



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Mecânica

LUCAS LIMA DA SILVA

**Método de Kleinman-Newton generalizado para
projeto de sistemas de controle**

Orientadora: Prof^ª Dr^ª Grace Silva Deaecto

Campinas
2020

Agradecimentos

É com muita alegria que gostaria de deixar nessa seção dedicada o meu mais profundo agradecimento as pessoas que foram essenciais e que me suportaram para que eu pudesse me dedicar nos estudos e conseguir atingir os meus objetivos acadêmicos.

Em primeiro lugar gostaria de agradecer ao meu pai Antônio e a minha mãe Maria, que passaram por grandes necessidades para que eu pudesse conseguir atingir meus sonhos. O esforço deles não foi em vão e este trabalho é uma grande prova disso.

Gostaria de agradecer também ao meu tio José, considerado meu segundo pai, que desde quando eu era pequeno esteve comigo nos momentos mais difíceis e me apoiou para que eu pudesse superar e sair desses momentos com mais força.

Devo muitos agradecimentos a minha namorada Cláudia, que sempre entendeu e esteve do meu lado nos momentos em que estava elaborando este trabalho.

Não menos importante devo muito aos meus amigos William, Matheus e Gustavo, que não só nesse trabalho mais em toda minha vida acadêmica me ajudaram e foram as principais pessoas a quem recorri ajuda nos momentos mais difíceis da universidade.

Sou grato ao Prof. Dr. Erick Franklin, que me proporcionou conhecer a área acadêmica com projeto de iniciação científica e sempre manteve as portas abertas para que eu pudesse tirar dúvidas.

Gostaria de deixar aqui também toda minha gratidão aos colegas da Engenharia de Controle e Automação turma 2015, pois passamos por muitos momentos felizes e tristes juntos.

Por fim, gostaria de agradecer profundamente as pessoas mais importantes para a conclusão deste trabalho que é a Profa. Grace Deaecto e o Prof. José C. Geromel, que abriram as portas para mim neste trabalho e sempre estiveram disponíveis. Ambos são pessoas com uma sabedoria fora do comum com a qual tive o prazer de trabalhar e adquirir conhecimentos que serão levados para toda a minha vida.

A todos mencionados, um muito obrigado pela presença de vocês na minha vida.

Resumo

SILVA, Lucas Lima. *Método de Kleinman-Newton Generalizado para projeto de sistemas de controle*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2021. 59p. Trabalho de Graduação

Este trabalho tem como objetivo a implementação do método de Kleinman-Newton Generalizado proposto em (GEROMEL; DEAECTO, 2018) para tratar problemas de controle ótimo sujeitos a restrições convexas no ganho de realimentação. Para esta classe de problemas, quando alguma estrutura especial é imposta ao ganho de realimentação, é difícil encontrar, ou simplesmente não existe, uma mudança de variável biunívoca que deixa o problema convexo. Esta situação ocorre, por exemplo, no projeto de controladores dinâmicos com ordem reduzida, com ganho estático de saída e descentralizados. Neste caso, técnicas especiais devem ser aplicadas, como por exemplo o Método de Kleinman-Newton Generalizado, que consiste em definir uma série de problemas de otimização convexa, cujas soluções convergem monotonicamente para um mínimo local do problema original.

Considerando que os exemplos disponíveis em (GEROMEL; DEAECTO, 2018) para a validação do método foram restritos ao controle via realimentação estática de saída, desenvolvemos neste trabalho um algoritmo com estrutura geral que permite resolver, de forma unificada, o problema de controle de sistemas lineares e invariantes no tempo com realimentação dinâmica (incluindo ordem reduzida) e estática de saída. Alguns aprimoramentos numéricos foram incluídos e se mostraram essenciais para a eficiência do Método de Kleinman-Newton Generalizado. O código Matlab estão disponíveis online na plataforma *GitHub* para testes da comunidade científica.

Abstract

This work aims to implement the Generalized Kleinman-Newton Method proposed in (GEROMEL; DEAECTO, 2018) to cope with optimal control problems subject to convex gain constraints. To this class of problems, when some special structure is imposed on the feedback gain, it is difficult to find, or simply does not exist, a binunivocal change of variable that makes the problem convex. This situation occurs, as for instance, in the design of dynamic output feedback controllers with reduced order, static output feedback and decentralized control. In this case, special techniques must be applied, such as the Generalized Kleinman-Newton Method, which consists of defining a series of convex optimization problems, whose solutions converge monotonically to a local minimum of the original problem.

Taking into account that the validation examples available in (GEROMEL; DEAECTO, 2018) were restricted to the static output feedback control case, we have developed in this work an algorithm with a general structure that allows to solve, in a unified way, the dynamic (including reduced-order) and static output feedback control problems for linear time invariant systems. Some numerical improvements have been included and were essential for the Generalized Kleinman-Newton Method efficiency. The database used and the Matlab code are available online on the *GitHub* platform for testing by the scientific community.

Lista de Figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Conceitos de Estabilidade (SLOTINE; LI et al., 1991) | 14 |
| 4.1 | Comparação do exemplo HE1 | 35 |
| 4.2 | Comparação do exemplo AC8 | 36 |
| 4.3 | Comparação do exemplo REA3 | 37 |
| 4.4 | Comparação do GKN Method e a realimentação de estado | 38 |
| 4.5 | Comparação do <i>GKN Method</i> e a realimentação dinâmica de saída de ordem completa | 40 |
| 4.6 | Resultado para o projeto de controlador dinâmico de saída de 3 ^a ordem (Exemplo HE1) | 42 |
| 4.7 | Resultado para o projeto de controlador dinâmico de saída de 2 ^a ordem (Exemplo HE1) | 43 |
| 4.8 | Resultado para o projeto de controlador dinâmico de saída de 1 ^a ordem (Exemplo HE1) | 44 |
| 4.9 | Comparação do <i>GKN Method</i> e a realimentação dinâmica de saída de ordem completa (SCHERER Example) | 45 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|--|----|
| 4.1 | Resultados do projeto de controlador dinâmico de ordem reduzida do sistema presente em (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997) | 45 |
|-----|--|----|

Lista de Símbolos

| | |
|---------------------------|---|
| I | Matriz Identidade |
| \mathbb{R} | Conjunto dos Números Reais |
| \mathbb{R}^n | Conjunto vetorial dos números reais de dimensão n |
| $\mathbb{R}^{m \times n}$ | Conjunto matricial dos números reais de dimensão $m \times n$ |
| $x(t)$ | Vetor $\mathbb{R}^{n \times 1}$ com estados do sistema |
| $\dot{x}(t)$ | Derivada temporal de $x(t)$ |
| x_0 | Condição inicial do sistema |
| ω | Frequência |
| ϵ | Precisão |

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 9 |
| 1.1 | Estrutura do Trabalho de Graduação | 10 |
| 2 | Conceitos Fundamentais | 12 |
| 2.1 | Sistemas lineares e invariantes no tempo | 12 |
| 2.2 | Estabilidade de sistemas dinâmicos | 13 |
| 2.3 | Índices de desempenho para sistemas LITs | 15 |
| 2.3.1 | Norma \mathcal{H}_2 | 16 |
| 2.3.2 | Norma \mathcal{H}_∞ | 17 |
| 2.4 | Desigualdade matriciais lineares | 19 |
| 2.5 | Considerações do capítulo | 21 |
| 3 | Método de Kleinman-Newton Generalizado | 22 |
| 3.1 | Formulação do problema | 22 |
| 3.1.1 | Controle via realimentação estática de saída | 23 |
| 3.1.2 | Controle via realimentação dinâmica de saída | 24 |
| 3.2 | Método de Kleinman-Newton Generalizado | 26 |
| 3.2.1 | Resultados Auxiliares | 29 |
| 3.3 | Considerações do capítulo | 30 |
| 4 | Implementação do Método de Kleinman-Newton Generalizado | 31 |
| 4.1 | O Algoritmo | 31 |
| 4.1.1 | Realimentação Estática de Saída | 34 |
| 4.1.2 | Exemplo HE1 | 34 |
| 4.1.3 | Exemplo AC8 | 35 |
| 4.1.4 | Exemplo REA3 | 36 |
| 4.1.5 | Exemplo Scherer | 37 |
| 4.2 | Realimentação Dinâmica de Saída | 39 |
| 4.2.1 | Exemplo HE1 - Realimentação dinâmica de saída | 40 |
| 4.2.2 | Exemplo Scherer - Realimentação dinâmica de saída | 44 |
| 4.3 | Considerações do capítulo | 46 |
| | Conclusão | 47 |
| | Referências bibliográficas | 48 |
| A | Código | 50 |
| A.1 | Etapa 1 - Entrada de dados | 50 |
| A.2 | Etapa 2 - Preparação de dados | 50 |

| | | |
|-----|----------------------------------|----|
| A.3 | Etapa 3 - Factibilidad | 53 |
| A.4 | Etapa 4 - Otimalidade | 57 |

Capítulo 1

Introdução

A teoria de controle ótimo tem uma longa história na literatura para diversas aplicações em engenharia. Pode ter havido algumas controvérsias sobre o nascimento desta teoria (SUSSMANN; WILLEMS, 1997), mas não sobre sua necessidade na prática. É amplamente aceito que estes problemas têm um papel dominante em aplicações da vida real, como na engenharia, biologia e biomedicina. De acordo (SUSSMANN; WILLEMS, 1997), as pesquisas sobre este tema surgiram há mais de três séculos, com a publicação da solução de Johann Bernoulli para o problema de Braquistocrono em 1697. No entanto, as principais questões teóricas nesse campo ocorreram nos anos 50, há mais de 70 anos. No final dos anos 80 estas pesquisas tornaram-se ainda mais abrangentes com o avanço da teoria de Otimização Linear, mais especificamente, com o desenvolvimento do método de pontos interiores, que é muito eficaz para a solução em tempo polinomial de problemas com restrições convexas.

O célebre livro (BOYD et al., 1994) coloca em evidência que vários problemas de controle ótimo, originalmente não convexas, podem ser expressos como problemas de otimização convexa descritos em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs) ¹ após a adoção de uma mudança adequada de variáveis. Essa é a questão principal para obter problemas convexas equivalentes e procurar soluções globais, (ROCKAFELLAR, 1970). No entanto, essa abordagem tem algumas limitações, que se tornam evidentes quando a mudança de variáveis mencionada não é conhecida ou não existe. Este é precisamente o caso do controle via realimentação estática e dinâmica de saída com ordem reduzida (GEROMEL; DE SOUZA; SKELTON, 1998), controle descentralizado (GERO-

¹do inglês Linear Matrix Inequalities - LMIs

MEL; BERNUSSOU, 1982) e, controle de sistemas positivos (TANAKA; LANGBORT, 2011).

Muitos métodos de programação não linear podem ser aplicados para resolver problemas desta classe. No entanto, existem muitas dificuldades a serem enfrentadas, principalmente porque são problemas intrinsecamente não-convexos. Recentemente, a referência (GEROMEL; DEAECTO, 2018) propôs o Método de Kleinman-Newton Generalizado para tratar uma ampla classe de problemas de controle de sistemas lineares e invariantes no tempo, alguns deles ainda sem solução fechada na literatura. Embora ele não seja um método de programação matemática de uso geral, se aplica, com eficiência, a problemas das classes mencionadas que são, na verdade, problemas de controle ótimo com restrições convexas no ganho de realimentação. Mais especificamente, através deste método, os problemas são tratados com simplicidade em termos de implementação numérica, pois a solução é obtida resolvendo-se um conjunto de LMIs e a equação de Lyapunov. A sua principal característica é a convergência monotônica para uma solução estacionária local do problema original. Em (GEROMEL; DEAECTO, 2018) o Método foi validado apenas para problemas de controle via realimentação estática de saída.

Neste trabalho, implementamos o Método de Kleinman-Newton Generalizado proposto em (GEROMEL; DEAECTO, 2018) a partir de um algoritmo com estrutura geral que permite resolver, de forma unificada, o problema de controle de sistemas lineares e invariantes no tempo com realimentação dinâmica (incluindo ordem reduzida) e estática de saída. Alguns aprimoramentos numéricos foram incluídos e se mostraram essenciais para a eficiência do Método de Kleinman-Newton Generalizado. O texto apresenta discussões e realiza testes numéricos para a validação do algoritmo implementado. O banco de dados utilizado e o código Matlab estão disponíveis online na plataforma *GitHub* para testes da comunidade científica.

1.1 Estrutura do Trabalho de Graduação

Esse trabalho de graduação é inicialmente composto por 5 capítulos, que são brevemente descritos a seguir:

- Capítulo 1: Neste capítulo, introduzimos o problema que será tratado neste trabalho, enfatizando a sua importância, principalmente, no contexto de aplicações presentes em problemas reais
- Capítulo 2: Este capítulo apresenta uma revisão sobre conceitos fundamentais relacionados a sistemas dinâmicos. Inicialmente, os sistemas lineares e invariantes no tempo são caracterizados em termos da sua realização em espaço de estado e função de transferência. O critério de estabilidade de Lyapunov e o cálculo de normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são apresentados em conjunto com suas descrições em termos de problemas de otimização convexa baseadas em desigualdades matriciais lineares.
- Capítulo 3: Este capítulo apresenta a formulação matemática dos problemas de interesse neste trabalho, a saber, o projeto de controladores via realimentação estática e dinâmica de saída. Além disso, apresenta o Método de Kleinman-Newton Generalizado proposto em (GEROMEL; DEAECTO, 2018).
- Capítulo 4: Este capítulo apresenta o algoritmo de Kleinman-Newton Generalizado e os aprimoramentos numéricos importantes para a sua eficiência. Ele é validado por vários exemplos numéricos emprestados da literatura tanto para o caso de realimentação estática, como dinâmica de saída.
- Capítulo 5: Contém a conclusão final do trabalho, junto com uma avaliação pessoal e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais

Este capítulo aborda alguns conceitos fundamentais sobre análise de sistemas dinâmicos, os quais darão o embasamento teórico necessário para o completo entendimento dos resultados que serão apresentados nos capítulos que seguem. Inicialmente, os sistemas lineares e invariantes no tempo (LIT) são caracterizados em termos de suas representações em espaço de estado e função de transferência. Em seguida, são apresentados o estudo de estabilidade em termos do critério de Lyapunov e o cálculo das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para a análise do desempenho de sistemas LITs. Por fim, é dada uma breve introdução sobre desigualdades matriciais lineares.

2.1 Sistemas lineares e invariantes no tempo

O equacionamento por meio da utilização do espaço de estado de um sistema linear e invariante no tempo com ordem n_x é dada por um conjunto de n_x equações diferenciais de primeira ordem, a qual pode ser representada pela equação (2.1).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Ew(t), & x(0) = 0 \\ z(t) = Cx(t) + Jw(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde o vetor $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ define o estado, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ representa a entrada externa e $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ define a saída controlada. As matrizes A , E , C e J possuem dimensões compatíveis. O sistema LIT (2.1) pode também ser descrito por meio da sua matriz de transferência pela

aplicação da transformada de Laplace, sendo

$$H_{wz}(s) = C(sI - A)^{-1}E + J \quad (2.2)$$

Quando $J = 0$ o sistema é dito estritamente próprio, sendo classificado como próprio caso contrário.

2.2 Estabilidade de sistemas dinâmicos

No estudo de sistemas dinâmicos o primeiro requisito de um projeto de controle é a sua estabilidade. A estabilidade é caracterizada pelo estudo do comportamento dinâmico do sistema em torno do ponto de equilíbrio. Neste contexto, nessa seção será apresentada o critério de estabilidade de Lyapunov para sistemas LIT, bem como a definição de ponto de equilíbrio e estabilidade, as quais serão importantes para o completo entendimento do teorema de Lyapunov.

Definição 2.2.1 (Ponto de equilíbrio) *Define-se ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico contínuo no tempo como sendo o ponto $x_e \in \mathbb{R}^n$ no espaço de estado, tal que se o sistema partir inicialmente dessa condição $x(0) = x_e$ permanecerá nela por todo o instante de tempo subsequente, ou seja, $x(t) = x_e$ para todo $t \geq 0$.*

Mais detalhes pode ser conferido em (SLOTINE; LI et al., 1991). Para o estudo de estabilidade, vamos considerar o sistema linear abaixo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.3)$$

O fato da matriz A ter todos os seus autovalores com parte real negativa, ou seja, situados no semiplano esquerdo do plano complexo é uma condição necessária e suficiente para definir a estabilidade assintótica do sistema (2.3). Caso a matriz A seja não singular, a origem é o único ponto de equilíbrio x_e , uma vez que é a única solução da equação $\dot{x}(t) = Ax(t) = 0$. Formalmente, o conceito de estabilidade está definido a seguir e pode ser conferido em mais detalhes em (SLOTINE; LI et al., 1991).

Definição 2.2.2 (Estabilidade) Um ponto de equilíbrio de um sistema contínuo x_e é dito estável se, para todo $R > 0$, existir um escalar $r > 0$ tal que, se $\|x(0) - x_e\| < r$, então $\|x(t) - x_e\| < R$. Caso contrário, o ponto de equilíbrio é dito instável.

Em especial, o ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico é dito *assintoticamente estável* se ele for estável e se existir $r > 0$ tal que para qualquer condição inicial na região $\|x(0) - x_e\| < r$ a trajetória $x(t)$ tender ao ponto de equilíbrio x_e , ou seja, $x(t) \rightarrow x_e$ quando $t \rightarrow \infty$. Adicionalmente, x_e é dito *globalmente assintoticamente estável* se for assintoticamente estável para qualquer $r > 0$, ou seja, se a condição inicial puder ser escolhida em qualquer lugar do espaço de estado.

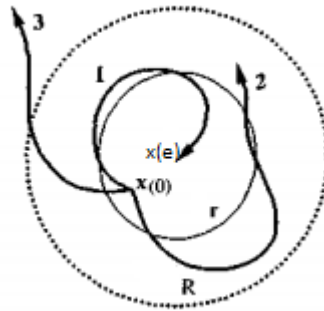


Figura 2.1: Conceitos de Estabilidade (SLOTINE; LI et al., 1991)

Estes conceitos estão ilustrados na Fig. 2.1 onde a curva 1 indica estabilidade assintótica, a curva 2 estabilidade genérica e a curva 3 instabilidade do ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^{n_x}$.

O critério de Lyapunov se aplica a sistemas dinâmicos lineares e não-lineares promovendo o estudo da estabilidade dos mesmos. Para isso, a função de Lyapunov $v(x(t))$ relaciona a distância de um ponto genérico $x \in \mathbb{R}^n$ até o ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^n$. O teorema a seguir retirado de (KHALIL, 2002) apresenta o critério de Lyapunov para o estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Lyapunov) Um sistema dinâmico com ponto de equilíbrio x_e é dito *globalmente assintoticamente estável* se existir uma função de Lyapunov $v(x) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$, ilimitada para $\|x\|$ ilimitado, de tal forma a satisfazer $v(x) > 0 \forall x \neq x_e$, $v(x) = 0$ para $x = x_e$ e $\dot{v}(x) < 0, \forall x \neq x_e$.

Para sistemas LIT com realização (2.3) a função de Lyapunov é dada por $v(x) = x'Px$ com $P > 0$. Derivando a função de Lyapunov em relação ao tempo, para uma

trajetória arbitrária do sistema, obtemos:

$$\dot{v}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(A'P + PA)x \quad (2.4)$$

Para atender ao Teorema 2.2.1, fazemos $\dot{v}(x) < 0$ e, como consequência

$$A'P + PA < 0 \quad (2.5)$$

No entanto, essa desigualdade matricial possui infinitas soluções e para se obter uma solução única, resolve-se a equação de Lyapunov

$$A'P + PA = -Q \quad (2.6)$$

sendo $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica e definida positiva dada. Note que neste caso $\dot{v}(x) = -x'Qx < 0$, $x \neq 0$. A seguir o critério de Lyapunov, específico para sistemas LITs, é formalmente apresentado. Veja (GEROMEL; KOROGUI, 2019) para maiores detalhes.

Lema 2.2.2 (Critério de Lyapunov - Sistemas LIT) *O sistema linear invariante no tempo (2.3) é globalmente assintoticamente estável se, e somente se, para uma matriz $Q > 0$ dada, existir uma única solução $P > 0$ da equação de Lyapunov $A'P + PA = -Q$.*

2.3 Índices de desempenho para sistemas LITs

Avaliar a performance de um sistema LIT se faz útil para atingir os requisitos de projeto impostos, bem como restrições físicas que porventura o sistema possa ter. Para sistemas dinâmicos, dois critérios são bastante conhecidos, a saber, a norma \mathcal{H}_2 e a norma \mathcal{H}_∞ . Elas são definidas para o sistema LIT descrito pela realização no espaço de estado (2.1). Embora nosso interesse neste trabalho é tratar o projeto de controle via realimentação estática e dinâmica de saída para o caso \mathcal{H}_2 , por serem normas clássicas, ambas serão apresentadas em detalhes neste capítulo.

Para sistemas com uma entrada e uma saída, a norma \mathcal{H}_2 representa a área sob a curva do módulo da resposta ao impulso do sistema, enquanto que a norma \mathcal{H}_∞ equivale ao valor de pico do diagrama de Bode da sua resposta em frequência. A seguir, as duas

normas serão abordadas em detalhes, tais como a sua descrição em termos da solução de um problema de otimização convexa expresso por LMIs.

2.3.1 Norma \mathcal{H}_2

Considere o sistema LIT dado por (2.1) com função de transferência $H_{wz}(s)$ dada em (2.2). A norma \mathcal{H}_2 é definida para sistemas estritamente próprios com funções de transferência analíticas no semi-plano complexo direito fechado e é dada por

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \text{Tr}(H_{wz}(-j\omega)' H_{wz}(j\omega)) d\omega \quad (2.7)$$

com $\omega \in \mathbb{R}$. Utilizando o teorema de Parseval, observa-se que $\|H_{wz}(s)\|_2 = \|h_{wz}(t)\|_2$, desta forma, podemos representar a norma \mathcal{H}_2 de $H_{wz}(s)$ no domínio do tempo pela seguinte relação:

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \text{Tr}(H_{wz}(-j\omega)' H_{wz}(j\omega)) d\omega = \int_0^\infty \text{Tr}(h_{wz}(t)' h_{wz}(t)) dt \quad (2.8)$$

sendo $h_{wz}(t)$ a resposta ao impulso do sistema, dada por $h_{wz}(t) = Ce^{At}H + J\delta(t)$. Utilizando esta resposta ao impulso em (2.8), temos

$$\begin{aligned} \|H_{wz}(s)\|_2^2 &= \int_0^\infty \text{Tr}(h_{wz}(t)' h_{wz}(t)) dt \\ &= \int_0^\infty \text{Tr}((E' e^{A't} C' + J' \delta(t))(C e^{At} E + J \delta(t))) \\ &= \text{Tr}\left(E' \left(\int_0^\infty e^{A't} C' C e^{At} dt\right) E\right) + \text{Tr}(E' C' J) + \text{Tr}(J' C E) + \\ &+ \text{Tr}(J' J) \int_0^\infty \delta(t)^2 dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

Aplicando novamente o Teorema de Parseval, a igualdade

$$\int_0^\infty \delta(t)^2 dt = (1/\pi) \int_0^\infty d\omega = +\infty$$

indica que o sistema, além de estável, deve ser estritamente próprio, para que a norma definida em (2.7) seja finita. Assim podemos concluir que a norma \mathcal{H}_2 do sistema é dada por

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \text{Tr}(E' P_o E) \quad (2.10)$$

sendo P_o o gramiano de observabilidade dado por

$$P_o = \int_0^{\infty} e^{A't} C' C e^{At} dt \quad (2.11)$$

obtido como a solução da equação de Lyapunov

$$A'P_o + P_oA + C'C = 0 \quad (2.12)$$

Como ficará claro na seção 2.4, o cálculo da norma \mathcal{H}_2 também pode ser obtido como a solução de um problema de otimização convexa descrito em termos de LMIs.

2.3.2 Norma \mathcal{H}_∞

A norma \mathcal{H}_∞ é definida para sistemas LIT assintoticamente estáveis sendo dada por

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty^2 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{max}\{H_{wz}(j\omega)\} \quad (2.13)$$

em que $\sigma_{max}\{H_{wz}(j\omega)\} = \sqrt{\lambda_{max}(H_{wz}(j\omega)'H_{wz}(j\omega))}$ indica o máximo valor singular de $H_{wz}(j\omega)$ e $\lambda_{max}(\cdot)$ é o maior autovalor de uma matriz. Como já mencionado, no caso particular de um sistema SISO¹, a norma \mathcal{H}_∞ representa o valor de pico observado no diagrama de Bode de módulo que também pode ser interpretado como a distância da origem ao ponto mais afastado do mapeamento de $H_{wz}(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, no diagrama de Nyquist. Diferente da norma \mathcal{H}_2 ela não exige que o sistema seja estritamente próprio.

Embora ela tenha sido definida no domínio da frequência, utilizando o Teorema de Parseval, é possível determiná-la através de condições envolvendo a entrada e a saída do sistema no domínio do tempo. Considerando entradas externas da classe \mathcal{L}_2 , ou seja, para as quais a integral

$$\int_0^{\infty} w(t)'w(t)dt < \infty$$

¹do inglês Single Input, Single Output

é finita, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty z(t)'z(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{z}(-j\omega)' \hat{z}(j\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{w}(-j\omega)' H_{wz}(-j\omega)' H_{wz}(j\omega) \hat{w}(j\omega) d\omega \\
&\leq \|H_{wz}(s)\|_\infty^2 \int_0^\infty w(t)'w(t) dt
\end{aligned} \tag{2.14}$$

em vista disso, podemos fazer $\|H_{wz}(s)\|_\infty \leq \rho$. Logo a norma \mathcal{H}_∞ pode ser obtida fazendo

$$\|H_{wz}\|_\infty^2 = \inf_{\rho > 0} \rho$$

sujeito a

$$\|z(t)\|_2^2 - \rho \|w(t)\|_2^2 < 0$$

Ela também pode ser calculada utilizando a função de Lyapunov $v(x) = x'Px$, $P > 0$ e impondo

$$\dot{v}(x(t)) < z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{2.15}$$

para algum $\rho > 0$. De fato, integrando ambos os lados de (2.15) de $t = 0$ até $t \rightarrow \infty$, obtém-se

$$\int_0^\infty \dot{v}(x(t)) dt < \int_0^\infty z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t) dt \tag{2.16}$$

Uma vez que o sistema é Hurwitz estável, temos que $v(x(\infty)) = 0$. Ademais, $v(x(0)) = 0$, pois $x(0) = 0$ resultando em:

$$\int_0^\infty z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t) dt < 0 \tag{2.17}$$

Note que escrevendo

$$\begin{aligned}
\dot{v}(x(t)) &= \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) + z(t)'z(t) - \rho w(t)'w(t) - z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t) \\
&= \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & \bullet \\ E'P + J'C & J'J - \rho I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} - z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t) \\
&< -z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

a primeira desigualdade é verificada sempre que

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & \bullet \\ E'P + J'C & J'J - \rho I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.19)$$

Finalmente, a norma \mathcal{H}_∞ do sistema LIT pode ser calculada resolvendo-se o problema de otimização convexa

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \inf_{\rho>0, P>0} \left\{ \rho : \begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & \bullet \\ E'P + J'C & J'J - \rho I \end{bmatrix} < 0 \right\} \quad (2.20)$$

que como ficará claro na próxima seção é descrito em termos de LMIs.

2.4 Desigualdade matriciais lineares

Como no caso \mathcal{H}_∞ , o cálculo da norma \mathcal{H}_2 pode ser realizado a partir da sua descrição em termos de LMIs. A seguir serão enunciadas propriedades e resultados de LMIs que serão úteis ao longo do deste trabalho.

Uma LMI é definida como

$$\mathcal{A}(x) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i < 0 \quad (2.21)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis e $A_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\forall i = 0, \dots, n$ são matrizes simétricas. Essa desigualdade significa que $\mathcal{A}(x)$ é uma LMI definida negativa. Além disso, é possível mostrar que o conjunto de todos os vetores $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem a desigualdade matricial linear $\mathcal{A}(x) < 0$ é um conjunto convexo.

Retomando o cálculo da norma \mathcal{H}_2 , temos que ela pode ser calculada através do gramiano de observabilidade da seguinte forma

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \text{Tr}(E'P_oE) \quad (2.22)$$

com

$$A'P_o + P_oA + C'C = 0 \quad (2.23)$$

Para obter a solução em termos de LMIs, devemos considerar a solução da desigualdade de Lyapunov

$$A'P + PA + C'C < 0$$

No entanto, qualquer solução P definida positiva que satisfaz a equação acima satisfaz também a equação de Lyapunov

$$A'P + PA + C'C = -S$$

com $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sendo uma matriz definida positiva arbitrária. Note, entretanto, que

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\infty e^{A't}(C'C + S)e^{At}dt > \int_0^\infty e^{A't}C'Ce^{At}dt \\ &> P_o \end{aligned} \quad (2.24)$$

e, conseqüentemente, $\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \text{Tr}(E'P_oE) < \text{Tr}(E'PE)$. Sendo assim, podemos calcular a norma através do seguinte problema de otimização convexa

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \inf_{P>0} \{\text{Tr}(E'PE) \mid A'P + PA + C'C < 0\} \quad (2.25)$$

pois a aplicação do ínfimo no traço fará com que $P > 0$ convirja arbitrariamente para P_o , que é a solução ótima do problema.

A descrição do problema em termos de LMIs permite a utilização de poderosas ferramentas de otimização convexa e, conseqüentemente, a possibilidade de tratar problemas de controle mais gerais e abrangentes. Neste contexto, a obtenção de técnicas de linearização em problemas de controle tornou-se essencial para a obtenção de soluções cada vez menos conservadoras. Uma das técnicas mais utilizadas é o Lema do Complemento de Schur, como apresentado a seguir:

Lema 2.4.1 (Complemento de Schur) *Sejam $S(x)$, $V(x)$ e $Q(x)$ matrizes de dimensões compatíveis, de tal forma que $S(x)$, $Q(x)$ sejam matrizes simétricas. Então, a desigualdade matricial linear*

$$\mathcal{A}(x) = \begin{bmatrix} S(x) & V(x) \\ V'(x) & Q(x) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.26)$$

é equivalente a qualquer uma das desigualdades não-lineares

$$a) Q(x) - V(x)'S(x)^{-1}V(x) < 0 \text{ e } S(x) < 0$$

$$b) S(x) - V(x)Q(x)^{-1}V(x)' < 0 \text{ e } Q(x) < 0$$

Este lema será amplamente utilizado nos capítulos que seguem.

2.5 Considerações do capítulo

Neste capítulo, fornecemos definições e conceitos que serão importantes para o entendimento deste trabalho. Neste contexto, foram abordados a teoria de sistemas lineares e invariantes no tempo, bem como definições básicas a respeito de ponto de equilíbrio e critério de estabilidade de Lyapunov. Não obstante, foi feita uma breve revisão de importantes critérios de desempenho como a norma \mathcal{H}_2 e norma H_∞ . Por fim, a norma \mathcal{H}_2 foi abordada no contexto de otimização convexa por meio do cálculo de LMIs.

Capítulo 3

Método de Kleinman-Newton Generalizado

Este capítulo apresenta os problemas de controle ótimo de nosso interesse que consistem no controle via realimentação estática e dinâmica de saída (considerando o projeto de controladores com ordem reduzida e completa) de sistemas lineares e invariantes no tempo. Como ficará claro em seguida, ambos os problemas estão sujeitos a restrições convexas no ganho de realimentação e podem ser resolvidos pelo Método de Kleinman-Newton Generalizado proposto em (GEROMEL; DEAECTO, 2018). A característica mais importante deste método é que ele mantém intacta a convergência monotônica para um mínimo local, que é uma propriedade do método de Kleinman original (KLEINMAN, 1968). Além disso, ele é um método bastante simples cujo algoritmo implica na solução de problemas de otimização convexa e de equações de Lyapunov.

3.1 Formulação do problema

Considere o sistema linear e invariante no tempo da forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t), & x(0) = 0 \\ y(t) = Gx(t) + Hw(t) \\ z(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada externa, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida e $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ a saída controlada. Para facilitar a apresentação vamos assumir que $D'C = 0$ e $D'D > 0$.

A seguir vamos destacar os dois problemas de controle de interesse neste trabalho: a) o controle via realimentação estática de saída, b) o controle via realimentação dinâmica de saída (ordem reduzida e completa). Destes, apenas o controle via realimentação dinâmica de saída com ordem completa possui solução fechada expressa por condições necessárias e suficientes.

3.1.1 Controle via realimentação estática de saída

Considerando que o estado não está disponível para realimentação, $n_y < n_x$, $H = 0$, $G \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ e que a entrada de controle é dada por $u(t) = Zy(t)$ temos que o sistema em malha fechada fica

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BL)x(t) + Ew(t) \\ z(t) &= (C + DL)x(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

com o ganho L pertencente ao conjunto convexo dado por

$$\mathcal{L} = \{ZG : Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}\} \tag{3.3}$$

O problema a ser resolvido é expresso por

$$\inf_{L \in \mathcal{L}, P > 0} \{\text{Tr}(E'PE) : A'_L P + P A_L + C'_L C_L < 0\} \tag{3.4}$$

em que

$$A_L = A + BL, \quad C_L = C + DL \tag{3.5}$$

Note que ele é intrinsecamente não-convexo e não existe (ou não é conhecida) uma transformação de variável biunívoca capaz de linearizá-lo. Motivados pela sua importância em aplicações práticas, os primeiros estudos a respeito deste problema foram realizados em (LEVINE; ATHANS, 1970). Este problema consiste na solução de um conjunto de equações matriciais não lineares acopladas que é sem dúvida uma tarefa bastante desafi-

adora. Atualmente, alguns pacotes comerciais especializados na solução de BMIs¹ podem ser aplicados para resolver problemas de realimentação estática de saída como é o caso do PENBMI (HENRION et al., 2005) e o código aberto gratuito do Matlab PENLAB (FI-ALA; KOČVARA; STINGL, 2013). O algoritmo por trás desses pacotes combina as ideias dos métodos da penalidade e barreira com a abordagem lagrangiana aumentada. Esses pacotes podem resolver localmente todos os tipos de problemas de BMIs, incluindo controle via realimentação estática de saída, no entanto, em muitos casos eles podem falhar em fornecer uma solução, sendo a escolha da condição inicial extremamente importante nessas ferramentas (SADABADI; PEAUCELLE, 2016). O Método de Kleinman-Newton Generalizado que será aqui abordado não é uma ferramenta matemática de uso geral mas é uma alternativa mais eficiente para a solução de problemas de controle com restrições convexas no ganho de realimentação. Ele se destaca pela simplicidade e por convergir monotonicamente para uma solução ótima local.

3.1.2 Controle via realimentação dinâmica de saída

Nosso objetivo é o projeto do controlador dinâmico

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t), & x_c(0) = 0 \\ u(t) = C_c x_c(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

em que $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ é o estado do controlador e $1 \leq n_c \leq n_x$. Definindo a variável de estado aumentada $x_a = [x'_c \ x']'$ e a matriz do controlador

$$Z = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

temos que o controlador dinâmico pode ser escrito alternativamente por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ u(t) \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} x_c \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

¹do inglês Bilinear Matrix Inequalities

Conectando o controlador (3.6) na planta (3.1) obtemos o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= (A + BZG)x_a(t) + (E + BZH)w(t) \\ z(t) &= (C + DZG)x_a(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

em que, com certo abuso de notação, as matrizes aumentadas são dadas por

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad B \rightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad G \rightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$E \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}, \quad H \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix}, \quad C' \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ C' \end{bmatrix}, \quad D' \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ D' \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Note que o sistema em malha aberta com estas matrizes é dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = Ax_a(t) + Bu_a(t) + Ew(t), & x(0) = 0 \\ y(t) = Gx_a(t) + Hw(t) \\ z(t) = Cx_a(t) + Du_a(t) \end{cases} \quad (3.12)$$

em que $D'C = 0$, mas agora $D'D \geq 0$. Isto ocorre pois z não depende de todas as componentes do sinal de controle aumentado $u_a(t) = ZGx_a(t)$. Uma maneira de contornar esta situação é modificar a saída controlada para

$$z_a(t) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & 0 \end{bmatrix} u_a(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$= (C + DZG)x_a \quad (3.14)$$

em que as matrizes aumentadas são agora dadas por

$$C \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad D \rightarrow \begin{bmatrix} D_r & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Neste caso a condição de ortogonalidade é satisfeita, ou seja, $D'C = 0$ e $D'D > 0$ desde que $D'_r D_r > 0$. A escolha de D_r é fundamental. Note que ele influencia a largura de faixa do controlador via realimentação de saída dinâmico e penaliza altos valores de ganhos.

Para este caso, o problema de controle via realimentação dinâmica de saída é formulado como

$$\inf_{Z, P > 0} \{ \text{Tr}(E'_Z P E_Z) : A'_Z P + P A_Z + C'_Z C_Z < 0 \} \quad (3.16)$$

em que $A_Z = A + BZG$, $C_Z = C + DZG$, $E_Z = E + BZH$ são matrizes de dimensões compatíveis. Introduzindo as matrizes de ganho $L = ZG$ e $F = BZ$, este problema pode ser reescrito como

$$\inf_{(L, F) \in \mathcal{F}, P > 0} \{ \text{Tr}(E'_F P E_F) : A'_L P + P A_L + C'_L C_L < 0 \} \quad (3.17)$$

em que $A_L = A + BL$, $C_L = C + DL$, $E_F = E + FH$ onde o conjunto convexo \mathcal{F} é dado na forma

$$\mathcal{F} = \{ (ZG, BZ) : Z \in \mathbb{R}^{(n_c+n_u) \times (n_c+n_y)} \} \quad (3.18)$$

A razão por trás desta formulação é que o sistema foi escrito com a mesma estrutura de (3.1) e que devemos trabalhar com o mesmo tipo de restrições apresentadas em (3.4). A única diferença é a matriz E_F na função objetivo, que não depende da matriz F e se reduz a $E_F = E$ sempre que $H = 0$. Logo, tanto para o caso de realimentação estática quanto para dinâmica de saída, podemos focar na solução de (3.17), lembrando que para o caso estático, $H = 0$ para que o sistema em malha fechada seja estritamente próprio.

3.2 Método de Kleinman-Newton Generalizado

Podemos observar que o problema apresentado em (3.17), apesar de não ser convexo, possui um aspecto importante que deve ser levado em consideração. A linearidade com relação a $P > 0$ indica que na solução ótima $((L_*, F_*) \in \mathcal{F}, P_* > 0)$ caso exista, a matriz $P_* > 0$ é arbitrariamente próxima da solução da equação de Lyapunov:

$$A'_L P + P A_L + C'_L C_L = 0 \quad (3.19)$$

que pode ser reescrita facilmente como:

$$A'P + PA - PB(D'D)^{-1}B'P + C'C + R_{LP} = 0 \quad (3.20)$$

onde $R_{LP} \geq 0$ e dado por:

$$R_{LP} = (L + (D'D)^{-1}B'P)'(D'D)(L + (D'D)^{-1}B'P) \quad (3.21)$$

Pode-se notar que $R_{LP} = 0$ sempre o ganho $L = -(D'D)^{-1}B'P$. Neste caso (3.20) se reduz a

$$A'P + PA - PB(D'D)^{-1}B'P + C'C = 0 \quad (3.22)$$

que admite uma única solução positiva definida estabilizante.

O Lema 3.2.1 é fundamental para a obtenção do Método de Kleinman-Newton Generalizado.

Lema 3.2.1 *Suponha que $P_0 > 0$ seja dada. A seguinte desigualdade é válida*

$$S^{-1} \geq P_0^{-1} - P_0^{-1}(S - P_0)P_0^{-1} = V_{P_0}(S) \quad (3.23)$$

Para todo $S > 0$.

Neste lema, a função matricial $V_{P_0}(S)$ é a aproximação linear da matriz S^{-1} avaliada em $S = P_0$ e também é um limitante inferior para esta matriz. Veja (GEROMEL; DEAECTO, 2018) para maiores detalhes a respeito desta função. Ela é fundamental para obtenção do próximo teorema que é a principal contribuição de (GEROMEL; DEAECTO, 2018).

Teorema 3.2.2 *Assuma que $((L_0, F_0) \in \mathcal{F}, P_0 > 0)$ é solução de (3.19) e fornece o custo $J(L_0, F_0) = \text{Tr}(E'_{F_0}P_0E_{F_0})$. Seja $((L, F) \in \mathcal{F}, S > 0, W > 0)$ a solução ótima do seguinte problema de otimização convexa,*

$$\inf_{(L,F) \in \mathcal{F}, S > 0, W} \left\{ \text{Tr}(W) : \begin{bmatrix} W & \bullet \\ E + FH & V_{P_0}(S) \end{bmatrix} > 0 \right\} \quad (3.24)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A'_{P_0}S + SA_{P_0} + C'_{P_0}C_{P_0} & \bullet \\ L + (D'D)^{-1}B'S & -(D'D)^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.25)$$

em que $A_P = A - B(D'D)^{-1}B'P$ e $C_P = C - D(D'D)^{-1}B'P$. Então, a solução $P > 0$ da equação da (3.19) produz o custo $J(L, F) = \text{Tr}(E'_F P E_F) \leq \text{Tr}(W) \leq J(L_0, F_0)$.

Este teorema mostra que a partir de uma condição inicial factível $((L_0, F_0) \in \mathcal{F}, P_0 > 0)$ a solução de (3.24) permite obter um par $((L, F) \in \mathcal{F}, P > 0)$ factível tal que o custo resultante decresce ou é constante. Esta é a ideia principal do algoritmo que será apresentado no próximo capítulo. Caso a matriz $H = 0$, importante para a realimentação estática de saída, pode-se utilizar uma especialização do Teorema 3.2.2 sem a necessidade de utilizar a aproximação $V_{P_0}(S)$, deixando o resultado menos conservador.

Corolário 3.2.2.1 *Assuma que $(L_0 \in \mathcal{L}, P_0 > 0)$, $\mathcal{L} = \{(ZG) : Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}\}$ é solução de (3.19) e fornece o custo $J(L_0) = \text{tr}(E'P_0E)$. Seja $(L \in \mathcal{L}, S > 0)$ a solução ótima do seguinte problema de otimização convexa,*

$$\inf_{L \in \mathcal{L}, S > 0} \text{Tr}(E'SE) \quad (3.26)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A'_{P_0}S + SA_{P_0} + C'_{P_0}C_{P_0} & \bullet \\ L + (D'D)^{-1}B'S & -(D'D)^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.27)$$

Então a solução $P > 0$ de (3.19) fornece o custo $J(L) = \text{Tr}(E'PE) \leq J(L_0)$.

No próximo capítulo, ambos os resultados serão comparados em termos de conservadorismo.

A referência (GEROMEL; DEAECTO, 2018) também fornece um algoritmo para a obtenção de uma condição inicial factível. Para obtê-la é preciso resolver o seguinte problema de otimização convexa

$$\inf_{K \in \mathcal{L}, Y, P > 0} \{F(Y) : A'_{K+Y}P + PA_{K+Y} + C'_{K+Y}C_{K+Y} < 0\} \quad (3.28)$$

em que a função matricial de penalidade $f(Y) : \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ deve ser convexa e possuir as seguintes propriedades $f(Y) \geq 0$, de modo que $f(Y) = 0$, se e somente se $Y = 0$. Claramente, a solução ótima de (3.28) indica que se $f(Y_*) = 0$, então $L = K_* \in \mathcal{L}$ é solução de (3.17). A função $f(Y)$ proposta é apresentada no Lema 3.2.3

Lema 3.2.3 *A função de penalidade*

$$f(Y) = \inf_{X > 0} \text{Tr}(Y'X^{-1}Y) + \text{tr}(X) \quad (3.29)$$

possui as seguintes propriedades: (i) $f(Y)$ é positiva homogênea de grau 1 e (ii) $f(Y) \geq 0$ com $f(Y) = 0$ se e somente se $Y = 0$.

Todos esses conceitos presentes no método de Kleinman-Newton generalizado são úteis para a elaboração de dois algoritmos, um deles específico para a factibilidade e outro para a etapa de otimalidade. Eles serão apresentados no próximo capítulo. Antes porém, alguns resultados da literatura são importantes pois servirão como base de comparação e análise do resultados obtidos.

3.2.1 Resultados Auxiliares

Um resultado interessante é saber qual a ordem $n_c < n_x$ podemos atribuir ao controlador para que o controle seja efetivo. Uma condição suficiente, foi obtida em (KIMURA, 1975) e está apresentada no teorema seguinte.

Teorema 3.2.4 (KIMURA, 1975) *Se o sistema (3.1) for controlável e observável, então o controlador dinâmico de ordem $n_c > n_x - n_u - n_y$ pode alocar quase todos os polos do sistema em malha fechada, desde que eles sejam todos distintos.*

Este resultado será utilizado no próximo capítulo para a escolha da ordem do controlador.

Outro resultado importante que será utilizado para comparação e validação do algoritmo é o projeto do controlador dinâmico de ordem completa. Como já discutido, para este caso específico a literatura fornece condições necessárias e suficientes como apresentadas no teorema a seguir.

Teorema 3.2.5 (OLIVEIRA et al., 1999) *Existe um controlador dinâmico de ordem completa $n_c = n_x$ que estabiliza (3.1) se, e somente se, existirem matrizes simétricas X, Y, W e matrizes F, L e Q satisfazendo as desigualdades matriciais lineares*

$$\begin{bmatrix} W & \bullet & \bullet \\ E & X & \bullet \\ YE + FH & I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (3.30)$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA' + BL + L'B' & \bullet & \bullet \\ Q + A' & YA + A'Y + FG + G'F & \bullet \\ CX + DL & C & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.31)$$

Neste caso, o valor mínimo da norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada pode ser obtido resolvendo-se o seguinte problema de otimização convexa:

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \inf_{\Phi} \{\text{Tr}(W) : (3.30) - (3.31)\} \quad (3.32)$$

em que Φ é o conjunto de soluções factíveis de (3.30)-(3.31).

O controlador dinâmico de ordem completa é obtido a partir da solução deste teorema e é dada pela (3.6), com:

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{-1} & -V^{-1}YB \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q - YAX & F \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{-1} & 0 \\ -GXU^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Onde V e U deve satisfazer

$$VU = I - XY \quad (3.34)$$

Pode-se recuperar as matrizes A_c , B_c , C_c a partir das variáveis de otimização, sendo que a equação (3.34) deve ser satisfeita, para uma matriz U ou V arbitrária, mas inversível. Assim, de maneira prática, assume-se um valor para variável U ou V de forma que $\det(U) \neq 0$ ou $\det(V) \neq 0$, e determina-se a outra variável utilizando a (3.34).

3.3 Considerações do capítulo

Neste capítulo, apresentamos uma visão geral dos problemas que tratamos neste trabalho de graduação. Neste contexto, foi abordado toda a formulação de realimentação estática de saída e realimentação dinâmica de saída, bem como o método de Kleinman-Newton Generalizado com as suas principais contribuições. Não obstante, foi feita uma apresentação de resultados auxiliares como a condição suficiente de (KIMURA, 1975) para controladores dinâmicos de ordem reduzida e uma formulação que é necessária e suficiente para encontrar um ótimo global utilizando realimentação dinâmica de ordem completa.

Todos os assuntos presentes neste capítulo são de extrema importância para os resultados que seguem na próxima seção.

Capítulo 4

Implementação do Método de Kleinman-Newton Generalizado

Este capítulo utiliza os resultados do capítulo anterior e apresenta o algoritmo de Kleinman-Newton Generalizado dividido em algumas etapas, como as de Factibilidade e Otimalidade. A ideia é elaborar um algoritmo com estrutura geral que permita resolver os problemas de controle via realimentação de saída (estático e dinâmico), mudando apenas a estrutura dos dados de entrada. Algumas particularidades e aprimoramentos numéricos são apresentados e discutidos. O algoritmo é validado por meio de exemplos retirados da literatura.

4.1 O Algoritmo

O código elaborado neste trabalho pode ser encontrado na plataforma *GitHub* <https://github.com/lima1696/Generalized-Kleinman-Newton-Method>, e os exemplos utilizados estão presentes em (LEIBFRITZ, 2010).

Este algoritmo, chamado `GKN_Method`, apresenta uma estrutura geral em que o usuário tem a flexibilidade de projetar tanto um controlador via realimentação estática, como via realimentação dinâmica de saída (incluindo ordem reduzida). O procedimento possui 4 etapas, que podem ser verificadas com mais detalhes no Apendix.

Etapa 1: Entrada de Dados

- 1: Informações sobre o sistema (A, B, E, G, H, C, D) .
- 2: Informações sobre o controlador n_c (sendo $n_c = 0$, o controlador estático)
- 3: Definição das condições do programa através da inserção de 3 parâmetros na variável *options*
 - options (1)* - definição da precisão $\epsilon > 0$ para condição de parada
 - options (2)* Número máximo de iterações para convergência
 - options (3)* Valor *tol* para $Z'Z < tol^2$ para melhorar o condicionamento numérico da matriz de ganho.
- 4: $GKN_Method(A, B, E, G, H, C, D, n_c, options)$
- 5: Etapa 2

A partir desta etapa o algoritmo é iniciado.

Etapa 2: Preparação dos dados

- 1: Se $n_c = 0$, executa a Etapa 3
- 2: Se $n_c \neq 0$, obtém-se as matrizes aumentadas como apresentado em (3.11) e (3.15), e executa-se a Etapa 3.

Com todos os dados disponíveis inicia-se a etapa de factibilidade para a obtenção de uma condição inicial factível.

Etapa 3: Factibilidade

Assegura: $L \in \mathcal{L}$

- 1: $\ell \leftarrow 0$
- 2: Resolva a equação de Ricatti $A'P_0 + P_0A - P_0B(D'D)^{-1}B'P_0 + C'C = 0$ e determine P_0 . Inicialize $K_0 = 0$, $Y_0 = -(D'D)^{-1}B'P_0$ e a função de penalidade inicial $f(Y_0)$
- 3: **repita**
- 4: Resolva a seguinte LMI

$$\inf_{K \in \mathcal{L}, Y, X > 0, S > 0} \text{Tr}(R) + \text{Tr}(X)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} R & \bullet \\ Y & X \end{bmatrix} > 0 \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} A'_{P_\ell} S + S A_{P_\ell} + C'_{P_\ell} C_{P_\ell} & \bullet \\ K + Y + (D'D)^{-1} B'S & -(D'D)^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

5: $\ell \leftarrow \ell + 1$

6: Resolva a equação de Lyapunov (3.19) para $L = K + Y$ e obtenha $P > 0$. Atualize os valores $(K_\ell, Y_\ell, P_\ell) = (K, Y, P)$ e determine o valor da função penalidade $f(Y)$.

7: **Até que** $A_{K_\ell} = A + B K_\ell$ seja Hurwitz. Neste caso, avance para a Etapa 4.

8: Se $\ell > \text{options}(2)$, então saia. O algoritmo não forneceu solução factível para o número máximo de iterações fornecido em `options`.

Com uma solução inicial factível, inicia-se a etapa de otimalidade que utiliza as condições do Teorema 3.2.2.

Etapa 4: Otimalidade

Requer: $L_0 \in \mathcal{L}$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno

Assegura: $(L_*, F_*) \in \mathcal{F}$ e o custo ótimo $J_{opt}(L_*, F_*)$

1: $\ell \leftarrow 0$

2: Resolva a equação de Lyapunov (3.19) para $L = L_0 \in \mathcal{L}$ e determine P_0 . Calcule F_0 de maneira que $(L_0, F_0) \in \mathcal{F}$ e o custo inicial $J_{opt}(L_0, F_0) = \text{Tr}(E'_{F_0} P_0 E_{F_0})$

3: **repita**

4: Resolva a seguinte LMI

$$\inf_{(L,F) \in \mathcal{F}, S > 0, W} \left\{ \text{Tr}(W) : \begin{bmatrix} W & \bullet \\ E + FH & V_{P_\ell}(S) \end{bmatrix} > 0 \right\}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A'_{P_\ell} S + S A_{P_\ell} + C'_{P_\ell} C_{P_\ell} & \bullet \\ L + (D'D)^{-1} B'S & -(D'D)^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

5: $\ell \leftarrow \ell + 1$

- 6: Resolva a equação de Lyapunov (3.19) para a obtenção de $P > 0$. Atualize os valores $(L_\ell, F_\ell, P_\ell) = (L, F, P)$ e determine o valor do custo atual $J_{opt}(L_\ell, F_\ell) = \text{Tr}(E'_{F_\ell} P_\ell E_{F_\ell})$
- 7: **até que** $J_{opt}(L_\ell, F_\ell)/J_{opt}(L_{\ell-1}, F_{\ell-1}) \geq 1 - \epsilon$
- 8: Se $\ell > \text{options}(2)$ saia. O algoritmo não forneceu solução factível para o número máximo de iterações fornecidos em `options`.

Como a maioria dos sistemas não satisfazem a hipótese de ortogonalidade $D'C = 0$, podemos adotar uma mudança de variável $u(t) = v(t) - (D'D)^{-1}D'Cx(t)$ de forma que a saída controlada torna-se $z(t) = (I - D(D'D)^{-1}D')Cx(t) + Dv(t)$ com as matrizes de saída ortogonais. Neste caso, a etapa de factibilidade exige que $L - (D'D)^{-1}D'C \in \mathcal{L}$, o que pode ser implementado sem nenhuma dificuldade, veja (COLANERI; GEROMEL; LOCATELLI, 1997). A seguir vamos apresentar alguns exemplos para a validação do algoritmo.

4.1.1 Realimentação Estática de Saída

Como já mencionado no capítulo anterior, o problema de realimentação estática de saída exige que a matriz $H = 0$ para que o sistema em malha fechada seja estritamente próprio. Logo, para este caso em particular, podemos adotar as condições do Corolário 3.2.2.1 ao invés das condições do Teorema 3.2.2 para a implementação do método de Kleinman-Newton Generalizado. A principal diferença entre o corolário e o teorema é que este último utiliza $V_{P_0}(S)$ que é a aproximação linear da matriz S^{-1} avaliada em $S = P_0$, como apresentado no Lema 3.2.1. Os exemplos utilizados em (GEROMEL; DE-AECTO, 2018) adotam as condições do Corolário 3.2.2.1 que são menos conservadoras. Entretanto, nosso objetivo é utilizar um algoritmo único para tratar ambos os problemas de realimentação de saída (estático e dinâmico). Cabe portanto, analisar o grau de conservadorismo associado às condições do Teorema 3.2.2. Os exemplos a seguir, retirados de (LEIBFRITZ, 2010), comparam ambas as metodologias.

4.1.2 Exemplo HE1

HE1 consiste em um modelo de movimento longitudinal de um helicóptero, com $n_x = 4$ estados, $n_u = 2$ entradas de controle e $n_y = 1$ saída medida.

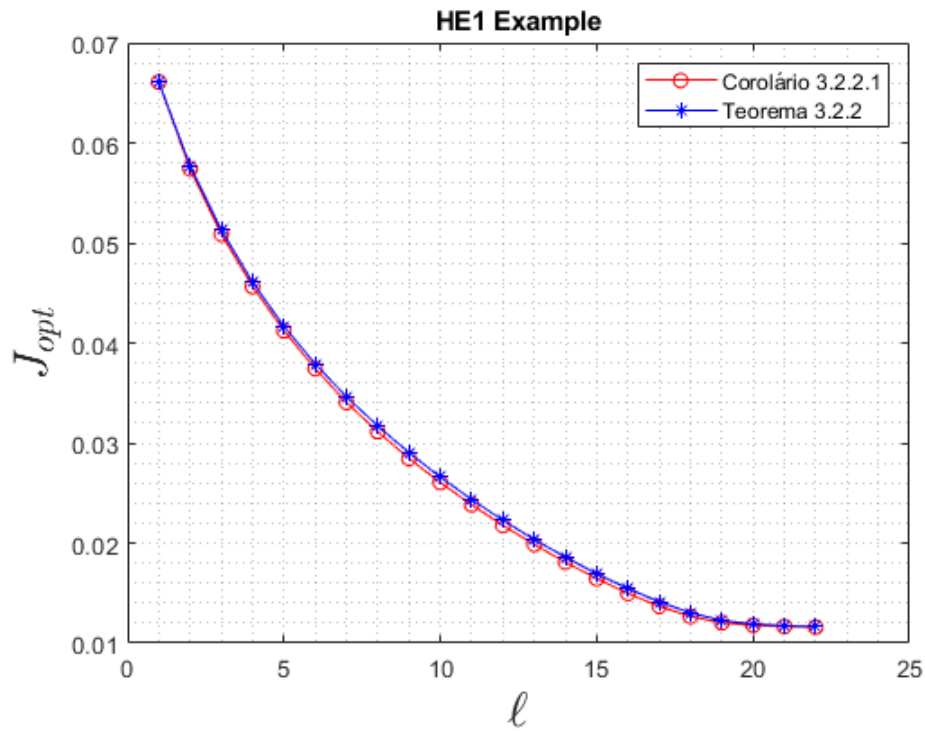


Figura 4.1: Comparação do exemplo HE1

Em ambos os programas, o custo foi o mesmo $J_{opt} = 0.0116$ e o ganhos ótimos obtidos foram:

$$Z_{opt'_{cor}} = \begin{bmatrix} -0.7789 & 3.5563 \end{bmatrix}$$

$$Z_{opt'_{teor}} = \begin{bmatrix} -0.6703 & 2.9949 \end{bmatrix}$$

sendo $Z_{opt_{cor}}$ e $Z_{opt_{teor}}$ os ganhos obtidos pelo Corolário 3.2.2.1 e Teorema 3.2.2, respectivamente. O resultado foi bastante satisfatório, apresentando o mesmo custo ótimo e convergência na mesma quantidade de iterações.

4.1.3 Exemplo AC8

AC8 é um modelo de avião de transporte e tem $n_x = 9$ estados, $n_u = 1$ entradas de controle e $n_y = 5$ saídas medidas.

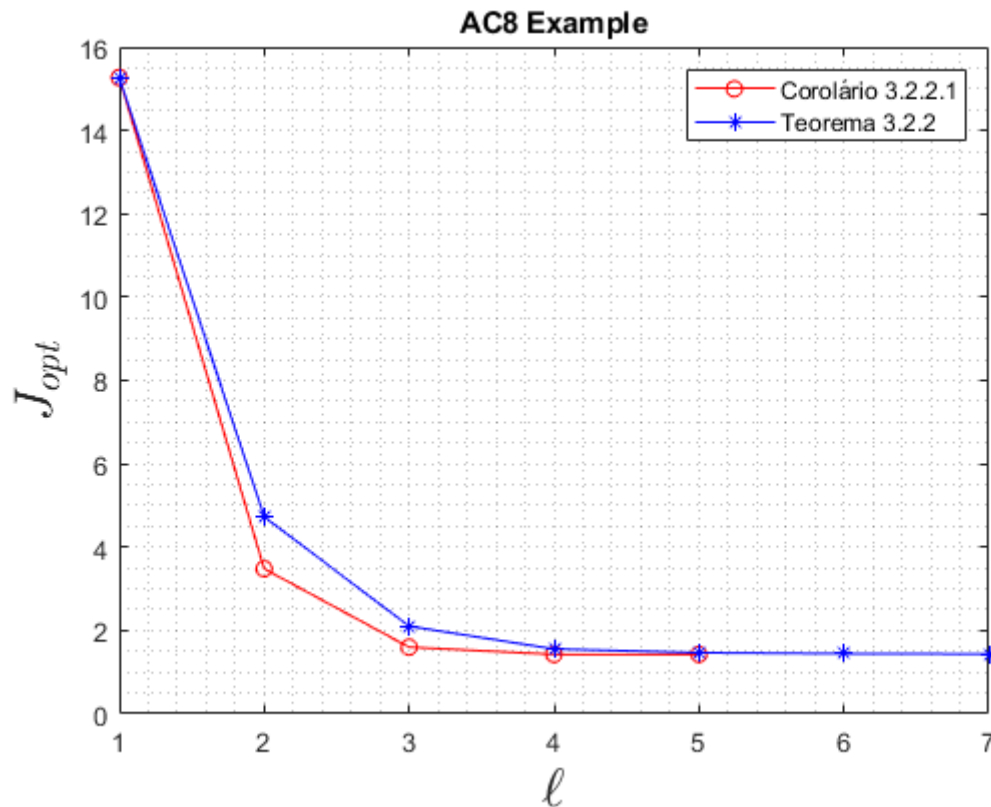


Figura 4.2: Comparação do exemplo AC8

Utilizando o Corolário 3.2.2.1, o custo obtido foi de $J_{opt} = 1.4244$, enquanto que utilizando o Teorema 3.2.2 obteve-se $J_{opt} = 1.4358$. Com relação aos ganhos ótimos, os resultados obtidos são mostrados a seguir:

$$Z_{opt_{cor}} = \begin{bmatrix} 1.3095 & -0.6254 & -0.8795 & 0.0326 & 0.7145 \end{bmatrix}$$

$$Z_{opt_{teor}} = \begin{bmatrix} 1.6337 & -0.6932 & -0.8659 & 0.0320 & 0.8035 \end{bmatrix}$$

Verifica-se nesse exemplo um leve efeito da utilização do Lema 3.2.1 no Teorema 3.2.2 que apresentou um custo 0.8% maior do que aquele obtido pelo corolário. O número de iterações para convergência também foi um pouco maior, sendo 6 iterações no caso do teorema e 4 iterações no caso do corolário.

4.1.4 Exemplo REA3

REA3 é um modelo de reator nuclear e apresenta $n_x = 12$ estados, $n_u = 1$ entradas de controle e $n_y = 3$ saídas medidas.

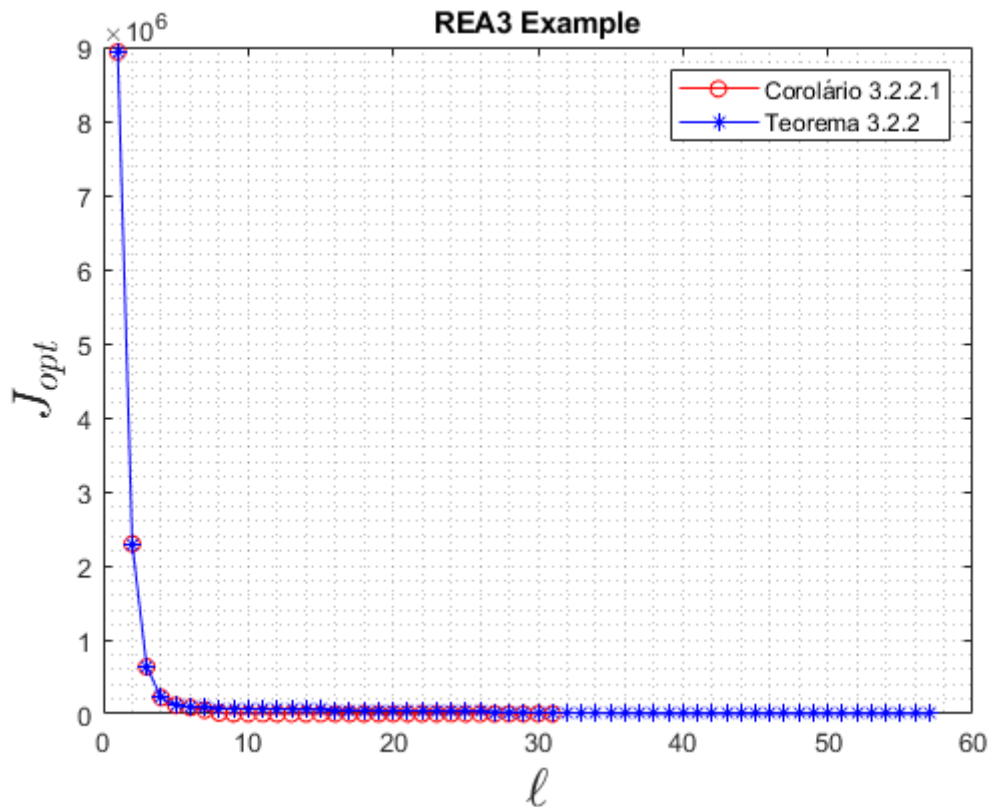


Figura 4.3: Comparação do exemplo REA3

Utilizando o Corolário 3.2.2.1 o custo obtido foi de 168.2692, enquanto que utilizando o Teorema 3.2.2 obteve-se $J_{opt} = 168.4218$. Com relação aos ganhos ótimos, temos:

$$Z_{opt_{cor}} = \begin{bmatrix} -0.0651 & -0.7517 & -19.6216 \end{bmatrix}$$

$$Z_{opt_{teor}} = \begin{bmatrix} -0.0835 & -1.4800 & -19.3218 \end{bmatrix}$$

Analisando os resultados obtidos, o custo obtido pelo teorema foi de apenas $9.07 \times 10^{-2}\%$ maior do que o fornecido pelo corolário, mas o número de iterações foi quase o dobro.

4.1.5 Exemplo Scherer

Este exemplo foi retirado de (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997) com alteração nas matrizes da saída medida. Nosso objetivo é testar o algoritmo quando todos os estados estão disponíveis para a realimentação. Neste caso $y(t) = x(t)$ o que implica

em adotar $G = I$ e $H = 0$. As demais matrizes estão apresentadas a seguir

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

O resultado obtido pode ser visualizado na Fig. 4.4.

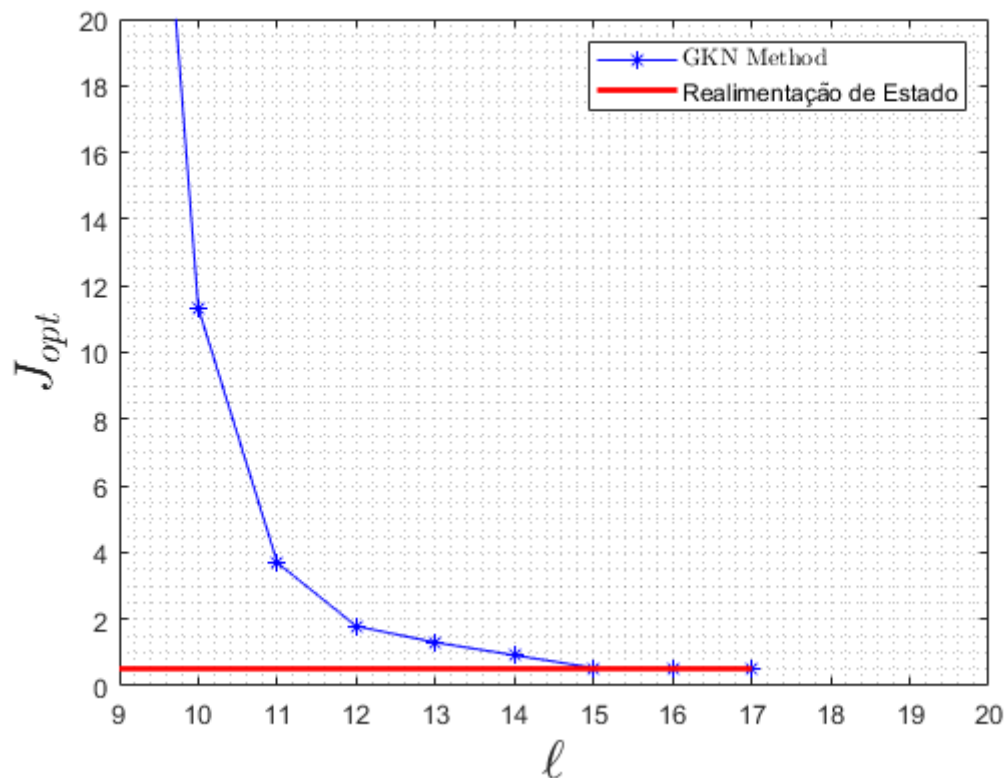


Figura 4.4: Comparação do GKN Method e a realimentação de estado

Nesta figura, o custo inicial foi de $J_{opt} = 2.67E6$ na primeira iteração. Verifica-se que após 17 iterações o custo ótimo fornecido pelo algoritmo de Kleinman-Newton Generalizado com o Teorema 3.2.2 foi idêntico à norma \mathcal{H}_2 ao quadrado do sistema, o que coloca em evidência a eficácia do Método em estudo.

Para ambos os projetos, o valor do ganho ótimo obtido foi de:

$$Z_{opt} = \begin{bmatrix} 8.36E - 6 & 2.6048 & 0.1438 \end{bmatrix}$$

Esses exemplos mostram que os resultados foram promissores para o controle via realimentação estática de saída. Na próxima seção, o método será testado para o projeto de controladores dinâmicos.

4.2 Realimentação Dinâmica de Saída

Os exemplos usados para o projeto de controle via realimentação dinâmica de saída foram os mesmos da seção anterior. Vale ressaltar que este caso não foi validado em (GEROMEL; DEAECTO, 2018), sendo os resultados e conclusões aqui apresentadas de fundamental importância para mostrar a eficácia do Método de Kleinman-Newton Generalizado para o projeto de controle via realimentação dinâmica de saída. Além da implementação do algoritmo utilizando as condições do Teorema 3.2.2, realizamos vários aprimoramentos numéricos em relação aos propostos no artigo (GEROMEL; DEAECTO, 2018) como serão descritos a seguir:

- Para os pares (C, D) propostos em (3.15) não foi possível resolver a equação de Riccati presente na Etapa 3 de Factibilidade, uma vez que o espectro da matriz Hamiltoniana ficou muito próximo do eixo imaginário. Desta forma, as seguintes matrizes foram propostas

$$C \rightarrow \begin{bmatrix} I & \mathbf{1}_{n_c \times n_x} \\ \mathbf{1}_{n_x \times n_c} & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

que se mostraram adequadas para a obtenção de uma condição inicial factível. Nesta matriz o termo $\mathbf{1}_{n_x \times n_c}$ representa uma submatriz de ordem $n_x \times n_c$ com todos os elementos iguais a 1. Note que a hipótese de ortogonalidade $D'C = 0$ é satisfeita e $D'D > 0$.

- Ainda na Etapa 3, lembrando que $\theta = \text{options}(3)$ a seguinte LMI foi acrescentada para melhorar o condicionamento numérico da matriz de ganho

$$\begin{bmatrix} \theta I & \bullet \\ Z & \theta I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.4)$$

- Para a Etapa 4 de otimalidade adotou-se as seguintes matrizes

$$C \rightarrow \begin{bmatrix} C_r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, D \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D_r & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

que são bem condicionadas e também satisfazem a hipótese de ortogonalidade $D'C = 0$ e $D'D > 0$.

Vale ressaltar que D_r e C_r são matrizes de amplitudes arbitrariamente pequenas. Para o caso em estudo $C_r = 10^{-2}I$ e $D_r = 10^{-2}I$.

4.2.1 Exemplo HE1 - Realimentação dinâmica de saída

Neste exemplo, comparamos o custo \mathcal{H}_2 obtido pelo Método de Kleinman-Newton Generalizado com o valor da norma associada à solução ótima global obtida pelo Teorema 3.2.5. Foram utilizados os seguintes parâmetros `options = [1E-2 5000 1E2]`; Implementamos o algoritmo para $n_c = n_x = 4$, indicando que o controlador possui ordem completa. Os resultados estão apresentados na Figura 4.5.

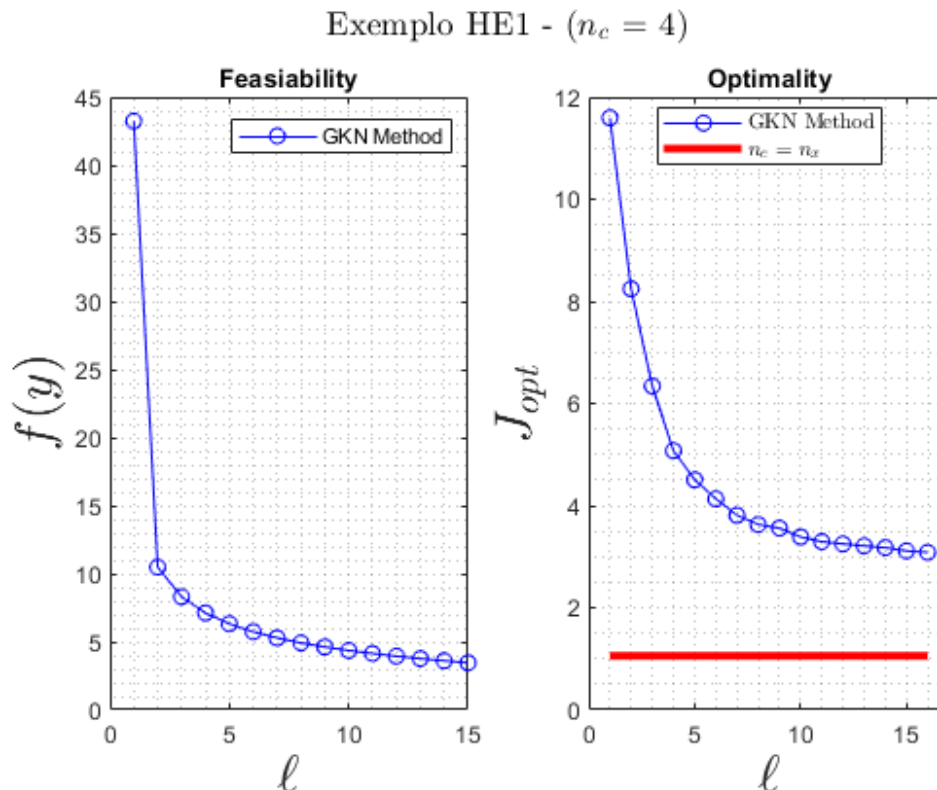


Figura 4.5: Comparação do *GKN Method* e a realimentação dinâmica de saída de ordem completa

Nota-se que depois de 16 iterações a solução ótima obtida pelo método de Kleinman-Newton Generalizado é $\sqrt{J_{opt}} = 1.7559$ enquanto a solução ótima global obtida pelo Teorema 3.2.5 foi de 1.0279. Observamos que o algoritmo é bastante sensível a modificações nos parâmetros de `options` e a diferença observada coloca em evidência a complexidade do problema em estudo, indicando que, neste caso, o algoritmo convergiu para um ótimo local, com o seguinte controlador dinâmico:

$$Z_{opt_{GKN}} = \begin{bmatrix} -4.2623 & -11.9986 & -5.1759 & -8.0425 & 3.8921 \\ 2.7500 & -2.7674 & 1.9364 & 0.3779 & -3.2203 \\ 5.5575 & 21.5287 & 8.3858 & 14.7993 & -10.3723 \\ -3.6657 & -20.9878 & -8.4836 & -15.5386 & 7.5607 \\ -0.1383 & 0.6787 & 0.0669 & 0.3547 & 0 \\ 0.5106 & -3.3172 & -0.4514 & -1.7983 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo o controlador ótimo global dado por

$$Z_{opt_{Global}} = \begin{bmatrix} -23.2711 & -177.6855 & 83.6902 & -21.4269 & -1.7544 \\ 26.6724 & 217.1892 & -102.3105 & 25.1856 & 0.4102 \\ 65.0386 & 537.7375 & -253.9364 & 62.8496 & 1.2560 \\ 48.6645 & 403.6224 & -190.6735 & 47.4224 & 2.1578 \\ 0.8688 & 6.1849 & -2.9070 & 0.7566 & 0 \\ -0.8841 & -10.9387 & 5.2594 & -1.2179 & 0 \end{bmatrix}$$

A seguir, são apresentados os resultados obtidos para o exemplo HE1, utilizando controladores dinâmicos de ordem reduzida.

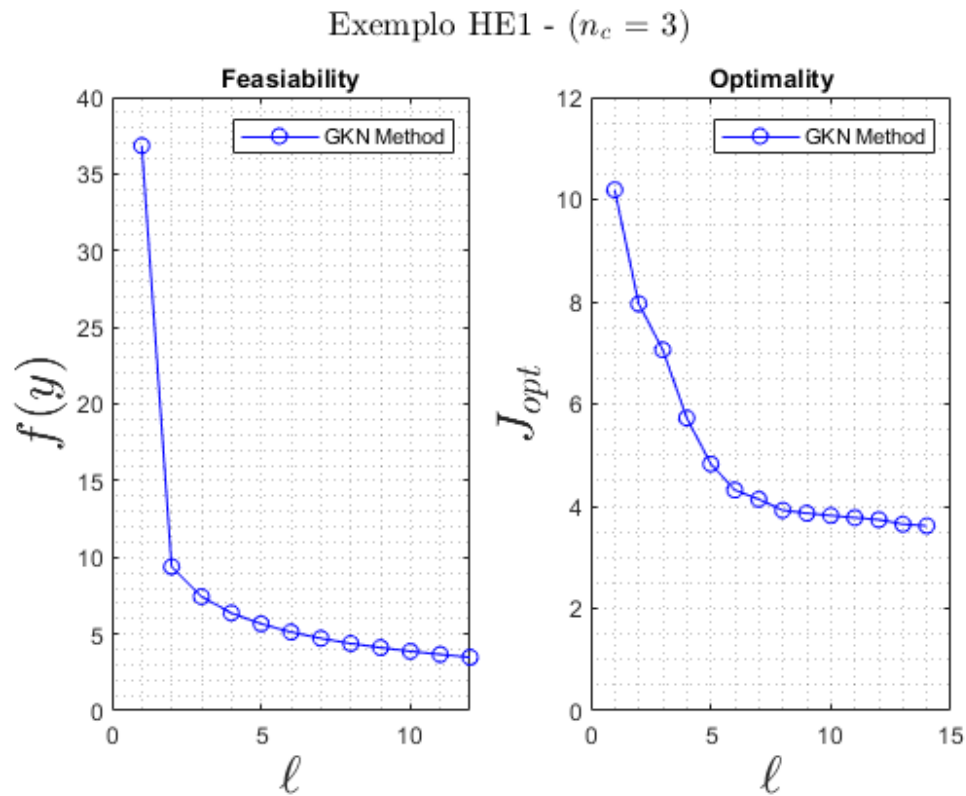


Figura 4.6: Resultado para o projeto de controlador dinâmico de saída de 3ª ordem (Exemplo HE1)

Para $n_c = 3$, após 14 iterações, o custo ótimo obtido foi de $\sqrt{J_{opt}} = 1.9017$ correspondente ao controlador dinâmico:

$$Z_{opt_{GKN}} = \begin{bmatrix} -13.1331 & -5.3266 & -3.1471 & 2.3996 \\ 4.6386 & 18.6674 & 23.8851 & -14.7324 \\ -10.9454 & -17.4326 & -20.0703 & 10.5729 \\ 0.5787 & 0.0433 & -0.1210 & 0.0000 \\ -4.4588 & -0.5883 & 0.6008 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

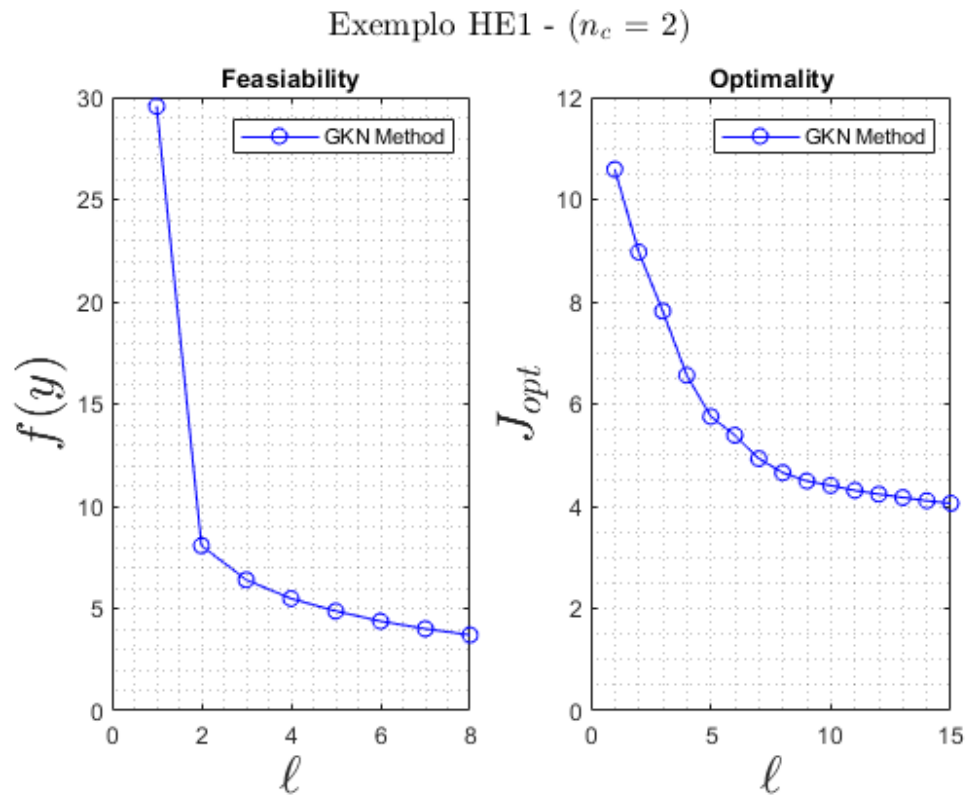


Figura 4.7: Resultado para o projeto de controlador dinâmico de saída de 2^a ordem (Exemplo HE1)

Para $n_c = 2$, após 17 iterações, o custo ótimo obtido foi de $\sqrt{J_{opt}} = 1.9825$ correspondente ao controlador dinâmico:

$$Z_{opt_{GKN}} = \begin{bmatrix} -6.6956 & 2.0817 & -1.2860 \\ -5.5185 & -3.8814 & 0.4393 \\ -0.0777 & -0.0061 & 0.0000 \\ -2.8300 & 0.2510 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

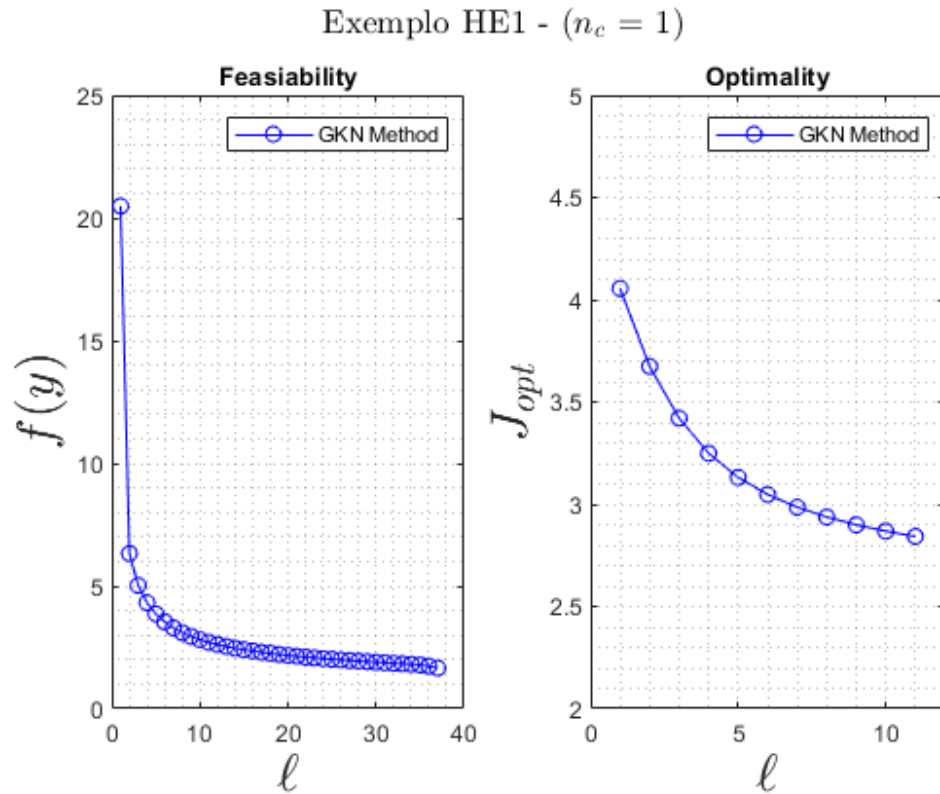


Figura 4.8: Resultado para o projeto de controlador dinâmico de saída de 1ª ordem (Exemplo HE1)

Para $n_c = 1$, após 11 iterações, o custo ótimo obtido foi de $\sqrt{J_{opt}} = 1.6859$ correspondente ao controlador dinâmico:

$$Z_{opt_{GKN}} = \begin{bmatrix} -7.9391 & 4.0019 \\ -0.4524 & 0.0000 \\ 1.0924 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

4.2.2 Exemplo Scherer - Realimentação dinâmica de saída

Implementamos também o exemplo emprestado de (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997) com as matrizes (A, B, E, C, D) fornecidas em 4.2 e (G, H) dadas por:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Para este exemplo foram utilizados os seguintes parâmetros:

$$\text{options} = [5\text{E-}4 \ 5000 \ 1\text{E}4]; \quad (4.7)$$

Para o controlador de ordem completa com $n_c = n_x = 3$, obtivemos os custos apresentados na Figura 4.9.

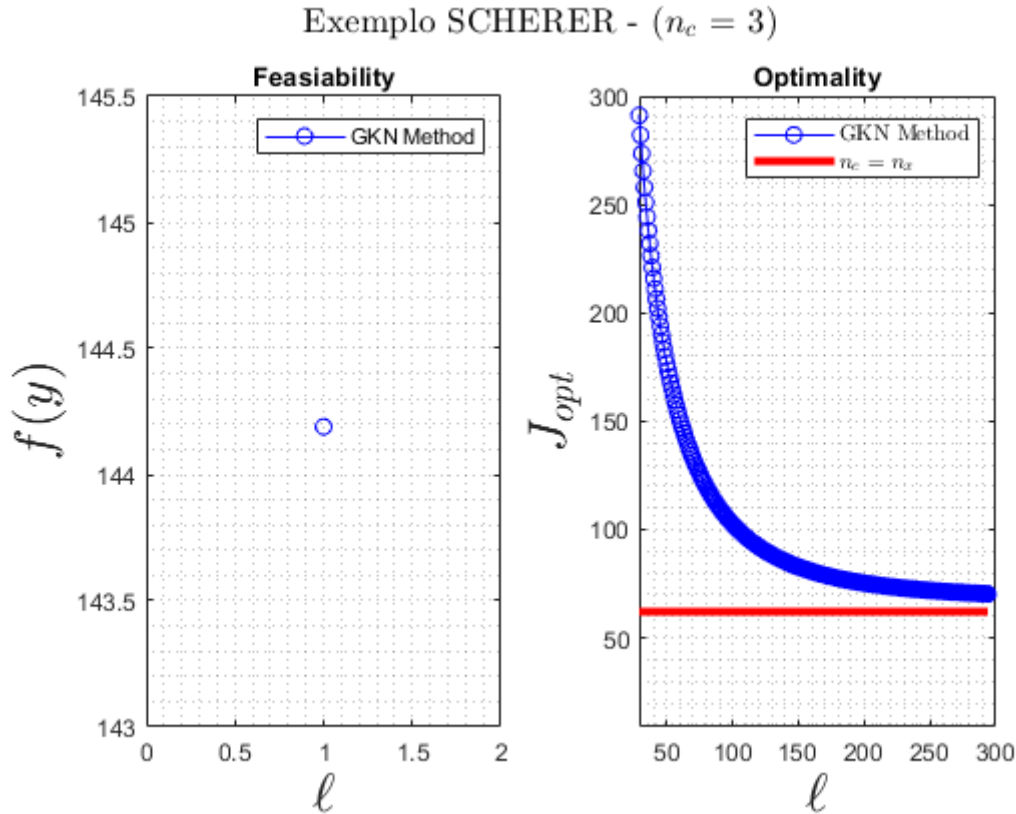


Figura 4.9: Comparação do *GKN Method* e a realimentação dinâmica de saída de ordem completa (SCHERER Example)

O custo ótimo foi de $\sqrt{J_{opt}} = 8.3869$ enquanto que a norma \mathcal{H}_2 obtida pelo Teorema 3.2.5 forneceu 7.8846. Note que para este exemplo o custo foi apenas 6% maior do que a solução ótima global. Os resultados para os controladores dinâmicos de ordem reduzida encontram-se resumidos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Resultados do projeto de controlador dinâmico de ordem reduzida do sistema presente em (SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997)

| Ordem Controlador (n_c) | Ganho Ótimo $\sqrt{J_{opt}}$ | Iterações |
|-----------------------------|------------------------------|-----------|
| 2 | 10.8292 | 79 |
| 1 | 82.7979 | 122 |

Os resultados obtidos utilizando o Método de Kleinman-Newton Generalizado foram bastantes satisfatórios. Para o projeto de controladores dinâmicos, a solução pode convergir para ótimos locais ou globais. A eficácia do algoritmo pode ser analisada comparando o seu resultado com a solução ótima global fornecida pelo Teorema 3.2.5. Para

ambos os exemplos relacionados ao projeto de controladores dinâmicos, o algoritmo convergiu para um ótimo local, sendo que em Scherer o valor ficou apenas 6% maior do o ótimo global. Vale ressaltar que o problema é intrinsecamente não-convexo e ainda não existe na literatura um método que assegure a convergência para soluções ótimas globais. No caso do projeto via realimentação estática de saída, os ótimos globais foram atingidos para todos os exemplos utilizados.

4.3 Considerações do capítulo

Neste capítulo, apresentamos os principais resultados deste trabalho de graduação. Neste contexto, foi mostrado o código desenvolvido, junto com simulações para a realimentação dinâmica e estática de saída. Em um primeira etapa, verificou-se que a realimentação estática de saída utilizando o teorema 3.2.2 se mostrou promissora para o controle via realimentação estática de saída, sendo este teorema fundamental para aplicação do caso dinâmico. Não obstante, após essa verificação, testou-se o caso dinâmico de ordem completa e reduzida para exemplos tirados da literatura, onde foi obtido ótimos resultados após todos os aprimoramentos numéricos propostos.

Conclusões

O controle ótimo é uma das áreas que mais tem se desenvolvido nos últimos anos. Ainda existe muitos *gaps* na literatura, como o problema tratado aqui neste trabalho de graduação. Desde o início do trabalho já era conhecido a dificuldade de se projetar controladores dinâmicos de ordem reduzida, bem como os controladores estáticos. Porém foi no desenvolvimento do trabalho que foi se dado conta do quão complexo é o assunto.

De maneira geral, implementamos o algoritmo de Kleinman-Newton Generalizado proposto em (GEROMEL; DEAECTO, 2018) e realizamos alguns aprimoramentos numéricos. Nesta referência, a validação do algoritmo foi realizada apenas no projeto de controle via realimentação estática de saída. O projeto de controladores dinâmicos com ordem reduzida não foi validado. Neste sentido, os aprimoramentos aqui propostos foram importantes para assegurar a eficiência do algoritmo no projeto desta classe de controladores. Assim, o objetivo foi atingido, porém muitos assuntos para futuros estudos foram identificados e serão aqui destacados aqui.

Primeiramente, deve-se entender como a escolha das matrizes aumentadas C_a e D_a na etapa de factibilidade influenciam na solução. Apesar dos resultados apresentados serem satisfatórios, não se sabe como a variação desses parâmetros pode melhorar a resposta.

Segundo, comparações a serem feitas com outros métodos da literatura, por exemplo com o trabalho de (EL GHAOUI; OUSTRY; AITRAMI, 1997), para verificar a eficiência do método desenvolvido é outra questão a ser avaliada futuramente.

Muitos estudos na área de controle com restrição no ganho de realimentação estão acontecendo e acredito que esse trabalho foi uma pequena, mas importante, contribuição a respeito deste assunto.

Referências bibliográficas

- BOYD, S. et al. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. [S.l.]: SIAM, 1994.
- COLANERI, P.; GEROMEL, J. C.; LOCATELLI, A. **Control Theory and Design: An RH2 and RH Viewpoint**. [S.l.]: Elsevier, 1997.
- EL GHAOUI, L.; OUSTRY, F.; AITRAMI, M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. **IEEE transactions on automatic control**, IEEE, v. 42, n. 8, p. 1171–1176, 1997.
- FIALA, J.; KOČVARA, M.; STINGL, M. PENLAB: A MATLAB solver for nonlinear semidefinite optimization. **arXiv preprint arXiv:1311.5240**, 2013.
- GEROMEL, J. C.; DE SOUZA, C.; SKELTON, R. Static output feedback controllers: Stability and convexity. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 43, n. 1, p. 120–125, 1998.
- GEROMEL, J. C.; DEAECTO, G. S. Generalized Kleinman-Newton method. **Optimal Control Applications and Methods**, Wiley Online Library, v. 39, n. 2, p. 1130–1140, 2018.
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. **Controle linear de sistemas dinâmicos 2ª edição: teoria, ensaios práticos e exercícios**. [S.l.]: Editora Blucher, 2019.
- GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. Optimal decentralized control of dynamic systems. **Automatica**, Elsevier, v. 18, n. 5, p. 545–557, 1982.
- HENRION, D. et al. Solving polynomial static output feedback problems with PENBMI. In: IEEE. PROCEEDINGS of the 44th IEEE Conference on Decision and Control. [S.l.: s.n.], 2005. p. 7581–7586.
- KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. [S.l.]: Prentice-Hall, 2002.

- KIMURA. Pole placement by gain output feedback. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 20, p. 509–516, 1975.
- KLEINMAN, D. On an iterative technique for Riccati equation computations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 13, n. 1, p. 114–115, 1968.
- LEIBFRITZ, F. Compleib: Constrained matrix optimization problem library, 2006. **URL** <http://www.complib.de>, 2010.
- LEVINE, W.; ATHANS, M. On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems. **IEEE Transactions on Automatic control**, IEEE, v. 15, n. 1, p. 44–48, 1970.
- OLIVEIRA, M. C. d. et al. Controle de sistemas lineares baseado nas desigualdades matriciais lineares. [sn], 1999.
- ROCKAFELLAR, R. T. **Convex analysis**. [S.l.]: Princeton university press, 1970.
- SADABADI, M. S.; PEAUCELLE, D. From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey. **Annual reviews in control**, Elsevier, v. 42, p. 11–26, 2016.
- SCHERER, C.; GAHINET, P.; CHILALI, M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. **IEEE Transactions on automatic control**, IEEE, v. 42, n. 7, p. 896–911, 1997.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. et al. **Applied nonlinear control**. [S.l.]: Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. v. 199.
- SUSSMANN, H. J.; WILLEMS, J. C. 300 years of optimal control: from the brachystochrone to the maximum principle. **IEEE Control Systems Magazine**, IEEE, v. 17, n. 3, p. 32–44, 1997.
- TANAKA, T.; LANGBORT, C. The bounded real lemma for internally positive systems and H-infinity structured static state feedback. **IEEE transactions on automatic control**, IEEE, v. 56, n. 9, p. 2218–2223, 2011.

Apêndice A

Código

A.1 Etapa 1 - Entrada de dados

```
1 clear all
2 close all
3 clc
4
5 %System
6 load('HE1_Dyn.mat');
7
8 %Controller Order
9 nc = 4;
10
11 %Options(1) Stop condition
12 %Options(2) Max number of iterations
13 %Options(3) Value of Tol ( $Z'Z < tol^2$ )
14
15 options = [1e-2 5000 1e2];
16
17 [Jopt,Jfeas,Zopt,Zfeas] = GKN_Method(A,B,E,C,D,G,H,nc,options);
```

A.2 Etapa 2 - Preparação de dados


```

39 %Dynamic Output Feedback
40 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
41
42 if nc > 0
43
44     %Z structure
45     Zstruct = [nc nc;nc ny;nu nc];
46
47     %Matrices with compatible dimensions
48     Aa = [zeros(nc) zeros(nc,nx);zeros(nx,nc) A];
49     Ba = [eye(nc) zeros(nc,nu);zeros(nx,nc) B];
50     Ga = [eye(nc) zeros(nc,nx);zeros(ny,nc) G];
51     Ea = [zeros(nc,nw) ; E];
52     Ha = [zeros(nc,nw) ; H];
53     Ca = [epsilon*eye(nc,nc) zeros(nc,nx);
54           zeros(nc,nc) zeros(nc,nx);
55           zeros(nz,nc) C];
56     Da = [zeros(nc,nc) zeros(nc,nu);
57           epsilon*eye(nc,nc) zeros(nc,nu);
58           zeros(nz,nc) D];
59     Cafeas = [eye(nc,nc) ones(nc,nx);
60              ones(nx,nc) eye(nx,nx);
61              zeros(nc+nu,nc+nx)];
62     Dafeas = [zeros(nc+nx,nc+nu); eye(nc+nu,nc+nu)];
63
64     %Step 3 - Feasibility Phase
65     [Jfeas,Zfeas,P,f] = ...
66         H2_Feas(Aa,Ba,Ea,Cafeas,Dafeas,Ga,Ha,nc,options,Zstruct,Ca,Da);
67
68     %Step 4 - Optimality Phase
69     [Jopt,Zopt] = ...
70         H2_Opt(Aa,Ba,Ea,Ca,Da,Ga,Ha,nc,options,Zstruct,Jfeas,Zfeas,P);
71
72 end

```

A.3 Etapa 3 - Factibilidade

```

1 function [Jfeas,Zfeas,P,f] = ...
    H2_Feas(A,B,E,Cfeas,Dfeas,G,H,nc,options,Zstruct,C,D)
2
3 %Options
4 epsilon = options(1);
5 itmax = options(2);
6 tol = options(3);
7
8 %Matrices Dimensions
9 nx = size(A,2);
10 nu = size(B,2);
11 ny = size(G,1);
12
13 Nsub = size(Zstruct,1);
14
15 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
16 %Feasibility
17 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
18
19 %Solve Riccati Equation
20 [gamma, gamma, Yo] = care(A,B,Cfeas'*Cfeas,Dfeas'*Dfeas,Cfeas'*Dfeas);
21 Yo = -Yo;
22
23 %Matrices AL and CL
24 AL = A + B*Yo;
25 CL = Cfeas + Dfeas*Yo;
26 P = lyap(AL',CL'*CL);
27
28 %Initial Penalty
29 penalty = 2*sum(svd(Yo));
30
31 %Satisfying Orthogonality Condition
32 An = A - B/(Dfeas'*Dfeas)*Dfeas'*Cfeas;
33 Cn = Cfeas - Dfeas/(Dfeas'*Dfeas)*Dfeas'*Cfeas;
34

```

```

35 %Iterations Number
36 it = 0;
37
38
39 f(it+1) = penalty;
40 while true
41
42     it = it + 1;
43
44     An = A - B/(Dfeas'*Dfeas)*Dfeas'*Cfeas;
45     Cn = Cfeas - Dfeas/(Dfeas'*Dfeas)*Dfeas'*Cfeas;
46
47     Ap = An - B/(Dfeas'*Dfeas)*B'*P;
48     Cp = Cn - Dfeas/(Dfeas'*Dfeas)*B'*P;
49
50     %LMI descriptions
51     setlmis([])
52
53
54     S = lmivar(1,[nx 1]);
55     W = lmivar(1,[nx 1]);
56     X = lmivar(1,[nu 1]);
57     Y = lmivar(2,[nu nx]);
58
59     if nc == 0
60         Z = lmivar(2,[nu ny]);
61     elseif nc > 0
62         for i = 1:Nsub
63             [R{i},n,sR{i}] = lmivar(2,Zstruct(i,:));
64         end
65         Z = ...
66             lmivar(3,[sR{1},sR{2};sR{3},zeros(Zstruct(3,1),Zstruct(2,2))]);
67     end
68
69     ct = 1;
70     lmiterm([-ct,1,1,S],1,1);
71
72     ct = ct+1;

```

```

73     lmiterm([ct,1,1,S],Ap',1,'s');
74     lmiterm([ct,1,1,0],Cp'*Cp);
75     lmiterm([ct,2,1,Y],1,1);
76     lmiterm([ct,2,1,Z],1,G);
77     lmiterm([ct,2,1,S],(Dfeas'*Dfeas)\B',1);
78     lmiterm([ct,2,1,0],(Dfeas'*Dfeas)\Dfeas'*Cfeas);
79     lmiterm([ct,2,2,0],[-inv(Dfeas'*Dfeas)]);
80
81     if nc > 0
82         ct = ct+1;
83         lmiterm([-ct,1,1,0],tol);
84         lmiterm([-ct,2,1,Z],1,1);
85         lmiterm([-ct,2,2,0],tol);
86     end
87
88     ct = ct+1;
89     lmiterm([-ct,1,1,W],1,1);
90     lmiterm([-ct,2,1,Y],1,1);
91     lmiterm([-ct,2,2,X],1,1);
92
93     lmisys = getlmis;
94
95     %Objective function
96     options = [1e-4,200,1e9,100,1];
97
98     np = decnbr(lmisys);
99     c = zeros(np,1);
100    for i=1:np
101        Wi = defcx(lmisys,i,W);
102        Xi = defcx(lmisys,i,X);
103        c(i) = trace(Wi) + trace(Xi);
104    end
105
106    [copt,xopt] = mincx(lmisys,c,options);
107
108    if (isempty(copt))
109        Ss = [];
110        Xs = [];
111        Zs = [];

```



```
112     Ys = [];  
113     Ws = [];  
114     disp('not able to perform de minimization on feasibility');  
115     return  
116 end  
117  
118 Sfeas = dec2mat(lmisys,xopt,S);  
119 Yfeas = dec2mat(lmisys,xopt,Y);  
120 Zfeas = dec2mat(lmisys,xopt,Z);  
121  
122  
123 L = Zfeas*G + Yfeas ;  
124 AL = A+B*L;  
125 CL = Cfeas+Dfeas*L;  
126 P = lyap(AL',CL'*CL);  
127 eig_max = max(real(eig(A+B*Zfeas*G)));  
128  
129 %First Stop Condition  
130 if eig_max < 0  
131     L = Zfeas*G;  
132     F = B*Zfeas;  
133     AL = A + B*L;  
134     CL = C + D*L;  
135     EF = E + F*H;  
136     P = lyap(AL',CL'*CL);  
137     Jfeas = trace(EF'*P*EF);  
138     flag = 1;  
139     break;  
140 end  
141  
142  
143 penalty_i = 2*sum(svd(Yfeas));  
144 penalty = penalty_i;  
145 f(it+1) = penalty;  
146  
147 %Second Stop Condition  
148 if it > itmax  
149     flag = 3;  
150     break;
```

```

151     end
152 end
153
154 if flag == 1
155     return;
156
157 elseif flag == 2
158     disp('Max number of iterations');
159     return;
160 end
161
162
163 end

```

A.4 Etapa 4 - Otimalidade

```

1 function [Jopt,Zopt] = ...
   H2_Opt (A,B,E,C,D,G,H,nc,options,Zstruct,Jfeas,Zfeas,P)
2
3 %Options
4 epsilon = options(1);
5
6 %Matrices Dimensions
7 nx = size(A,2);
8 nu = size(B,2);
9 ny = size(G,1);
10 nw = size(E,2);
11 nz = size(C,1);
12 Nsub = size(Zstruct,1);
13
14 %Satisfying Orthogonality Condition
15 An = A - B/(D'*D)*D'*C;
16 Cn = C - D/(D'*D)*D'*C;
17
18 %Iterations
19 ito = 0;

```

```

20 Jopt(ito+1) = Jfeas;
21
22 while true
23     ito = ito + 1;
24
25     Ap = An - B/(D'*D)*B'*P;
26     Cp = Cn - D/(D'*D)*B'*P;
27
28     %LMI description
29     setlmis([])
30
31
32     S = lmivar(1,[nx 1]);
33     W = lmivar(1,[nw 1]);
34
35     if nc == 0
36         Z = lmivar(2,[nu ny]);
37     elseif nc > 0
38         for i = 1:Nsub
39             [R{i},n,sR{i}] = lmivar(2,Zstruct(i,:));
40         end
41         Z = ...
42             lmivar(3,[sR{1},sR{2};sR{3},zeros(Zstruct(3,1),Zstruct(2,2))]);
43     end
44
45     ct = 1;
46     lmiterm([-ct,1,1,S],1,1);
47
48     ct = ct+1;
49     lmiterm([ct,1,1,S],Ap',1,'s');
50     lmiterm([ct,1,1,0],Cp'*Cp);
51     lmiterm([ct,2,1,Z],1,G);
52     lmiterm([ct,2,1,S],(D'*D)\B',1);
53     lmiterm([ct,2,1,0],(D'*D)\D'*C);
54     lmiterm([ct,2,2,0],[-inv(D'*D)]);
55
56     ct = ct+1;
57     lmiterm([-ct,1,1,W],1,1);

```

```

58  lmiterm([-ct,2,1,0],E);
59  lmiterm([-ct,2,1,Z],B,H);
60  lmiterm([-ct,2,2,0],2*inv(P));
61  lmiterm([-ct,2,2,S],-inv(P),inv(P));
62
63  lmisys = getlmis;
64
65  %Objective Function
66  options = [1e-4,200,1e9,100,1];
67  np = decnbr(lmisys);
68  c = zeros(np,1);
69  for i=1:np
70      Wi = defcx(lmisys,i,W);
71      c(i) = trace(Wi);
72  end
73
74  [copt,xopt] = mincx(lmisys,c,options);
75
76  if (isempty(copt))
77      Ss = [];
78      Zs = [];
79      disp('not able to perform de minimization on optimality');
80      return
81  end
82
83  Sopt = dec2mat(lmisys,xopt,S);
84  Zopt = dec2mat(lmisys,xopt,Z);
85
86  L = Zopt*G;
87  F = B*Zopt;
88  AL = A + B*L;
89  CL = C + D*L;
90  EF = E + F*H;
91  P = lyap(AL',CL'*CL);
92  Jopt(ito+1) = trace(EF'*P*EF);
93  if Jopt(ito+1)/Jopt(ito) ≥ 1 - epsilon
94      break;
95  end
96  end

```

```
97  
98 return;  
99  
100 end
```