C = 1$ $[\mu\mathrm{F}]$ e $R = 1$ $[k\Omega]$ a tensão sobre o capacitor está apresentada no gráfico a seguir.



# Circuito RL autônomo




Aplicando a lei de Kirchhoff das tensões no circuito RL de primeira ordem, com corrente inicial no indutor $i(0) = i_0$, obtemos a seguinte equação diferencial

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0, \;\; i(0) = i_0$$

# Circuito RL autônomo

Como realizado no caso anterior, utilizaremos o método dos coeficientes a determinar para obter a sua solução. Logo, a solução procurada será $i(t) = \kappa e^{\lambda t}$, com $\kappa \neq 0$ e $\lambda \neq 0$ constantes a serem determinadas. Substituindo-a na equação diferencial, temos,

$$(L\lambda + R)\kappa e^{\lambda t} = 0$$

como $e^{\lambda t} \neq 0$ e $i(0) \neq 0$, concluímos que

$$\underbrace{L\lambda + R = 0}_{\text{equação característica}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{R}{L}$$

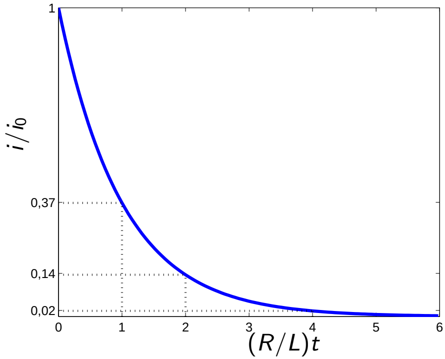
e, portanto, a solução fica

$$i(t) = \kappa e^{-\frac{R}{L}t}$$

# Circuito RL autônomo

O valor da constante $\kappa$ é determinado impondo a condição inicial $i(0) = i_0$. Logo, $\kappa = i_0$ e a corrente no indutor é dada por

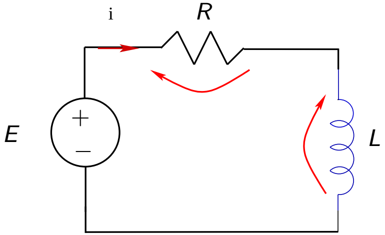
$$i(t) = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$




O quociente $L/R$ é chamado de constante de tempo.

Transcorrido $4L/R$ a corrente se reduz a 2% do seu valor inicial.

# Circuito RL com fontes constantes




A equação diferencial que descreve o circuito é

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E, \;\; i(0) = i_0$$

sendo sua solução do tipo

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t)$$

em que $i_p(t)$ é a solução particular e $i_h(t)$ é a solução homogênea.

# Circuito RL com fontes constantes

A solução particular é dada por $i_p(t) = E/R$. Para a obtenção da homogênea, consideramos

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

cuja solução é $i_h(t) = \kappa e^{-\frac{Rt}{L}}$, em que a constante $\kappa$ deve ser determinada impondo a condição inicial $i(0) = i_0$ na solução geral

$$i(t) = \kappa e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{E}{R}$$

Logo, $\kappa = i_0 - E/R$ e, finalmente, temos

$$i(t) = \underbrace{\frac{E}{R}}_{\text{componente forçada}} + \underbrace{\left(i_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{Rt}{L}}}_{\text{componente transitória}}$$

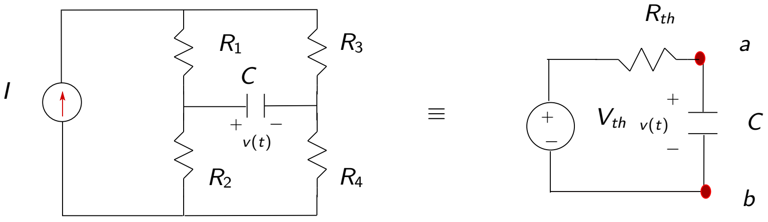
# Circuito RL com fontes constantes

A solução também poderia ser escrita da forma seguinte

$$i(t) = \underbrace{i_0 e^{-\frac{Rt}{L}}}_{\text{resposta à entrada nula}} + \underbrace{\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)}_{\text{resposta com c.i. nulas}}$$

Como já mencionado, se o circuito é linear, sempre é possível obter a tensão ou corrente do indutor ou capacitor, substituindo-se o restante do circuito por seu equivalente de Thévenin ou Norton. Ademais, pelo teorema da substituição podemos obter qualquer corrente ou tensão no circuito original substituindo o indutor ou capacitor por sua tensão ou corrente correspondente.

# Exemplo 1




Para o circuito da figura acima, deseja-se encontrar a tensão $v$ entre os terminais do capacitor $C$ com tensão inicial $v(0) = v_0$.

Solução : Note que o circuito pode ser representado pelo seu equivalente de Thévenin e, portanto, a solução pode ser obtida pelo método dos coeficientes a determinar discutido anteriormente.

# Exemplo 1

A tensão de Thévenin vista pelo capacitor é

$$V_{th} = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) I}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

Sua resistência de Thévenin é a seguinte

$$R_{th} = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

Logo, a tensão no capacitor é dada por

$$v(t) = V_{th} + \Big( v(0) - V_{th} \Big) e^{-\frac{t}{R_{th} C}}$$

Substituindo o capacitor por uma fonte de tensão de valor $v(t)$ podemos obter qualquer tensão ou corrente no circuito original.

## Solução por inspeção

Comparando a estrutura das soluções, tensão no capacitor e corrente no indutor, percebemos uma grande semelhança. Qualquer tensão ou corrente em um circuito linear de primeira ordem com fontes constantes será da forma

$$x(t) = x(\infty) + \Big(x(0) - x(\infty)\Big)e^{\lambda t}$$

em que $x(0)$ representa o valor inicial da corrente ou tensão e $x(\infty)$ seu valor de regime. Como vimos $\lambda = -1/RC$ ou $\lambda = -R/L$ e $R$ é a resistência vista pelo capacitor ou indutor quando todas as fontes independentes são anuladas.

# Circuitos com comutações

Circuitos com comutações são aqueles que contêm chaves. Para a determinação dos valores iniciais e finais das tensões e correntes em um circuito de primeira ordem com fontes constantes podemos considerar os seguintes pontos :

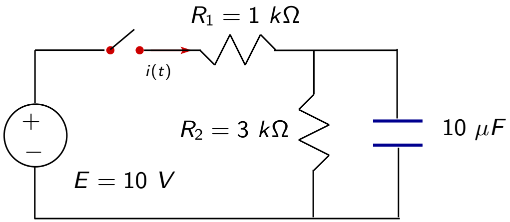
- A tensão (corrente) no capacitor (indutor) não pode variar instantâneamente. No instante inicial o capacitor (indutor) se comporta como uma fonte de tensão (corrente) e, se descarregado, como um curto-circuito (circuito aberto).
- O valor final da tensão (corrente) no capacitor (indutor) é constante, a corrente (tensão) se anula e, portanto, o capacitor (indutor) é visto como um circuito aberto (curto-circuito).

# Circuitos com comutações

A tabela a seguir resume os as afirmações apresentadas para a determinação dos valores iniciais e finais das variáveis.

| | Capacitor | Indutor |
|---|---|---|
| Descarregado | curto-circuito | circuito aberto |
| Carregado em Regime | circuito aberto | curto-circuito |

# Exemplo 2




No circuito acima o capacitor está inicialmente descarregado. A chave é fechada em $t = 0$. Determine a corrente $i(t)$.

Solução : No instante inicial em que a chave é fechada o capacitor é visto como um curto-circuito, logo

$$i(0^+) = \frac{E}{R_1} = \frac{10}{1000} = 10\ \mathrm{mA}$$

# Exemplo 2

Após muito tempo com a chave fechada, o capacitor está totalmente carregado e, portanto, é visto como um circuito aberto. Logo, a corrente final é dada por

$$i(\infty) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{10}{4000} = 2{,}5 \text{ mA}$$

A resistência equivalente de Thévenin vista pelo capacitor é

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 750 \ \Omega$$

e, consequentemente,

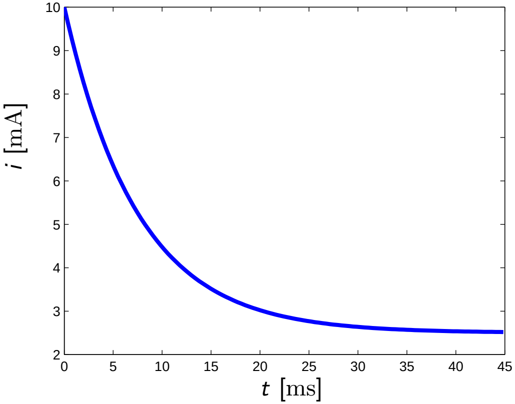
$$\lambda = -\frac{1}{RC} = -\frac{10^3}{7{,}5} \ [s^{-1}]$$

Finalmente, temos

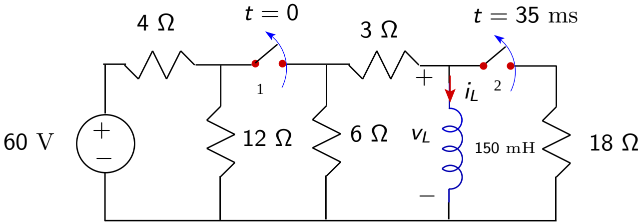
$$i(t) = 2{,}5 + 7{,}5 e^{\left(-\frac{10^3 t}{7{,}5}\right)} \ [\text{mA}]$$

# Exemplo 2

O gráfico a seguir apresenta a corrente $i(t)$.



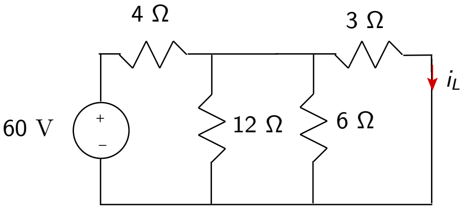
# Exemplo 3




As duas chaves apresentadas no circuito estão fechadas por um longo tempo. Em $t = 0$ a chave 1 é aberta. Após 35 [ms] a chave 2 também se abre.

1. Encontre a corrente $i_L$ para $0 \leq t < 35$ [ms].
2. Encontre a corrente $i_L$ para $t \geq 35$ [ms].
3. Qual a porcentagem da energia inicial armazenada no indutor é dissipada no resistor de 18 [Ω].

# Exemplo 3



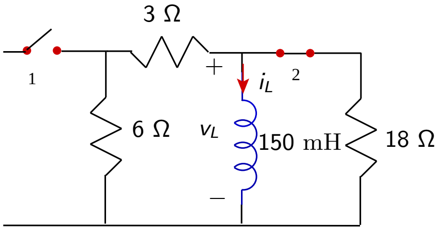

Situação anterior à abertura das chaves.

Solução : 1) Durante o período de tempo imediatamente anterior à abertura das chaves, o indutor está completamente carregado e se comporta como um curto-circuito. Logo, a corrente no indutor é dada por

$$i_L(0^-) = \frac{12//6//3}{4 + 12//6//3} \frac{60}{3} = \frac{3}{10} \frac{60}{3} = 6 \text{ [A]}$$

e, portanto, $i_L(0^-) = 6$ [A].

# Exemplo 3

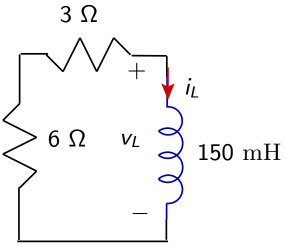



Situação com a chave 1 aberta e 2 fechada.

Como a corrente não pode variar instantâneamente no indutor, após a abertura da primeira chave $i_L(0^+) = 6$ [A]. Ademais, $i(\infty) = 0$, pois o indutor estará completamente descarregado. A resistência equivalente vista pelos seus terminais é $R = (3+6)//18 = 6$ [Ω]. Portanto, no intervalo de $0 \leq t < 35$ [ms], a corrente é dada por

$$i_L(t) = 6e^{-\frac{6}{0.15}t} \text{ [A]}$$

# Exemplo 3




Situação com as chaves 1 e 2 abertas.

2) Quando $t = 35$ [ms], o valor da corrente no indutor é

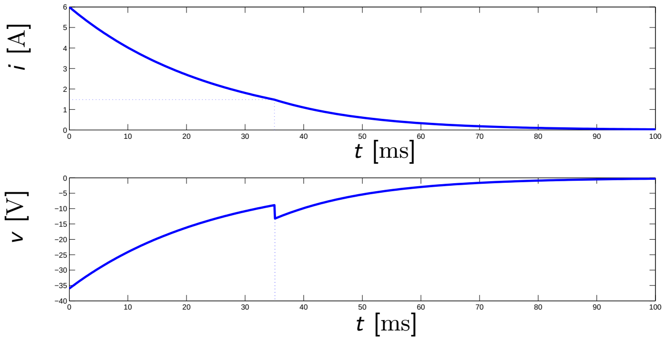
$$i_L(0.035) = 6e^{-1.4} = 1.48 \ [\mathrm{A}]$$

Sua corrente $i_L(\infty) = 0$ e a resistência equivalente vista pelos seus terminais é $R = 6 + 3 = 9$ [Ω]. Portanto, no intervalo de $t \geq 35$ [ms], a corrente é dada por

$$i_L(t) = 1.48e^{-\frac{9}{0.15}(t-0.035)} \ [\mathrm{A}]$$

# Exemplo 3

Os gráficos a seguir apresentam a corrente $i_L(t)$ e a tensão $v_L$ no indutor.




Note que a tensão foi obtida facilmente através da relação $i_L = L\frac{di_L}{dt}$.

# Exemplo 3

3) Note que o resistor de 18 [Ω] está presente no circuito somente durante o intervalo de tempo $0 \leq t < 35$ [ms] em que sua corrente é $i_L(t) = 6e^{-40t}$ [A] e sua tensão é $v_L(t) = -36e^{-40t}$ [V]. Logo,

$$p = \frac{v_L^2}{18} = 72e^{-80t}$$

e, portanto, a energia dissipada no resistor é de

$$w = \int_0^{0.035} 72e^{-80\tau} d\tau = 845.27 \ [\mathrm{mJ}]$$

A energia inicial armazenada no indutor é de

$$w_a = 0.15\frac{36}{2} = 2700 \ [\mathrm{mJ}]$$

Podemos concluir que 31.31% da energia armazenada no indutor foi dissipada no resistor de 18 [Ω].

# Circuito RLC

Como será visto a seguir, os circuitos RLC autônomos são descritos por equações diferenciais de segunda ordem do tipo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,\ \ x(0) = x_0,\ \ \frac{dx(0)}{dt} = x_1$$

em que os coeficientes $\alpha > 0$ e $\omega_0 > 0$ são positivos pois os circuitos em estudo são passivos. O parâmetro $\alpha$ é chamado de amortecimento e $\omega_0$ de frequência natural não amortecida. Como realizado anteriormente, a solução pode ser procurada como uma função exponencial do tipo

$$x(t) = \kappa e^{\lambda t}$$

com $\kappa \neq 0$ e $\lambda \neq 0$ coeficientes a serem determinados.

# Circuito RLC

Substituindo esta solução na equação diferencial, temos

$$(\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2)\kappa e^{\lambda t} = 0$$

o que implica em

$$\underbrace{\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0}_{\text{equação característica}}$$

cujas duas raízes

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$
$$\lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

reais ou complexas dão ao sistema comportamentos distintos que serão cuidadosamente analisados a seguir.

# Circuito RLC

Trataremos dos três comportamentos diferentes que dependem das raízes da equação característica.

- **Amortecimento forte :**
  Se $\alpha > \omega_0$ as raízes da equação característica $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são reais, distintas e negativas e, portanto, sua solução será

$$x(t) = \kappa_1 e^{\lambda_1 t} + \kappa_2 e^{\lambda_2 t}$$

  que tende para zero sem oscilações.

- **Amortecimento fraco :**
  Se $\alpha < \omega_0$ as raízes da equação característica ficam

$$\lambda_1 = -\alpha + j\omega_d$$
$$\lambda_2 = -\alpha - j\omega_d$$

  em que $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ é a frequência natural amortecida.
  Elas são complexas conjugadas, com parte real negativa.

# Circuito RLC

Sua solução será dada por

$$x(t) = \kappa_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + \kappa_2 e^{-(\alpha - j\omega_d)t}$$

Pela identidade de Euler temos,

$$\begin{aligned} e^{(-\alpha + j\omega_d)t} &= e^{-\alpha t}\Big(\cos(\omega_d t) + j\sin(\omega_d t)\Big) \\ e^{(-\alpha - j\omega_d)t} &= e^{-\alpha t}\Big(\cos(\omega_d t) - j\sin(\omega_d t)\Big) \end{aligned}$$

e, portanto, $x(t)$ pode ser alternativamente escrita como

$$x(t) = e^{-\alpha t}\Big((\kappa_1 + \kappa_2)\cos(\omega_d t) + j(\kappa_1 - \kappa_2)\sin(\omega_d t)\Big)$$

definindo $A = \kappa_1 + \kappa_2$ e $B = j(\kappa_1 - \kappa_2)$, a solução fica

$$x(t) = e^{-\alpha t}\Big(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\Big)$$

# Circuito RLC

A expressão deixa clara uma importante diferença entre as soluções com amortecimento forte e fraco. Nas soluções com amortecimento fraco, a solução $x(t)$ tende a zero de forma oscilatória.

- **Amortecimento crítico :**
  Se $\alpha = \omega_0$ a equação característica tem duas raízes reais, iguais e negativas $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$. Neste caso a solução da equação diferencial é

$$x(t) = \kappa_1 e^{-\alpha t} + \kappa_2 t e^{-\alpha t}$$

  e seu comportamento está no limiar de um amortecimento forte e fraco não tendo uma característica visível.

As constantes $\kappa_1$ e $\kappa_2$ podem ser determinadas resolvendo-se um sistema de segunda ordem obtido quando as condições iniciais $x(0)$ e $dx(0)/dt$ são impostas.

# Circuito RLC

Se o circuito possuir uma entrada independente $u \neq 0$,

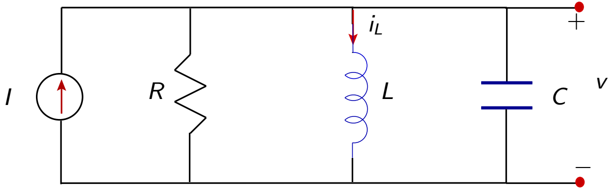
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = u, \; x(0) = x_0, \; \frac{dx(0)}{dt} = x_1$$

o procedimento para encontrar a sua solução é idêntico ao realizado para os circuitos de primeira ordem não-autônomos. Mais precisamente, a solução será do tipo $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$, sendo a particular obtida substituindo-se $x_p(t) = \beta$ na equação diferencial de forma a determinar o valor de $\beta = u/\omega_0^2$. A solução homogênea é a mesma obtida anteriormente em que os coeficientes $\kappa_1$ e $\kappa_2$ são determinados impondo as condições iniciais $x(0)$ e $dx(0)/dt$ na solução geral

$$x(t) = \kappa_1 e^{\lambda_1 t} + \kappa_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{u}{\omega_0^2}$$

A seguir, estudaremos os circuitos RLC em série e em paralelo.

# Circuito RLC em paralelo




Aplicando a lei das correntes de Kirchhoff, obtemos a seguinte equação diferencial

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + i_L = I$$

que é função de $v$ e $i_L$. Ademais, note que

$$v = L\frac{di_L}{dt} \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = L\frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

# Circuito RLC em paralelo

o que nos permite escrever

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{I}{LC}$$

com condições iniciais $i_L(0) = i_0$ e $di_L(0)/dt = v_0/L$. Vamos primeiramente estudar a sua equação homogênea (I=0). Note que a equação característica é a seguinte

$$\lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Da discussão anterior, temos que $\alpha = 1/(2RC)$ e $\omega_0^2 = 1/(LC)$.

# Circuito RLC em paralelo

A solução $i_L(t)$ terá um

- amortecimento forte se

$$\frac{1}{2RC} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- amortecimento fraco se

$$\frac{1}{2RC} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Neste caso, a energia armazenada no circuito oscila entre os dois armazenadores e cada vez que é transferida perde energia. Se o amortecimento $1/(2RC)$ é nulo, ou seja, $R = \infty$, as raízes da equação característica são puramente imaginárias e $i_L(t) = A\cos(1/\sqrt{LC}) + B\sin(1/\sqrt{LC})$ com $A$ e $B$ a serem determinados. O circuito é chamado de oscilador harmônico linear pois oscila sem perder energia.

- amortecimento crítico se

$$\frac{1}{2RC} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A solução geral da equação diferencial em estudo é

$$i_L(t) = \kappa_1 e^{\lambda_1 t} + \kappa_2 e^{\lambda_2 t} + I$$

com

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

em que $\kappa_1$ e $\kappa_2$ são determinados impondo as condições iniciais $i_L(0)$ e $di_L(0)/dt = v(0)/L$.

# Exemplo 4

Considere um circuito RLC em paralelo com $R = 50$ [Ω], $L = 10$ [H] e $C = 1$ [mF] e condições iniciais $i_L(0) = 2$ [A] e $v_L(0) = 10$ [V] excitado por uma fonte de corrente de $I = 1$ [A]. 1) Calcule a corrente através do indutor. 2) Troque o resistor para $R = 25$ [Ω] e recalcule a corrente. 3) Faça o mesmo para $R = 100$ [Ω].

Solução : 1) A equação diferencial que descreve o circuito é

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 20\frac{di_L}{dt} + 100 i_L = 100$$

Note que $1/(2RC) = 1/\sqrt{LC} = 10$ indicando que a resposta $i_L(t)$ possui amortecimento crítico. A equação característica $\lambda^2 + 20\lambda + 100 = 0$ possui duas raízes reais iguais a $\lambda_1 = \lambda_2 = -10$, sendo a parte homogênea dada por

$$i_{Lh}(t) = \kappa_1 e^{-10t} + \kappa_2 t e^{-10t}$$

# Exemplo 4

Não é difícil concluir que a solução particular é $i_{Lh}(t) = 1$ sendo a geral dada por

$$i_L(t) = \kappa_1 e^{-10t} + \kappa_2 t e^{-10t} + 1$$

Utilizando as condições iniciais $i_L(0) = 2$ [A], $di_L(0)/dt = 1$ [V/H] e sabendo-se que

$$\frac{di_L}{dt} = -10\kappa_1 e^{-10t} + \kappa_2 e^{-10t}(1 - 10t)$$

temos que $i_L(0) = \kappa_1 + 1 = 2$ onde conclui-se que $\kappa_1 = 1$ e que

$$\frac{di_L(0)}{dt} = -10\kappa_1 + \kappa_2 = 1$$

portanto $\kappa_2 = 11$. Logo, a solução geral fica

$$i_L(t) = e^{-10t} + 11te^{-10t} + 1 \ [A]$$

# Exemplo 4

4) Neste caso, note que $1/(2RC) = 20 > 10 = 1/\sqrt(LC)$ indicando que a solução $i_L(t)$ apresenta amortecimento forte. A equação característica $\lambda^2 + 40\lambda + 100 = 100$ possui duas raízes reais distintas iguais a $\lambda_1 = -37.3$ e $\lambda_2 = -2.7$. Seguindo o mesmo procedimento realizado anteriormente encontramos que a solução geral é dada por

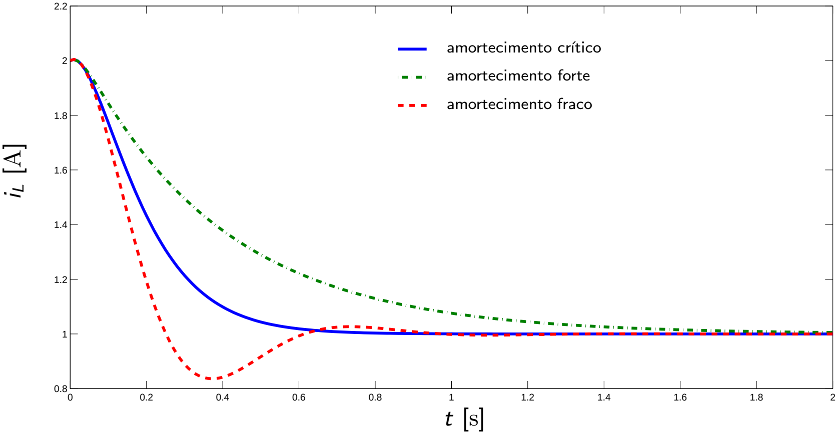
$$i_L(t) = -0.1062e^{-37.3t} + 1.1062e^{-2.7t} + 1 \ [A]$$

5) Neste caso, note que $1/(2RC) = 5 < 10 = 1/\sqrt(LC)$ indicando que a solução $i_L(t)$ apresenta amortecimento fraco. A equação característica $\lambda^2 + 10\lambda + 100 = 100$ possui duas raízes complexas conjugadas iguais a $\lambda_1 = -5 + 8.66j$ e $\lambda_2 = -5 - 8.66j$. Seguindo o mesmo procedimento realizado anteriormente encontramos que a solução geral é dada por

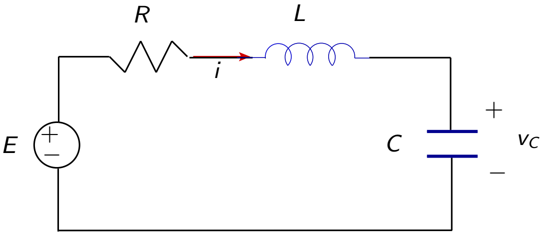
$$i_L(t) = e^{-5t}\Big(\cos(8.66t) + 0.6928\sin(8.66t)\Big) + 1 \ [A]$$

# Exemplo 4

A seguir estão apresentadas as correntes $i_L$ para cada um dos casos analisados.



# Circuito RLC em série




Aplicando a lei das tensões de Kirchhoff, obtemos a seguinte equação diferencial

$$L\frac{di}{dt} + Ri + v_C = E$$

que é função de $v_C$ e $i$. Ademais, note que

$$i = C\frac{dv_C}{dt} \Longrightarrow \frac{di}{dt} = C\frac{d^2v_C}{dt^2}$$

# Circuito RLC em série

o que nos permite escrever

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{E}{LC}$$

com condições iniciais $v_C(0) = v_0$ e $dv_C(0)/dt = i_0/C$. Vamos primeiramente estudar a sua equação homogênea (E=0). Note que a equação característica é a seguinte

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Neste caso, temos que $\alpha = R/(2L)$ e $\omega_0^2 = 1/(LC)$.

# Circuito RLC em série

A solução $v_C(t)$ terá um

- amortecimento forte se

$$\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- amortecimento fraco se

$$\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

  Neste caso, a energia armazenada no circuito oscila entre os dois armazenadores e cada vez que é transferida perde energia. Se o amortecimento $R/(2L)$ é nulo, ou seja, $R = 0$, as raízes da equação característica são puramente imaginárias e $v_C(t) = A\cos(1/\sqrt{LC}) + B\sin(1/\sqrt{LC})$ com $A$ e $B$ a serem determinados. O circuito é chamado de oscilador harmônico linear pois oscila sem perder energia.

- amortecimento crítico se

$$\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A solução geral da equação diferencial em estudo é

$$v_C(t) = \kappa_1 e^{\lambda_1 t} + \kappa_2 e^{\lambda_2 t} + E$$

com

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$
$$\lambda_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

em que $\kappa_1$ e $\kappa_2$ são determinados impondo as condições iniciais $v_C(0)$ e $dv_C(0)/dt = i(0)/C$.

# Exemplo 5

Considere um circuito RLC em série com $R = 280$ [$\Omega$], $L = 100$ [mH] e $C = 0.4$ [$\mu$F] excitado por uma fonte de tensão contínua de $E = 48$ [V]. A tensão inicial no capacitor bem como a corrente no indutor são nulas. Determine a tensão sobre o capacitor $v_C(t)$.
Solução : A equação diferencial que descreve o circuito é

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 2800\frac{dv_C}{dt} + 25 \times 10^6 v_C = 1.2 \times 10^9$$

Note que $R/(2L) = 1400 < 5000 = 1/\sqrt{LC}$ indicando que a resposta $v_C(t)$ possui amortecimento fraco. A equação característica $\lambda^2 + 2800\lambda + 25 \times 10^6 = 0$ possui raízes complexas conjugadas iguais a $\lambda_1 = -1400 + 4800j$ e $\lambda_2 = -1400 + 4800j$, sendo a parte homogênea dada por

$$v_{Ch}(t) = e^{-1400t}\Big(A\cos(4800t) + B\sin(4800t)\Big)$$

# Exemplo 5

A solução geral é da forma

$$v_C(t) = 48 + e^{-1400t}\Big(A\cos(4800t) + B\sin(4800t)\Big)$$

onde as constantes $A$ e $B$ são encontradas impondo as condições iniciais $v_C(0) = 0$ e $dv_C(0)/dt = 0$. Note que $v_C(0) = 48 + A = 0$ o que implica em $A = -48$ e $dv_C(0)/dt = -1400A + 4800B = 0$ o que implica em $B = -14$. Finalmente, a solução geral é dada por

$$v_C(t) = 48 + e^{-1400t}\Big(-48\cos(4800t) - 14\sin(4800t)\Big)\ [V]$$

# Exemplo 5

A trajetória no tempo de $v_C(t)$ está apresentada no gráfico a seguir