



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Relatório Final do Trabalho de Graduação II
Período : 01/08/2015 a 15/11/2015

Sistemas afins com comutação a tempo discreto

Aluno: Lucas Neves Egidio
Orientadora: Profa. Dra. Grace S. Deaecto

15 de novembro de 2015

Sumário

1	Introdução e Motivação	3
2	Descrição do sistema LIT	3
2.1	Estudo de estabilidade	4
2.2	Norma \mathcal{H}_2	5
3	Sistemas lineares com comutação	7
3.1	Índice de desempenho \mathcal{H}_2	10
4	Sistemas afins com comutação	11
4.1	Sistemas a tempo contínuo	12
4.2	Sistemas discretizados	14
4.3	Estabilidade prática de sistemas afins com comutação	16
5	Simulações numéricas	17
5.1	Exemplo 1	18
5.2	Exemplo 2	19
5.3	Exemplo 3	24
5.4	Exemplo 4	26
5.5	Exemplo 5	28
5.6	Exemplo de Aplicação prática	31
5.7	Comentários	35
6	Conclusões e trabalhos futuros	36
7	Referências	36

Lista de Figuras

1	Desenvolvimento da função de resposta ao impulso de $G(s)$	19
2	Custo garantido em função de p e q (Ex. 01).	20
3	Trajectoria dos estados x_1 e x_2 em função de k (Ex. 01).	21
4	Plano de fase com a trajetória do sistema (Ex. 01).	21
5	Regra de controle $\sigma(x(k))$ (Ex. 01).	22
6	Função de Lyapunov $v(x(k))$ (Ex. 01).	22
7	Custo garantido em função de γ (Ex. 01)	23
8	Custo garantido em função de p e q (Ex. 02).	24
9	Trajectoria dos estados x_1 e x_2 em função de k (Ex. 02).	25
10	Regra de controle $\sigma(x(k))$ (Ex. 02).	26
11	Discretização do conjunto X_e dos pontos de equilíbrio atingíveis. (Ex. 04)	27
12	Desenvolvimento dos estados do sistema afim a tempo contínuo chaveado. (Ex. 04)	27

13	Desenvolvimento da regra de controle. (Ex. 04)	28
14	Comparação da evolução dos estados entre o sistema contínuo e o discretizado para $T_1 = 10^{-7}s$ (Ex. 05).	29
15	Comparação da evolução dos estados entre o sistema contínuo e o discretizado para $T_2 = 10^{-3}s$ (Ex. 05).	29
16	Comparação da evolução dos estados entre o sistema contínuo e o discretizado para $T_3 = 10^{-2}s$ (Ex. 05).	30
17	Comparação da evolução dos estados entre o sistema contínuo e o discretizado para $T_4 = 10^{-1}s$ (Ex. 05).	30
18	Conversor de tensão CC-CC <i>Buck-Boost</i> (Ex. Prático).	31
19	Dimensões dos semi-eixos do elipsoide \mathcal{E} encontrado em função de T_{max} (Ex. Prático).	33
20	Evolução dos estados (Ex. Prático).	33
21	Regra de comutação (Ex. Prático).	34
22	Evolução dos erros dos estados no tempo em plano de fase com o elipsoide \mathcal{E} , em vermelho (Ex. Prático).	35

1 Introdução e Motivação

Sistemas dinâmicos com comutação são compostos por um número finito de subsistemas e uma regra que seleciona a cada instante de tempo um deles. No contexto deste trabalho, esta regra é uma variável de controle que deve ser determinada de forma a garantir estabilidade e desempenho do sistema global. Atualmente o interesse no estudo destes sistemas é crescente devido a sua aplicação em várias áreas da engenharia como em eletrônica de potência e controle de sistemas em rede. Ademais, eles possuem características intrínsecas importantes que permitem, por exemplo, obter uma trajetória estável mesmo que todos os subsistemas sejam instáveis, ou melhorar o desempenho do sistema como um todo, quando comparado com cada um dos subsistemas isolados.

A literatura apresenta vários trabalhos relacionados à análise de estabilidade e certificação de desempenho para sistemas lineares, entretanto, ela é escassa quando se trata de sistemas afins com comutação.

Uma vez que estou matriculado no programa PICC¹ da FEM, o meu projeto de mestrado será uma continuação natural dos trabalhos realizados durante este trabalho de graduação e minha iniciação científica, apoiada pela FAPESP.

O objetivo deste trabalho foi a realização de estudos sobre análise de estabilidade e desempenho de sistemas lineares com comutação a tempo discreto. Desta forma uma base teórica foi fundamentada possibilitando o estudo de sistemas afins com comutação a tempo discreto, assunto ainda em aberto na literatura.

Foram realizadas, com o auxílio do MATLAB algumas simulações que ilustram os estudos aqui realizados e apresentados nas próximas seções.

2 Descrição do sistema LIT

Seja o sistema discreto linear invariante no tempo (LIT) representado pelo seguinte conjunto de equações a diferenças:

$$x(k+1) = Ax(k) + Hw(k), \quad x(0) = 0 \quad (1)$$

$$y(k) = Ex(k) + Gw(k), \quad (2)$$

¹Programa de Incentivo à Capacitação Científica

onde $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados do sistema, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada externa, $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saídas e $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $H \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$, $E \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$ são matrizes que definem o sistema. Sua função de transferência é dada por

$$H_{wy}(z) = E(zI - A)^{-1}H + G \quad (3)$$

2.1 Estudo de estabilidade

Para o estudo da estabilidade vamos utilizar o critério de Lyapunov e considerar o sistema mais simples com $w(k) = 0$, evoluindo de uma condição inicial arbitrária

$$x(k+1) = Ax(k), \quad x(0) = x_0 \quad (4)$$

Adotando a função de Lyapunov $v(x) = x^T Px$, $P > 0$ que, claramente, apresenta as características de uma função distância, como descrito em [16] e [20], ou seja

- $v(0) = 0$;
- $v(x) > 0$, $x \neq 0$;
- $v(x)$ é ilimitada para $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ ilimitado.

temos que, definindo $\Delta v(x) = v(x(k+1)) - v(x(k))$, se

- $\Delta v(x) < 0$, $\forall x \neq 0$ e
- $\Delta v(x) = 0$, $x = 0$

então o sistema (4) é globalmente assintoticamente estável. De fato, se estas condições forem satisfeitas, a distância $v(x)$ aplicada ao sistema (3), partindo de um ponto arbitrário $x(0) = x_0$, sempre diminuirá ao decorrer do tempo, até chegar a zero no ponto de equilíbrio $x_e = \bar{0}$.

O ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^{n_x}$ de um sistema é aquele em que se $x(0) = x_e \Rightarrow x(k) = x_e$, $\forall k \in \mathbb{N}$, ou seja, se o sistema iniciar neste ponto, lá permanece para todo $k \in \mathbb{N}$. No caso de sistemas lineares, a origem $x_e = \bar{0}$ é o seu único ponto de equilíbrio.

Utilizando a função $v(x) = x^T Px$ escolhida, temos que

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= x(k+1)^T Px(k+1) - x(k)^T Px(k) \\ &= x(k)^T (A^T PA - P)x(k) \end{aligned} \quad (5)$$

Assim, para que o sistema seja globalmente assintoticamente estável, então, (5) deve ser negativa para todo $x \neq \bar{0}$. O lema a seguir apresenta o critério de Lyapunov para sistemas lineares a tempo discreto.

Lema 1 *Dada uma matriz $Q > 0$, o sistema (3) é globalmente assintoticamente estável se e somente se a equação matricial de Lyapunov*

$$A^T P A - P + Q = 0 \quad (6)$$

apresentar uma solução definida positiva P .

Note que a condição apresentada no lema não é apenas suficiente, mas também necessária para a estabilidade, veja [23]. A seguir apresentamos o cálculo da norma \mathcal{H}_2 para o sistema mais geral (1)-(2).

2.2 Norma \mathcal{H}_2

Um dos critérios de desempenho mais utilizados para medir a qualidade de um projeto de controle é a norma \mathcal{H}_2 . No caso onde $w(k) = \delta(k)$, o impulso unitário, temos $y(k) = h(k)$ chamada de resposta ao impulso do sistema. A norma \mathcal{H}_2 para sistemas a tempo discreto é definida para toda função de transferência $H_{wy}(z)$ analítica no exterior do círculo de raio unitário incluindo a sua borda sendo dada por

$$\|H_{wz}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{tr}(H_{wz}(e^{-j\omega})^T H_{wz}(e^{j\omega})) d\omega \quad (7)$$

onde temos $\mathcal{Z}\{h(k)\} = H_{wz}(e^{j\omega})$ e $\text{tr}(X)$ é o traço da matriz X . Pelo teorema de Parseval podemos reescrever a expressão da equação (7) na forma

$$\|H_{wz}\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \text{tr}(h(k)^T h(k)). \quad (8)$$

Como o impulso unitário $\delta(k)$ é definido como $\delta(0) = 1$ e $\delta(k) = 0, \forall k \neq 0$ derivamos a expressão de $h(k)$ a partir da definição da entrada e do sistema (1) e (2) encontrando

$$h(k) = \begin{cases} G & , k = 0 \\ EA^{k-1}H & , k \geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

que pode ser substituída em (8) obtendo

$$\begin{aligned}
\|H_{wz}\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \text{tr}(H^T (A^{k-1})^T E^T E A^{k-1} H) + \text{tr}(G^T G) \\
&= \text{tr}\left(H^T \sum_{k=1}^{\infty} (A^{k-1})^T E^T E A^{k-1} H\right) + \text{tr}(G^T G) \\
&= \text{tr}(H^T P_o H + G^T G)
\end{aligned} \tag{10}$$

em que

$$P_o = \sum_{k=0}^{\infty} (A^k)^T E^T E A^k \tag{11}$$

é o gramiano de observabilidade que pode ser computado através da resolução polinomial da equação (6) quando $Q = E^T E$, ou seja,

$$A^T P_o A - P + E^T E = 0 \tag{12}$$

Pela circularidade do operador traço, ou seja, $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$, temos, da equação (10) que

$$\|H_{wz}\|_2^2 = \text{tr}(E P_c E^T + G G^T) \tag{13}$$

em que

$$P_c = \sum_{k=0}^{\infty} A^k H H^T (A^k)^T \tag{14}$$

é o gramiano de controlabilidade e satisfaz a seguinte equação

$$A P_c A^T - P + H H^T = 0 \tag{15}$$

Podemos calcular a norma \mathcal{H}_2 do sistema (1)-(2) resolvendo um problema de otimização convexa descrito através de desigualdades matriciais lineares², [2]. De fato, note que fazendo $E'E < E'E + S$ com $S > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
P_o &= \sum_{k=0}^{\infty} (A^k)^T E^T E A^k \\
&< \sum_{k=0}^{\infty} (A^k)^T (E^T E + S) A^k \\
&< P
\end{aligned} \tag{16}$$

²do inglês LMIs - Linear Matrix Inequalities

sendo P a solução da equação de Lyapunov

$$A^T P A - P + E^T E + S = 0 \quad (17)$$

Assim, podemos transformar a igualdade (17) na desigualdade $A^T P A - P + E^T E = -S < 0$ e calcular a norma \mathcal{H}_2 do sistema observando que

$$\|H_{wy}\|_2^2 = \text{tr}(H^T P_o H + G^T G) \leq \min_{P>0} \text{tr}(H^T P H + G^T G) \quad (18)$$

sujeito a

$$A^T P A - P + E^T E < 0 \quad (19)$$

Alternativamente, utilizando o gramiano de controlabilidade, temos

$$\|H_{wy}\|_2^2 = \text{tr}(E P_c E^T + G G^T) \leq \min_{P>0} \text{tr}(E P E^T + G G^T) \quad (20)$$

sujeito a

$$A P A^T - P + H H^T < 0 \quad (21)$$

Na seção seguinte, nos dedicaremos ao estudo da estabilidade e da norma \mathcal{H}_2 para sistemas lineares com comutação.

3 Sistemas lineares com comutação

As referências básicas para o estudo de sistemas com comutação são [14], [25], [28], [30]. Consideremos o seguinte sistema com comutação descrito pelas equações a diferenças

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)} x(k) + H_{\sigma(k)} w(k), \quad x(0) = 0 \quad (22)$$

$$y(k) = E_{\sigma(k)} x(k) + G_{\sigma(k)} w(k) \quad (23)$$

sendo $\sigma(k)$ a regra de comutação $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K} := \{1, 2, \dots, N\}$ que seleciona a cada passo de tempo k um dentre os N subsistemas disponíveis

$$\mathcal{G}_i := \begin{bmatrix} A_i & H_i \\ E_i & G_i \end{bmatrix}, \quad i \in \mathbb{K} \quad (24)$$

Existem duas formas de abordar a regra $\sigma(k)$; perturbação e controle. Quando $\sigma(k)$ é perturbação, o problema de controle consiste em garantir a

estabilidade do sistema para qualquer variação arbitrária da função $\sigma(k)$, veja [11]. Como condições suficientes para a estabilidade existe o seguinte teorema, cuja prova pode ser encontrada em [8]:

Teorema 1 *O sistema linear com comutação (22)-(23) com $w(k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, e evoluindo de $x(0) = x_0$ é globalmente assintoticamente estável e a desigualdade $\|z\|_2^2 \leq \min_{i \in \mathbb{K}} x_0^T P_i x_0$ é válida para todo $\sigma(k)$ se existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e um escalar $\gamma > 0$ satisfazendo o seguinte conjunto de desigualdades:*

$$\begin{bmatrix} P_j + \gamma(P_j - P_i) & * & * \\ P_i A_i & P_i & * \\ E_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 : i, j \in \mathbb{K} \quad (25)$$

Nota-se que uma das condições necessárias para factibilidade do conjunto de desigualdades matriciais (25) é que cada um dos subsistemas \mathcal{G}_i deve ser estável.

Nosso interesse está voltado para o caso em que $\sigma(k) = u(x(k))$ é uma regra de controle que deve ser determinada de forma a garantir estabilidade do sistema(22)-(23). Resultados deste estudo podem ser vistos com maiores detalhes em [18]. Como veremos em seguida, a estabilidade nesse caso é garantida adotando uma função de Lyapunov do tipo mínimo

$$v(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} x^T P_i x \quad (26)$$

e escolhendo a seguinte função de comutação

$$\sigma(x(k)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(k)^T P_i x(k) \quad (27)$$

em que $P_i > 0$ satisfaz algumas condições que serão apresentadas a seguir. Definindo uma subclasse de matrizes de Metzler \mathcal{M} composta por toda matriz $\Pi = \{\pi_{ji}\} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ com elementos não-negativos, satisfazendo $\sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 1, \forall i \in \mathbb{K}$ ³ e, considerando que em um instante de tempo qual-

³Note que cada coluna é um vetor pertencente ao simplex unitário $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda_i \geq 0, \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i = 1\}$

quer $\sigma(k) = i = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(k)^T P_i x(k)$, temos

$$\begin{aligned}
v(x(k+1)) - v(x(k)) &= \min_{\ell \in \mathbb{K}} x(k)^T (A_i^T P_\ell A_i - P_i) x(k) \\
&= \min_{\lambda \in \Lambda} x(k)^T (A_i^T P_\lambda A_i - P_i) x(k) \\
&\leq x(k)^T \left(A_i^T \left(\sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j \right) A_i - P_i \right) x(k) \\
&< 0
\end{aligned} \tag{28}$$

sempre que $A_i^T (\sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j) A_i - P_i < 0$, $i \in \mathbb{K}$. Este conjunto de desigualdades é chamado de desigualdades de Lyapunov-Metzler. O próximo teorema retirado de [8] generaliza estas condições para incluir um custo garantido de desempenho.

Teorema 2 *Para o sistema (22)-(23) com $w(k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, e evoluindo de $x(0) = x_0$, a regra de comutação (27) é globalmente estabilizante e a desigualdade $\|z\|_2^2 < \min_{i \in \mathbb{K}} x_0^T P_i x_0$ é válida se existirem matrizes $P_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}$ e uma matriz de Metzler $\Pi \in \mathcal{M}$ satisfazendo o seguinte conjunto de desigualdades de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} P_i & * & * \\ \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j A_i & \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j & * \\ E_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 : i \in \mathbb{K} \tag{29}$$

A prova desta teorema se encontra igualmente em [18].

Nota-se que uma condição necessária para a estabilidade é que as matrizes $\sqrt{\pi_{ii}} A_i$, $i \in \mathbb{K}$ sejam Schur-estáveis⁴. Felizmente, como $0 \leq \pi_{ii} < 1$, $i \in \mathbb{K}$, temos que a estabilidade do sistema com comutação é garantida, mesmo que todas as matrizes A_i , $i \in \mathbb{K}$ sejam instáveis.

Um ponto importante que deve ser levado em consideração neste teorema é que as desigualdades (29) não podem ser escritas através de um problema de otimização convexa devido aos produtos de variáveis $\{\Pi, P_i\}$, $i \in \mathbb{K}$. É claro que, se a matriz Π é dada, então as condições tornam-se LMIs e podem ser facilmente resolvidas. Assim, podemos resolver as condições do teorema fazendo buscas unidimensionais em relação aos elementos de Π e resolvendo um conjunto de LMIs. Este procedimento torna-se inviável se

⁴Uma matriz Schur estável tem todos os autovalores menores que 1 em módulo.

o número de subsistemas é maior do que três. Neste caso, podemos obter uma condição mais simples, mas mais conservadora, considerando somente matrizes de Metzler com elementos iguais na diagonal principal. Assim as desigualdades de Lyapunov-Metzler podem ser descritas em termos de LMIs sempre que fixamos um escalar na diagonal das matrizes de Metzler. Para obter melhores resultados, realiza-se uma varredura nos valores de $\pi_{ii} = \gamma > 0, \forall i \in \mathbb{K}$. Obtemos então o seguinte corolário:

Corolário 1 *As condições do Teorema 2 continuam válidas se existirem matrizes $P_i > 0, \forall i \in \mathbb{K}$ e um escalar $0 \leq \gamma < 1$ satisfazendo o seguinte conjunto de desigualdades matriciais lineares modificadas de Lyapunov-Metzler*

$$\begin{bmatrix} P_i & * & * \\ R_{ij}A_i & R_{ij} & * \\ E_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 : i \neq j \in \mathbb{K} \quad (30)$$

onde $R_{ij} = \gamma P_i + (1 - \gamma)P_j$.

A prova deste corolário está em [18].

3.1 Índice de desempenho \mathcal{H}_2

Como visto na seção 2.2, a norma \mathcal{H}_2 é definida em termos da função de transferência de sistemas LIT. Porém, uma vez que sistemas com comutação não possuem função de transferência, não podemos computar a norma \mathcal{H}_2 utilizando a definição (7). Dessa forma, para o sistema (22)-(23) com $w(k) = \delta(k+1)e_j$ onde e_j é a j -ésima coluna da matriz identidade de ordem n_w , podemos definir o seguinte índice de custo funcional \mathcal{H}_2 como

$$J_2(\sigma) := \sum_{j=1}^{n_w} \|y_j\|_2^2 + e_j^T G_{\sigma(0)}^T G_{\sigma(0)} e_j, \quad (31)$$

onde

$$\|y_j\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} y_j(k)^T y_j(k) \quad (32)$$

Nota-se que, na ausência de comutação onde $\sigma(k) = c, c \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{N}$, retomamos a definição da norma \mathcal{H}_2 ao quadrado de um sistema LIT (8). De fato, para $w(k) = \delta(k+1)e_j$, temos que $y_j(k) = E_c A_c^k H_c e_j$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
J_2(c) &= \sum_{j=1}^{n_w} \sum_{k=0}^{\infty} y_j(k)^T y_j(k) + e_j^T G_c^T G_c e_j \\
&= \sum_{j=1}^{n_w} \sum_{k=0}^{\infty} (E_c A_c^k H_c e_j)^T (E_c A_c^k H_c e_j) + e_j^T G_c^T G_c e_j \\
&= \sum_{j=1}^{n_w} e_j' (H_c^T P_o H_c + G_c^T G_c) e_j \\
&= \text{tr}(H_c^T P_o H_c + G_c^T G_c) \\
&= \|E_c(zI - A_c)^{-1} H_c + G_c\|_2^2 \tag{33}
\end{aligned}$$

Entretanto, para $\sigma(x)$ o cálculo analítico de $J_2(\sigma)$ é extremamente difícil e, portanto, a ideia é projetar $\sigma(x)$ assegurando um limitante superior adequado deste custo. O teorema seguinte apresenta este limitante.

Teorema 3 *Para o sistema (22)-(23), a regra de comutação (27) com P_i solução das desigualdades de Lyapunov-Metzler (29) ou 30, no caso mais conservador, é globalmente assintoticamente estabilizante e satisfaz a desigualdade*

$$J_2(\sigma) < \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(H_{\sigma(0)}^T P_i H_{\sigma(0)} + G_{\sigma(0)}^T G_{\sigma(0)}) \tag{34}$$

A prova para o Teorema 3 pode ser encontrada em [8] e discussões adicionais sobre este tema podem ser encontradas nas referências [7], [10] e [19].

4 Sistemas afins com comutação

Neste momento, nosso objetivo é estudar sistemas afins com comutação, que são muito comuns na engenharia prática, principalmente na área de eletrônica de potência, como pode ser observado nas referências [3], [5], [12], [17] e [21].

Basicamente, estes sistemas possuem termos afins na sua estrutura, o que leva à existência de diversos pontos de equilíbrio formando uma região de equilíbrio no espaço de estados. Neste caso, o problema de controle ganha um escopo maior, comparado ao caso linear, e passa a contar com dois objetivos:

- Encontrar um conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis $x_e \in X_e$.

- Determinar uma função de comutação $\sigma(x) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K}$ capaz de conduzir as trajetórias do sistema, partindo de qualquer condição inicial, ao ponto de equilíbrio desejado.

Como visto nas seções anteriores, no caso de sistemas lineares, o único ponto de equilíbrio é a origem $x_e = 0 \in \mathbb{R}^{n_x}$. Desta forma, se ao menos um dos subsistemas for estável, por exemplo, o subsistema definido pela matriz A_i , temos que a função de comutação fixa $\sigma(t) = i \forall t \geq 0$ é uma solução trivial para garantir a estabilidade do sistema. É claro que, como será visto no Exemplo 3, esta solução pode não ser aquela que fornece o melhor desempenho.

No caso de sistemas afins, a solução trivial geralmente não é adotada pois, na maioria dos casos, o ponto de equilíbrio de interesse não coincide com aquele de nenhum dos subsistemas. Além disso, para que a trajetória permaneça neste ponto após o período transitório, a frequência de comutação geralmente é bastante elevada. Desta forma, nos casos de sistemas amostrados e sistemas a tempo discreto, onde ocorre a natural limitação da frequência de comutação, o estudo de estabilidade consiste em levar a trajetória do sistema para uma região que contém o ponto de equilíbrio. Normalmente, deseja-se que esta região seja a menor possível, sendo que a estabilidade obtida neste caso é chamada de estabilidade prática. A seguir apresentamos um resumo dos principais pontos estudados, a saber, sistemas afins com comutação a tempo contínuo e amostrados.

4.1 Sistemas a tempo contínuo

Seja um sistema afim com comutação a tempo contínuo representado pela seguinte equação diferencial em espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + b_{\sigma(t)}, \quad x(0) = x_0 \quad (35)$$

onde $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, σ é a função de comutação e b_σ é o termo afim que faz com que o sistema possua vários pontos de equilíbrio compondo a seguinte região no espaço de estados

$$X_e = \{x_e \in \mathbb{R}^{n_x} : x_e = -A_\lambda^{-1}b_\lambda, \quad A_\lambda \in \mathcal{H}, \quad \lambda \in \Lambda\} \quad (36)$$

em que \mathcal{H} é o conjunto de todas as matrizes Hurwitz. A literatura apresenta alguns trabalhos que tratam da estabilidade assintótica global destes sistemas, como por exemplo, os artigos [1], [12], [13], [27] e [31], sendo que os três primeiros adotam uma função de Lyapunov quadrática e os dois últimos adotam uma função de Lyapunov do tipo máximo.

Utilizando a seguinte mudança de variável $\xi = x - x_e$ no sistema (35) e definindo $\ell_\sigma = A_\sigma x_e + b_\sigma$, obtemos

$$\dot{\xi} = A_\sigma \xi + \ell_\sigma, \quad \xi(0) = \xi_0 \quad (37)$$

Consequentemente, a estabilidade de (35) é garantida, ou seja, $x(t) \rightarrow x_e$ para $t \rightarrow \infty$ sempre que a estabilidade de (37) também for assegurada, ou seja, $\xi(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. Assim, nosso objetivo é determinar uma função de comutação estabilizante $\sigma(\xi)$ capaz de conduzir as trajetórias do sistema (37) para a origem. O teorema a seguir disponível em [12] e [26] baseia-se na seguinte função de Lyapunov quadrática

$$v(\xi) = \xi' P \xi \quad (38)$$

com $P > 0$ e fornece condições de estabilidade assintótica global para o sistema em estudo.

Teorema 4 *Para o sistema afim com comutação (35), considere que o ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ e seu vetor $\lambda \in \Lambda$ associado sejam dados. Se existirem uma matriz simétrica e definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e matrizes simétricas $Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, tais que as LMIs*

$$A_i' P + P A_i + Q_i < 0 \quad (39)$$

$$Q_\lambda \geq 0 \quad (40)$$

sejam satisfeitas, então a função de comutação do tipo mínimo

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \xi' (-Q_i \xi + 2P(A_i x_e + b_i)) \quad (41)$$

com $\xi = x - x_e$, garante a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$.

A prova deste teorema está disponível em [12] e [26] e, portanto, será omitida. Neste momento, podemos destacar os seguintes pontos. O primeiro

é que fazer $x_e \in X_e$ é equivalente a resolver $\ell_\lambda = A_\lambda x_e + b_\lambda = 0$ o que é um problema de difícil solução. Entretanto, para um número relativamente pequeno de subsistemas podemos resolvê-lo sem grandes dificuldades através de busca unidimensional em relação aos componentes de $\lambda \in \Lambda$. O segundo ponto diz respeito ao conservadorismo. Note que as matrizes $Q_i, \forall i \in \mathbb{K}$, são indefinidas em sinal e, portanto, não exigem que as matrizes A_i sejam Hurwitz como uma condição necessária para a factibilidade. Ademais, da condição (39) junto com (40) podemos concluir que uma condição necessária é que A_λ seja estável e, portanto, nada é imposto às matrizes $A_i, \forall i \in \mathbb{K}$ consideradas isoladamente. O exemplo 4 ilustra a validade e eficiência da função de comutação proposta.

4.2 Sistemas discretizados

É bem sabido que no mundo real, os sistemas possuem limitações físicas que podem impossibilitar a atuação de funções de comutação com frequências arbitrariamente elevadas. Nos casos em que a implementação é possível, ela é indesejada, uma vez que altas frequências podem causar desgaste excessivo dos equipamentos, além de produzirem ruídos e promoverem perdas de energia em geral. Logo, é importante obter condições de estabilidade que levem em conta a limitação desta frequência. O interesse no estudo da estabilidade de sistemas com comutação a tempo discreto se deve, dentre outros motivos, à sua natural limitação da frequência de chaveamento pela frequência de amostragem.

Para o caso de sistemas lineares a tempo contínuo, a literatura apresenta alguns resultados que consideram limitação da frequência de comutação, como por exemplo, [6] e [15]. Para sistemas afins, os resultados encontrados asseguram estabilidade prática, veja [21], [22] e [24]. Neste caso, a regra é responsável por guiar as trajetórias do sistema para uma região em torno do ponto de equilíbrio. Entretanto, segundo o nosso conhecimento, não existe na literatura nenhuma condição de estabilidade que trata do caso clássico de sistemas afins a tempo discreto. Este representa um dos temas que será abordado no meu mestrado, no próximo semestre.

De forma a investigar o efeito que a limitação da frequência de comutação provoca no sistema, vamos discretizar o sistema a tempo contínuo (35) estudado anteriormente, veja [4] e [29]. Levando em conta que para $t \in [t_k, t_{k+1})$

temos $\sigma(t) = i$, a solução do sistema (35) torna-se:

$$x(t) = e^{A_i(t-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A_i(t-\tau)}b_i d\tau \quad (42)$$

Para fins de simplicidade, como $t_{k+1} - t_k = T$ e $t_0 = 0$, denotamos $x_k = x(t_k) = x(kT)$ e, portanto, para $t \in [kT, (k+1)T)$, temos

$$x(t) = e^{A_i(t-kT)}x(t_k) + \int_0^{t-kT} e^{A_i\tau}b_i d\tau \quad (43)$$

Para $t = (k+1)T$, obtemos o sistema a tempo discreto equivalente dado por

$$x(k+1) = A_{di}x(k) + b_{di} \quad (44)$$

em que

$$A_{di} = e^{A_i T}, \quad b_{di} = \int_0^T e^{A_i\tau}b_i d\tau \quad (45)$$

Note que as matrizes do sistema a tempo discreto podem ser obtidas facilmente calculando a seguinte exponencial matricial

$$e^{A_i T} = \begin{bmatrix} e^{A_i T} & \int_0^T e^{A_i\tau}b_i d\tau \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{di} & b_{di} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (46)$$

com

$$A_i = \begin{bmatrix} A_i & b_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (47)$$

Analisando o resultado obtido para $T \rightarrow 0^+$, temos

$$\begin{aligned} A_{di} &= e^{A_i T} \approx I + A_i T \\ B_{di} &= \int_0^T e^{A_i\tau}b_i d\tau \approx T b_i \end{aligned} \quad (48)$$

e

$$\dot{x} = \frac{x_{k+1} - x_k}{T} = A_i x_k + b_i \quad (49)$$

o que indica que o sistema discreto (44) se aproxima do sistema contínuo (35) à medida que $T > 0$ tende a zero. Assim, para períodos de amostragem $T > 0$ arbitrariamente pequenos, a função de comutação (41) é válida para assegurar a estabilidade do sistema a tempo discreto equivalente (44). O exemplo seguinte mostra o comportamento das trajetórias do sistema (44)

à medida que $T > 0$ aumenta.

4.3 Estabilidade prática de sistemas afins com comutação

Uma condição de estabilidade prática para sistemas afins discretizados foi apresentada em [22] e é reproduzida no teorema abaixo.

Teorema 5 *Considere o sistema (35) e a regra de comutação*

$$\sigma(x_k) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x_k' P (A_i x_k + b_i), \quad x_k := x(t_k) \quad (50)$$

onde $\sigma(x_k)$ se mantém constante no intervalo $t \in [t_k, t_{k+1})$. Considere também um período de amostragem $T_k = t_{k+1} - t_k$ dependente do tempo e limitado superiormente por $T_k \leq T_{max}$, e um escalar dado $\gamma > 0 \in \mathbb{R}$. Seja um $\lambda \in \Lambda$ tal que $b_\lambda = 0$ e $A_\lambda \in \mathcal{H}$. Se existirem matrizes $P = P' > 0$, $U_i = U_i' > 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \forall i \in \mathbb{K}$ e um escalar $\beta > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} \Omega_i^1(\lambda, 0) & \Omega_i^2(0) \\ * & \Omega_i^3(0) \end{bmatrix} < 0 \quad (51)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_i^1(\lambda, T_{max}) & \Omega_i^2(T_{max}) & -T_{max} \Phi_i(\lambda) \\ * & \Omega_i^3(T_{max}) & T_{max} b_i' P \\ * & * & \Omega_i^4(T_{max}, \lambda) \end{bmatrix} < 0 \quad (52)$$

$\forall i \in \mathbb{K}$, onde

$$\Omega_i^1(\lambda, \tau) = A_\lambda' P + P A_\lambda + 2\gamma P + (T_{max} - \tau) A_i' U_i A_i$$

$$\Omega_i^2(\tau) = (T_{max} - \tau) A_i' U_i b_i$$

$$\Omega_i^3(\tau) = (T_{max} - \tau) b_i' U_i b_i - \beta T_{max} I$$

$$\Omega_i^4(\tau, \lambda) = -\tau U_i e^{-2\gamma T_{max}} + \tau^2 \Phi_i(\lambda)$$

$$\Phi_i(\lambda) = (A_\lambda - A_i)' P + P (A_\lambda - A_i)$$

então a regra de comutação $\sigma(x_k)$ garante a estabilidade prática do sistema (35) e os estados $x(t) \notin \mathcal{E}^{T_{max}}$ são exponencialmente atraídos para um elipsoide $\mathcal{E}^{T_{max}}$ definido por

$$\mathcal{E}^{T_{max}} := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n_x} : x' P x \leq T_{max} \frac{\beta}{2\gamma} \right\}. \quad (53)$$

Além disso, se para algum $k \in \mathbb{N}$, $x(t_k) \in \mathcal{E}^{T_{max}}$ então $x(t) \in \mathcal{E}^{T_{max}}, \forall t \geq t_k$.

A prova deste teorema está disponível em [22]. É interessante mostrar que o elipsoide citado na subseção anterior foi definido no Teorema 5 na equação (53) com um limitante superior $E = T_{max} \frac{\beta}{2\gamma}$. Uma vez que tal limitante foi determinado através da resolução de um problema de LMIs, podemos dizer que um bom indicador de conservadorismo para as condições dessas LMIs é o tamanho do elipsoide. Além do mais, podemos definir um limitante para a ordem de grandeza dos *ripples* e de um possível *offset* que podem vir a compor os sinais dos estados para $t \rightarrow \infty$.

Outro ponto importante deste teorema é a definição (veja [22]) do γ como a taxa de convergência exponencial dos estados para o elipsoide \mathcal{E} .

Alguns resultados para este teorema serão apresentados no Exemplo de Aplicação Prática.

5 Simulações numéricas

Nesta seção vamos apresentar cinco exemplos numéricos e um exemplo prático para ilustrar os resultados teóricos obtidos nas seções anteriores. O primeiro demonstra um calculo de norma \mathcal{H}_2 de um sistema via LMI e compara com outros métodos numéricos. Os dois exemplos subsequentes consistem de dois sistemas com comutação sendo o primeiro, inspirado em [18], composto de dois subsistemas instáveis e o segundo, inspirado em [9], composto de dois subsistemas estáveis. Para ambos estes dois exemplos consideramos o custo garantido apresentado no Teorema 3. Uma maneira de determiná-lo é calculando

$$J_2^* = \min_{i \in \mathbb{K}} \text{tr}(H_i^T P_i H_i + G_i^T G_i), \quad (54)$$

em que $\sigma(0) = i^*$ é solução ótima de (54). Entretanto, para os exemplos que vamos considerar as matrizes H_i e G_i $i \in \{1, 2\}$ são constantes e, desta forma, o custo não depende de $\sigma(0)$. Um quarto exemplo de sistema afim a tempo contínuo com comutação será apresentado, onde um dos subsistemas é instável. Em seguida um ultimo exemplo teórico irá ilustrar o efeito do tempo de amostragem no comportamento de um sistema afim com comutação a tempo contínuo quando empregada a regra apresentada no teorema 4.

5.1 Exemplo 1

Seja um sistema LTI definido por

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (55)$$

sendo $\omega_n = 10\text{rad/s}$ e $\xi = 0.7$. Queremos então encontrar a norma \mathcal{H}_2 deste sistema.

Aplicando a discretização da transformação bilinear

$$s = \frac{2}{T_a} \frac{z - 1}{z + 1}$$

para $T_a = 0.001$ [s] e organizando o sistema em espaço de estados, obtive

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9860 & -0.0993 \\ 0.0010 & 1.0000 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.9930 \\ 0.0005 \end{bmatrix} 10^3 u(k) \quad (56)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0.0497 & 99.9975 \end{bmatrix} x(k) + 2.4826 \cdot 10^{-5} u(k) \quad (57)$$

Com o auxílio do MATLAB implementei as condições do problema de otimização descrito por (18)-(19). A matriz P da equação de Lyapunov obtida da solução do problema foi

$$P = \begin{bmatrix} 3.5 & 50.0 \\ 50.0 & 1057.2 \end{bmatrix} 10^3 \quad (58)$$

truncada na 1^a casa decimal.

Avaliando a igualdade da equação (18) obtive

$$\mathcal{H}_2(G(s)) = 0.0598 \quad (59)$$

Fazendo o mesmo calculo utilizando a função `norm` do Control Toolbox do MATLAB encontrei como resultado

$$\mathcal{H}_2(G(s)) = 0.0598 \quad (60)$$

ambos truncados na 4^a casa decimal. Simulando a resposta ao impulso de tal função e calculando sua norma pela equação (8) observamos que o resultado

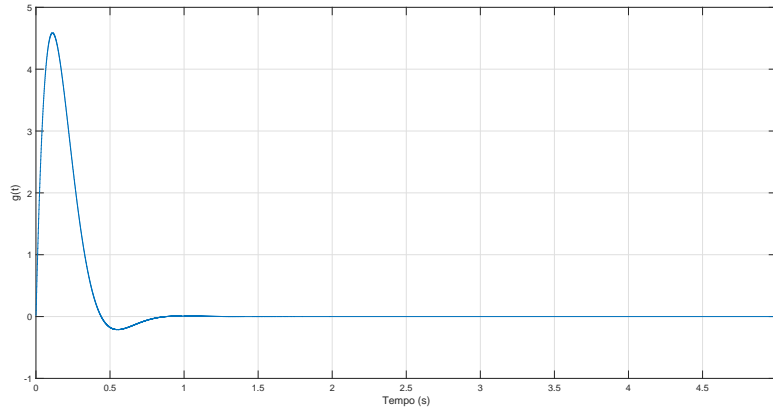


Figura 1: Desenvolvimento da função de resposta ao impulso de $G(s)$

continua o mesmo. O gráfico do desenvolvimento da função de resposta ao impulso $g(t)$ pode ser visto na figura abaixo.

5.2 Exemplo 2

Considere o sistema (22)-(23) definido pelas matrizes

$$A_1 = e^{B_1 T_a}, \quad A_2 = e^{B_2 T_a} \quad (61)$$

com $T_a = 0.1$ [s] e

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -16 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 12 \end{bmatrix},$$

$H_1 = H_2 = [1 \ 1]'$, $E_1 = E_2 = I_2$, $G_1 = G_2 = 0$. Nota-se que A_1 e A_2 são matrizes instáveis mas existe uma combinação convexa estável $A_\lambda = \lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2$, por exemplo, para $\lambda = 0.748$.

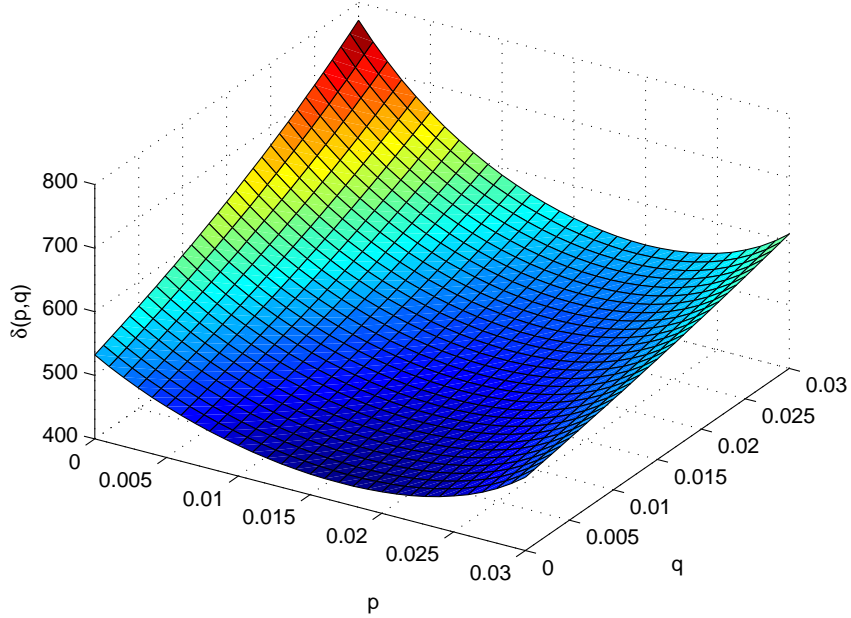


Figura 2: Custo garantido em função de p e q (Ex. 01).

Aplicando as condições do Teorema 2 e considerando a função objetivo (54), realizamos uma busca em relação aos elementos da matriz Π dada por

$$\Pi = \begin{bmatrix} p & (1-q) \\ (1-p) & q \end{bmatrix} \quad (62)$$

e obtivemos a Figura 2, sendo o custo mínimo obtido $J_2^* = 430.853$ relacionado a $(p^*, q^*) = (0, 0.017)$. Associado a este custo obtivemos as seguintes matrizes definidas positivas

$$P_1 = \begin{bmatrix} 82.379 & 19.879 \\ 19.879 & 8.640 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 54.050 & 49.204 \\ 49.204 & 147.614 \end{bmatrix} \quad (64)$$

que foram utilizadas para a implementação da função de comutação (27). As trajetórias dos estados no tempo, o plano de fase de x_1 e x_2 , a regra de comutação $\sigma(x(k))$ e a função de Lyapunov $v(x(k))$ estão apresentadas respectivamente nas Figuras 3, 4, 5 e 6.

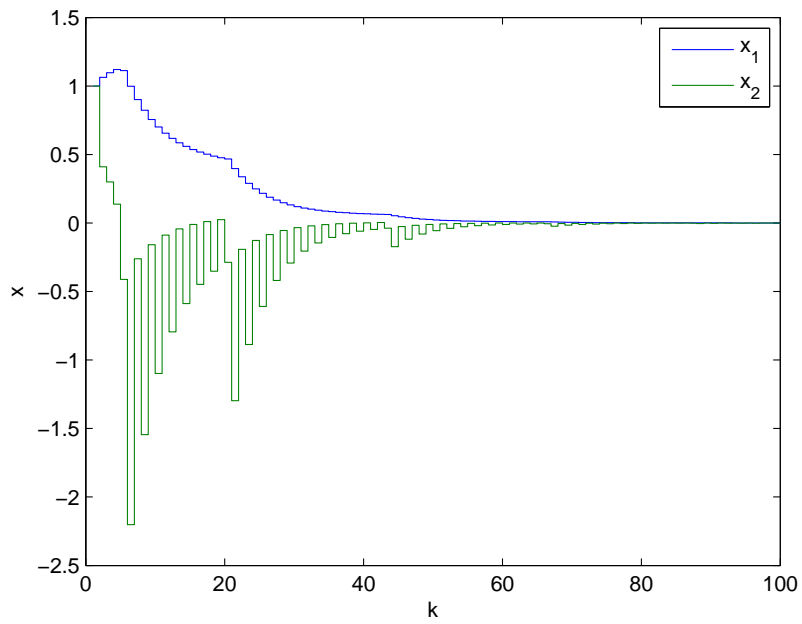


Figura 3: Trajetória dos estados x_1 e x_2 em função de k (Ex. 01).

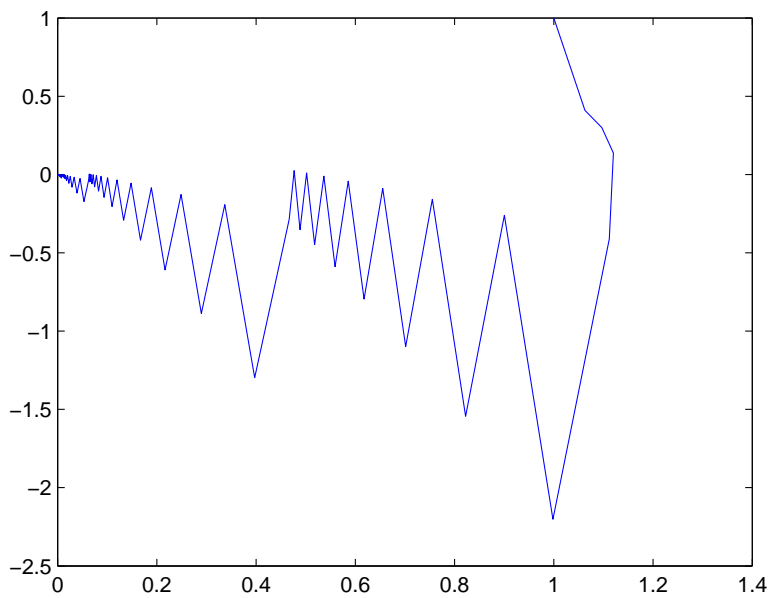


Figura 4: Plano de fase com a trajetória do sistema (Ex. 01).

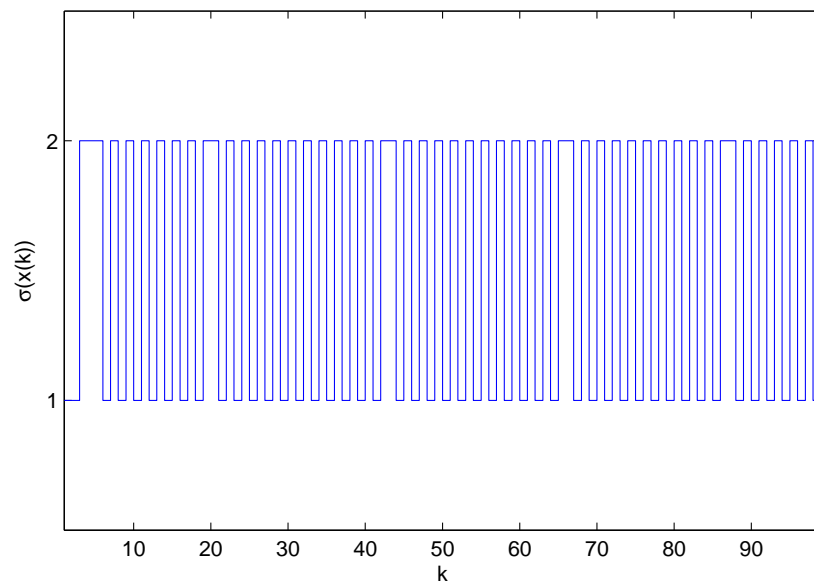


Figura 5: Regra de controle $\sigma(x(k))$ (Ex. 01).

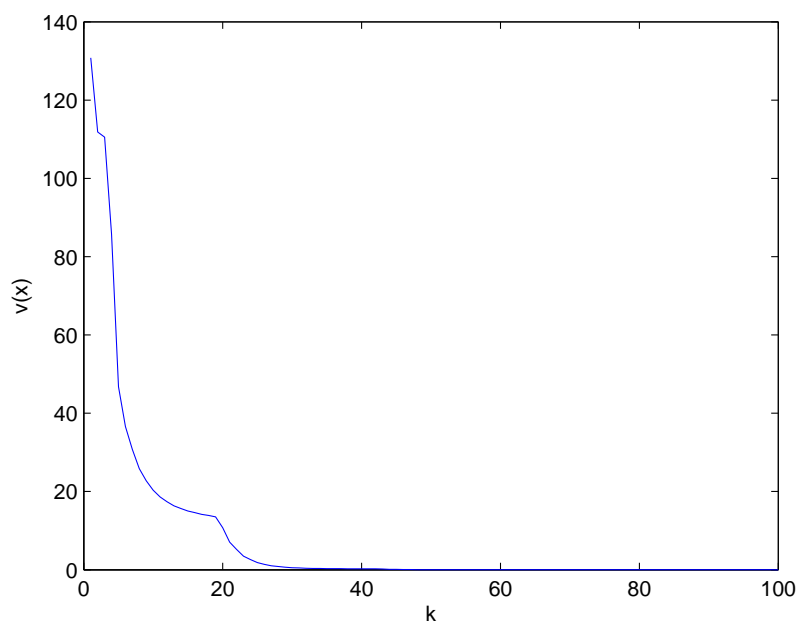


Figura 6: Função de Lyapunov $v(x(k))$ (Ex. 01).

Da mesma forma feita em [18], consideramos a função objetivo $\delta(\gamma) =$

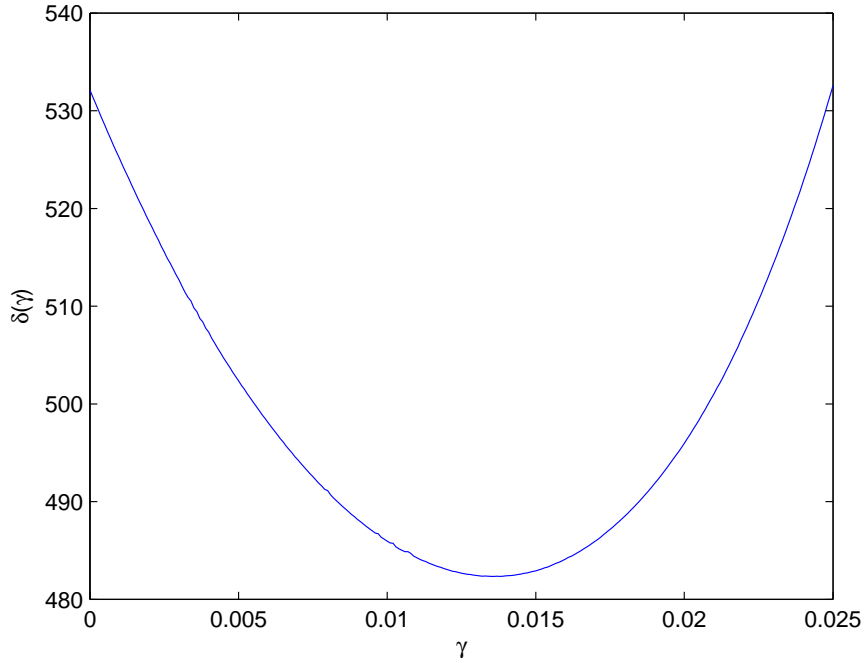


Figura 7: Custo garantido em função de γ (Ex. 01)

$\sum_{i=1}^N H_i^T P_i H_i$ e resolvemos a condição mais conservadora apresentada no Corolário 1 realizando uma busca linear com relação ao escalar $0 < \gamma \leq 1$ e obtivemos o comportamento apresentado na Figura 7. sendo o custo garantido mínimo $\delta^*(\gamma) = 482.33$ associado a $\gamma^* = 0.0135$ que, como esperado, é maior do que aquele obtido anteriormente. A solução das condições do Corolário 1 para o custo garantido mínimo é

$$P_1 = \begin{bmatrix} 95.099 & 22.759 \\ 22.759 & 8.888 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 61.580 & 60.887 \\ 60.887 & 149.379 \end{bmatrix} \quad (66)$$

Note que além da condição utilizada ser mais conservadora, a função objetivo adotada é um limitante superior de (54).

5.3 Exemplo 3

Considere o sistema (22)-(23) definido pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -0.9 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.7 & 0.1 \end{bmatrix}, H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, G_1 = G_2 = 1 \quad (68)$$

Note que neste caso ambos os subsistemas são estáveis e apresentam normas \mathcal{H}_2 dadas por $\|\mathcal{G}_1\|_2^2 = 2.5208$ e $\|\mathcal{G}_2\|_2^2 = 2.0809$, calculadas pela equação (18). Considerando as condições do Teorema 2 junto com a função objetivo (54) e fazendo uma busca linear nos elementos p e q da matriz de Metzler (62), obtivemos o gráfico da Figura 8.

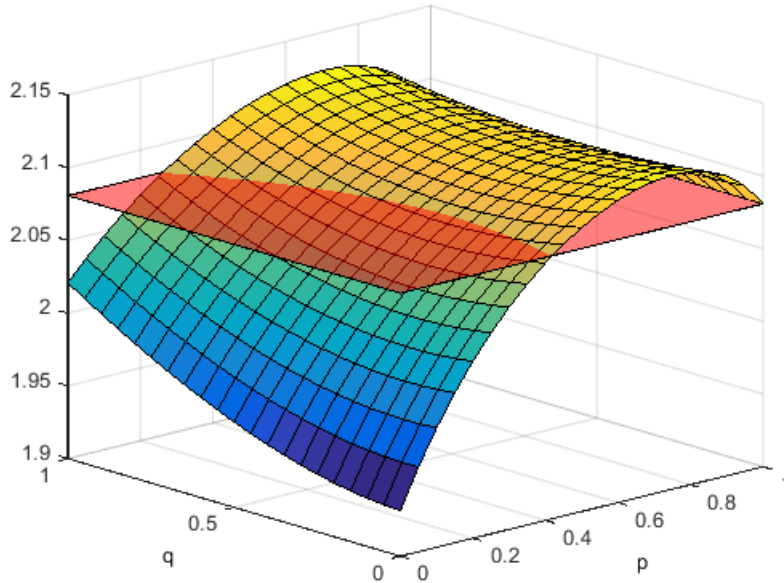


Figura 8: Custo garantido em função de p e q (Ex. 02).

Nesta figura a superfície sólida se refere ao custo garantido J_2^* do sistema (22)-(23) enquanto a superfície transparente se refere ao $\min_{i \in \mathbb{K}} \|\mathcal{G}_i\|_2^2 = 2.0809$. Podemos então concluir que para o caso específico onde $(p, q) = (1, 1)$, temos $J_2^* = \min_{i \in \mathbb{K}} \|\mathcal{G}_i\|_2^2$ e para $(p, q) = (0, 0)$, temos $J_2^* = 1.9313 < \min_{i \in \mathbb{K}} \|\mathcal{G}_i\|_2^2$. Em outras palavras, é possível atingir um custo garantido

J_2^* melhor que o quadrado da norma \mathcal{H}_2 de ambos os subsistemas sem comutação, utilizando a regra da equação (27) obtida pelo Teorema 3. Das simulações feitas, calculou-se $J_2 = 1.7836 < J_2^*$. A trajetória dos estados e da regra de controle podem ser verificados nas Figuras 9 e 10.

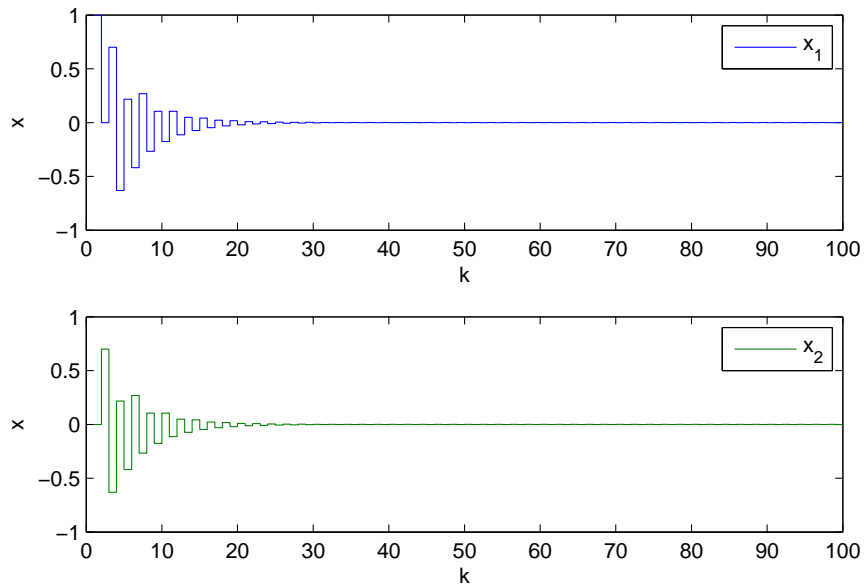


Figura 9: Trajetória dos estados x_1 e x_2 em função de k (Ex. 02).

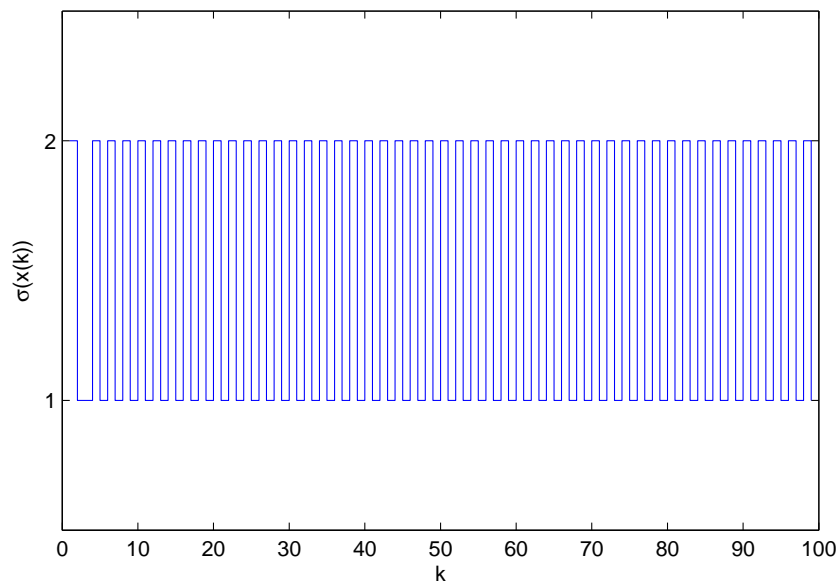


Figura 10: Regra de controle $\sigma(x(k))$ (Ex. 02).

5.4 Exemplo 4

Seja o sistema definido na equação (35) onde

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,6892 & -0,4505 \\ -0,7482 & -0,0838 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0,2290 & -0,1524 \\ -0,9133 & -0,8258 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Realizando busca unidimensional nos valores de λ , podemos representar o espaço dos pontos de equilíbrio atingíveis pelo teorema 4, como demonstrado na figura 11.

Consideremos então uma combinação convexa $\lambda = [0,11 \quad 0,89]$ para qual, aplicando as condições do teorema 4, o sistema converge assintoticamente para o ponto de equilíbrio $x_e = [15,16 \quad -18,09]'$. Aplicando a regra de chaveamento da equação (41) o sistema apresenta o comportamento apresentado pela figura 12 partindo do ponto inicial $x_0 = \bar{0}$. O desenvolvimento da regra de controle pode ser visto na figura 13.

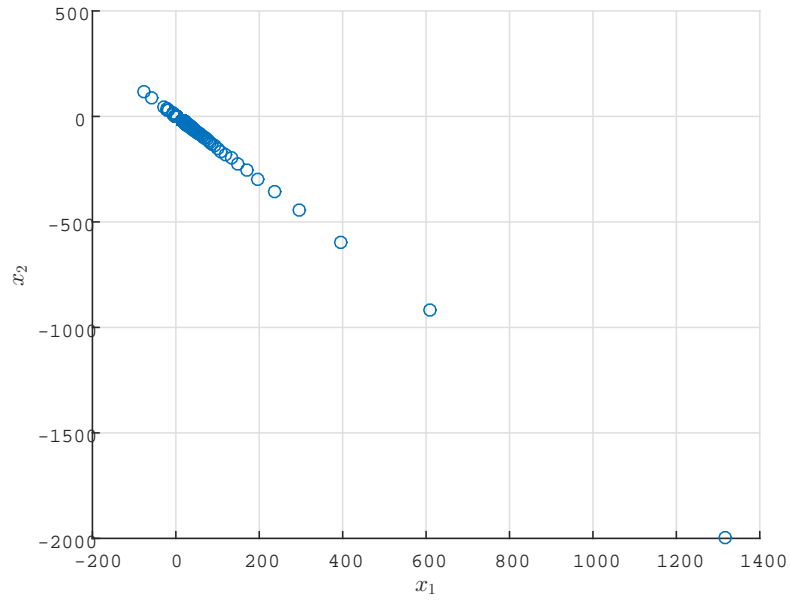


Figura 11: Discretização do conjunto X_e dos pontos de equilíbrio atingíveis. (Ex. 04)

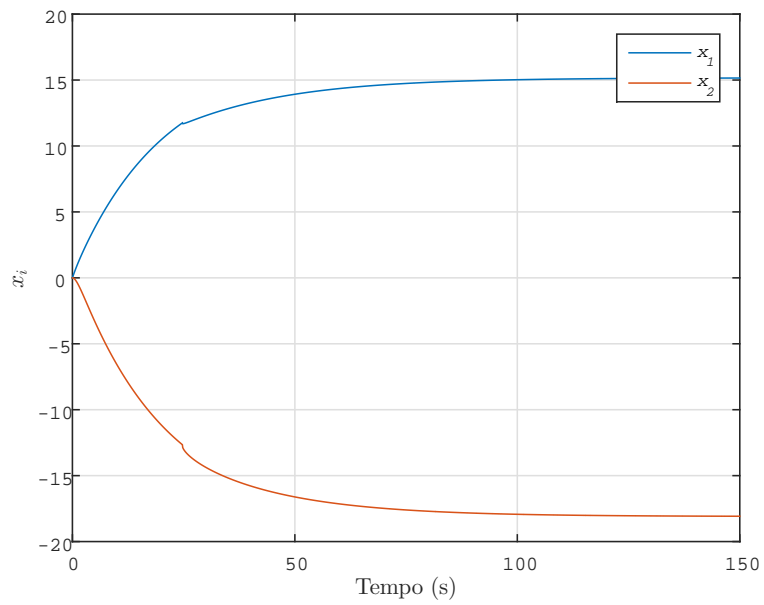


Figura 12: Desenvolvimento dos estados do sistema afim a tempo contínuo chaveado. (Ex. 04)

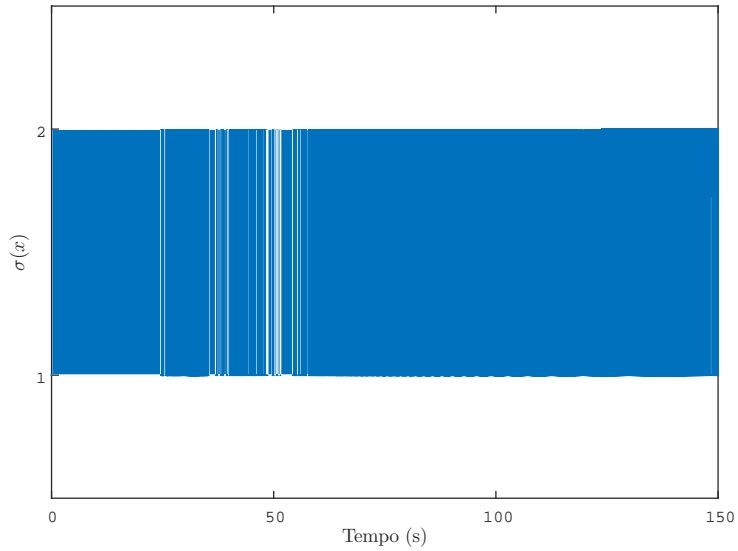


Figura 13: Desenvolvimento da regra de controle. (Ex. 04)

5.5 Exemplo 5

Considere o mesmo sistema estudado no Exemplo 4. Aplicando o método de discretização da equação (45) aos subsistemas $\forall i \in \mathbb{K} = \{1, 2, 3, 4\}$, passaremos a analisar o efeito da aplicação da função de comutação (41) no sistema a tempo discreto (44) para $T \in [10^{-7}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}]$. As figuras a seguir mostram a evolução das trajetórias dos estados sob diferentes tempos de amostragem.

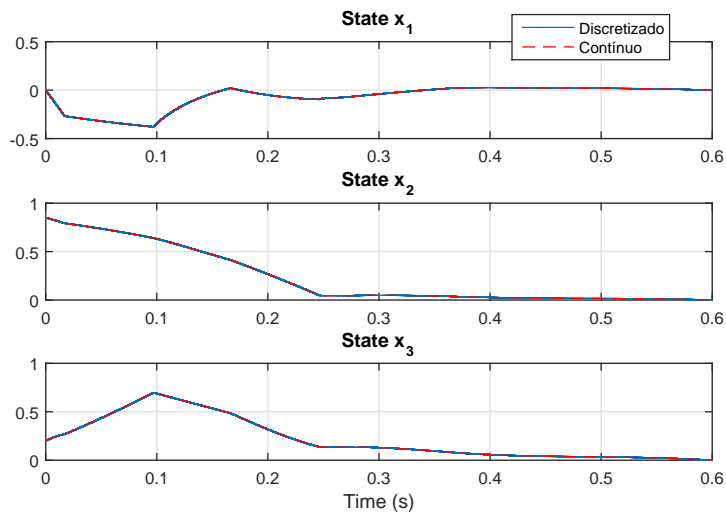


Figura 14: Comparação da evolução dos estados entre o sistema contínuo e o discretizado para $T_1 = 10^{-7}s$ (Ex. 05).

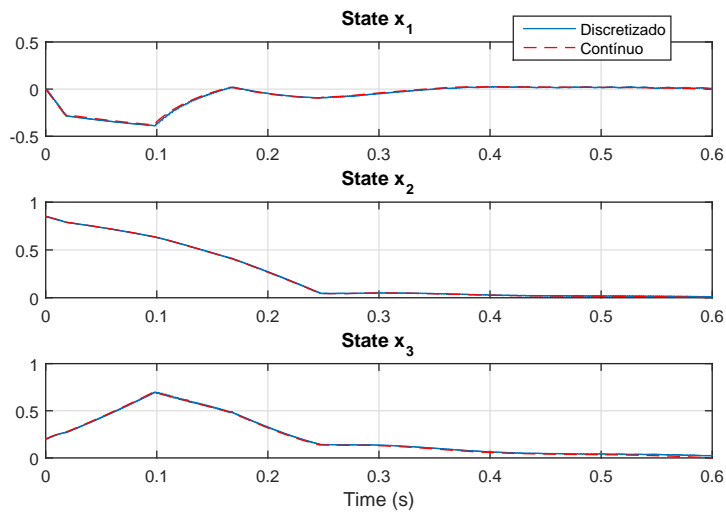


Figura 15: Comparação da evolução dos estados entre o sistema contínuo e o discretizado para $T_2 = 10^{-3}s$ (Ex. 05).

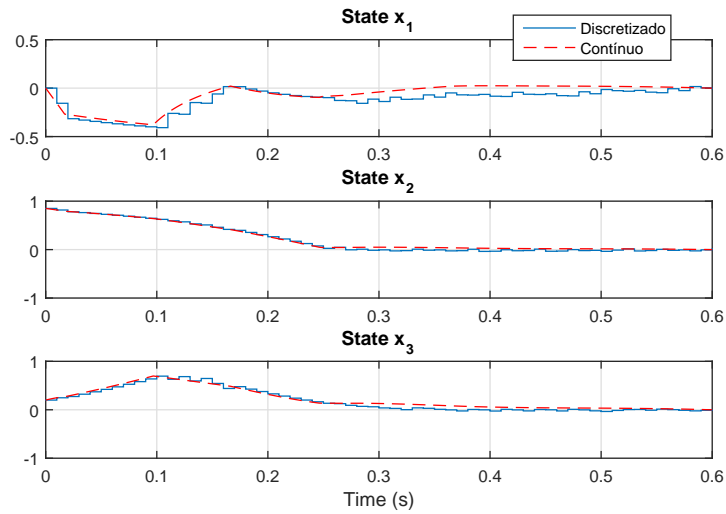


Figura 16: Comparação da evolução dos estados entre o sistema contínuo e o discretizado para $T_3 = 10^{-2}s$ (Ex. 05).

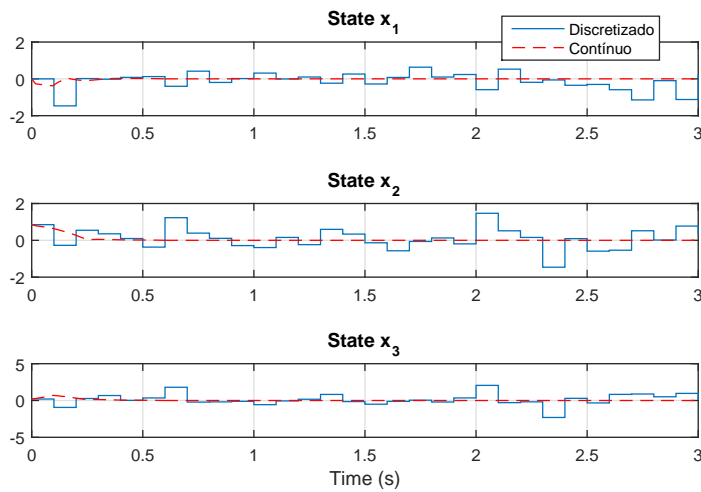


Figura 17: Comparação da evolução dos estados entre o sistema contínuo e o discretizado para $T_4 = 10^{-1}s$ (Ex. 05).

Como mostrado teoricamente e observado na Figura 14, para períodos de amostragem muito pequenos $T = 10^{-7}$, a regra de comutação (41) é estabilizante e as trajetórias dos sistemas contínuo e discretizado são idênticas. Nas demais figuras é observado uma oscilação dos estados em torno do ponto de equilíbrio, que é maior à medida que o período de amostragem aumenta.

Na verdade, não era esperado que a estabilidade assintótica fosse garantida para todo $T > 0$, uma vez que a função de comutação utilizada na implementação foi projetada, exclusivamente, para sistemas a tempo contínuo. Entretanto, a análise realizada neste exemplo foi importante para apontar algumas características intrínsecas dos sistemas a tempo discreto. De fato, note que o ponto de equilíbrio de interesse não coincide com o ponto de equilíbrio de nenhum dos subsistemas isolados e, uma vez que a frequência de comutação é limitada pelo período de amostragem, não é possível manter as trajetórias dos sistema fixas neste ponto. Ademais, não há formação de um modo deslizante como ocorreu no Exemplo 4. Logo, como vimos na seção 4.3, somente estabilidade prática pode ser assegurada para este tipo de sistema. Neste caso, teremos as trajetórias dos estados sendo atraídas para o interior de uma região que contenha o ponto de equilíbrio desejado.

5.6 Exemplo de Aplicação prática

Como forma de motivação, apresento a seguir um problema clássico na área de eletrônica de potência, já conhecido da literatura ([22], [12] e [8]) e que recai em um caso de sistema afim com comutação.

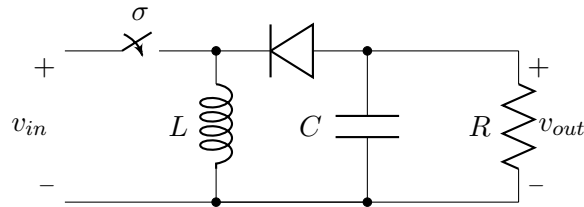


Figura 18: Conversor de tensão CC-CC *Buck-Boost* (Ex. Prático).

O circuito da Figura 18 apresenta um conversor de tensão CC-CC do tipo *Buck-Boost*. Este circuito controla a tensão v_{out} na carga em função da tensão v_{in} da fonte e do chaveamento $\sigma(t) = i$. A análise do circuito é feita em dois instantes diferentes: quando a chave está aberta ($i = 1$) e quando está fechada ($i = 2$). Obtemos assim o número de subsistemas $N = 2$. Definindo $x = [i_L \ v_C]'$ em que i_L é a corrente no indutor e v_C é a tensão no capacitor. O sistema com comutação é então modelado pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} \frac{v_{in}}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

que definem o sistema

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}, \quad x(0) = [i_{L0} \ v_{C0}]' \quad (70)$$

onde

$$v_{in} = 15[\text{V}],$$

$$L = 1[\text{mH}],$$

$$C = 1[\mu\text{C}],$$

$$R = 30[\Omega].$$

O sistema descrito acima é um exemplo de sistema afim com comutação. Sabe-se que quando a chave σ admite chaveamento com frequência infinita (chave ideal) o sistema converge assintoticamente para um ponto de equilíbrio desejado. Entretanto, quando temos de limitar a frequência de comutação devido a limitações físicas da chave, encontramos *ripples* nos sinais dos estados do sistema. Estes *ripples* criam uma oscilação indesejada no sinal de saída v_{out} do conversor.

Para utilizar as condições LMIs do Teorema 5 devemos definir b_i como sendo $b_i = A_i x_e + B_i$ de forma que $b_\lambda = 0$. Para o sistema redefinido

$$\dot{\xi}(t) = A_{\sigma(t)}\xi(t) + b_{\sigma(t)}, \quad \xi(0) = x(0) - x_e \quad (71)$$

ponto de equilíbrio é a origem. Note que $\xi(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ sempre que $x \rightarrow x_e$ quando $t \rightarrow \infty$. Para estimar o tamanho do elipsoide \mathcal{E} que engloba os estados $\xi(t)$ do sistema em regime permanente, para um ponto de equilíbrio $x_e = [0.48 \ -9]'$ associado a $\lambda = [0.375 \ 0.625]'$ e uma taxa $\gamma = 0.5$ obtivemos os valores para os semi-eixos do elipsoide apresentados na Figura 19.

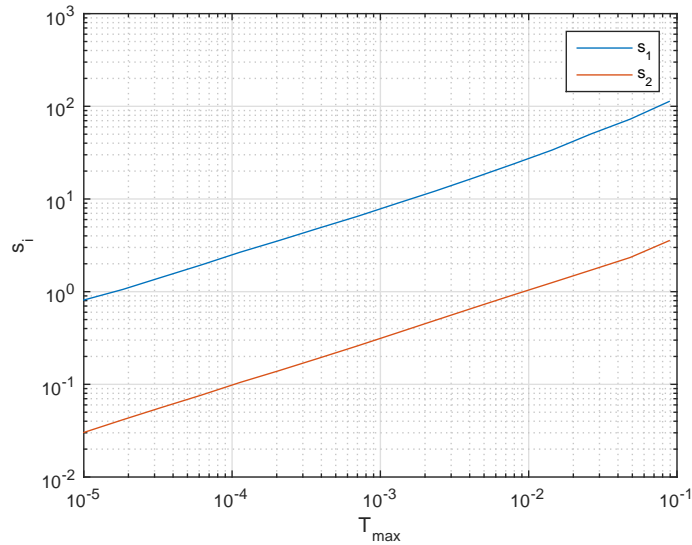


Figura 19: Dimensões dos semi-eixos do elipsoide \mathcal{E} encontrado em função de T_{max} (Ex. Prático).

Visando reduzir as perdas de energia na chave σ através da limitação da sua frequência de comutação em $f_{max} = 100Hz$, escolheremos o tempo de amostragem $T_{max} = 0.01s$. Simulando o circuito com condições iniciais $x_{i0} = [0 \ 0]'$, a evolução dos estados ξ e a função de comutação (41) em função do tempo podem ser vistas nas figuras a seguir.

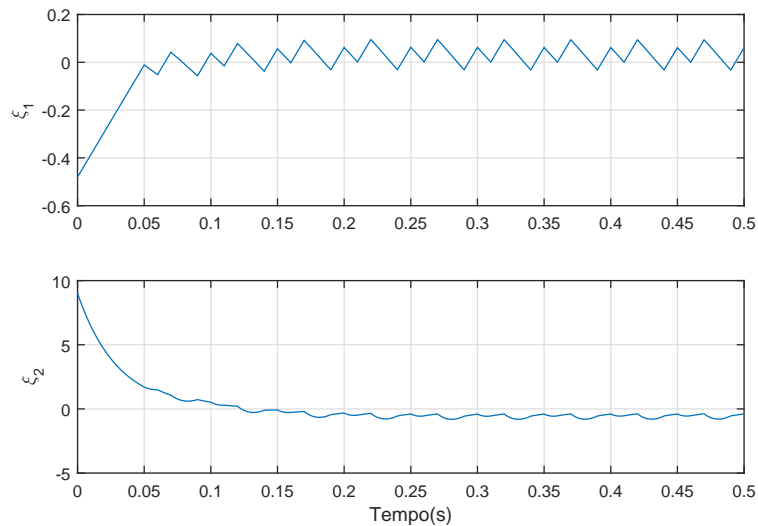


Figura 20: Evolução dos estados (Ex. Prático).

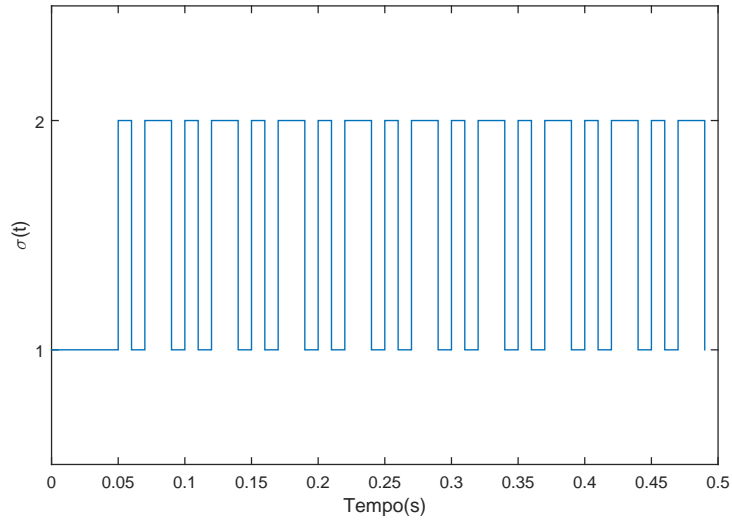


Figura 21: Regra de comutação (Ex. Prático).

A Figura 22 apresenta o plano de fase dos estados x e a elipse obtida pelo Teorema 5 em vermelho. A elipse em verde é a região exata de permanência dos estados quando estes atingem o regime. Note que ela é muito inferior à elipse em vermelho garantida pela técnica proposta em [22], ilustrando o conservadorismo do método proposto nesta referência.

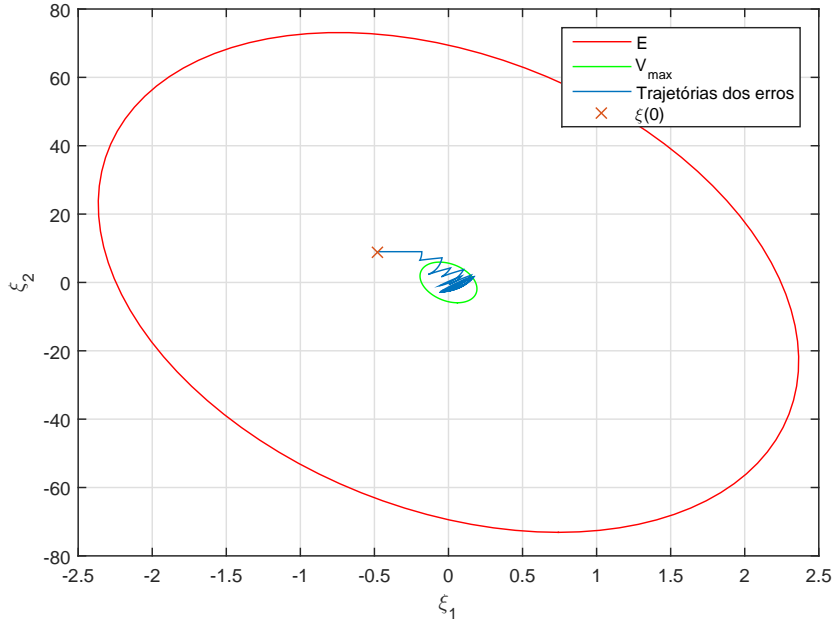


Figura 22: Evolução dos erros dos estados no tempo em plano de fase com o elipsoide \mathcal{E} , em vermelho (Ex. Prático).

5.7 Comentários

As simulações apresentadas mostram a eficiência das regras de comutação projetadas uma vez que, como visto no Exemplo 2, ela pode fornecer uma trajetória estável mesmo que todos os subsistemas sejam instáveis. Por outro lado, como ilustrado no Exemplo 3, quando ambos os subsistemas são estáveis, o projeto de uma regra de comutação pode melhorar o desempenho \mathcal{H}_2 quando comparado ao desempenho de cada subsistema isolado. No caso de sistemas afins a tempo contínuo, pode ser visto no Exemplo 4 que o chaveamento com alta frequência pode levar o sistema a um ponto de equilíbrio que não corresponde a nenhum dos subsistemas isolados. Além disso, observando que o subsistema A_1 é instável, pode-se garantir estabilidade mesmo sabendo que o subsistema 1 foi escolhido pela regra, em determinados momentos.

No exemplo 5, foi demonstrado como o tempo de discretização influencia a funcionamento da regra proposta pelo teorema 4. Como era de se esperar, para tempos de amostragem muito pequenos o sistema discretizado apresenta resposta praticamente idêntica ao do contínuo. Porém, para períodos

de amostragem maiores, a estabilidade não é assegurada e o sistema passa a apresentar comportamento não-assintótico.

O exemplo de aplicação prática ilustra os resultados obtidos em [22] em relação a estabilidade prática de sistemas afins. Uma região no espaço de estados para a qual os estados convergem foi determinada. Entretanto, foi possível notar o conservadorismo de tais resultados uma vez que tal região era demasiadamente grande, englobando a condição inicial.

6 Conclusões e trabalhos futuros

A partir dos resultados expostos neste trabalho é possível demonstrar algumas dificuldades e peculiaridades da classe de sistemas afins com comutação, em especial a tempo discreto. Como mencionado anteriormente, o objetivo deste trabalho é dar início aos estudos relativos a meu projeto de mestrado no qual apresentarei técnicas baseadas em problemas de otimização para garantia de estabilidade e desempenho de sistemas afins com comutação a tempo discreto. Para a validação de tais técnicas será também implementado um caso prático de estudo a ser definido.

7 Referências

- [1] P. Bolzern and W. Spinelli. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In *American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004*, volume 5, pages 3890–3895. IEEE, 2004.
- [2] S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. SIAM, 1994.
- [3] R. Cardim, M. Teixeira, E. Assuncao, and M. R. Covacic. Variable-structure control design of switched systems with an application to a dc–dc power converter. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 56(9):3505–3513, 2009.
- [4] T. Chen and B. A. Francis. *Optimal sampled-data control systems*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] D. Corona, J. Buisson, B. De Schutter, and A. Giua. Stabilization of switched affine systems: An application to the buck-boost converter. In

- American Control Conference, 2007. ACC'07*, pages 6037–6042. IEEE, 2007.
- [6] G. Deaecto, M. Souza, and J. C. Geromel. Chattering free control of continuous-time switched linear systems. *Control Theory & Applications, IET*, 8(5):348–354, 2014.
- [7] G. S. Deaecto. *Síntese de controle para sistemas dinâmicos com comutação*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 2007.
- [8] G. S. Deaecto. *Projeto de controladores dinâmicos com comutação: aplicação em sistemas mecânicos e conversores de potência CC-CC*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 2010.
- [9] G. S. Deaecto, A. R. Fioravanti, and J. C. Geromel. Suboptimal switching control consistency analysis for discrete-time switched linear systems. *European Journal of Control*, 19(3):214–219, 2013.
- [10] G. S. Deaecto and J. C. Geromel. Controle de sistemas lineares com comutação. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, 19(4):431–443, 2008.
- [11] G. S. Deaecto, J. C. Geromel, and J. Daafouz. Trajectory-dependent filter design for discrete-time switched linear systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 4(1):1–8, 2010.
- [12] G. S. Deaecto, J. C. Geromel, F. Garcia, and J. Pomilio. Switched affine systems control design with application to dc–dc converters. *IET control theory & applications*, 4(7):1201–1210, 2010.
- [13] G. S. Deaecto and G. C. Santos. State feedback \mathcal{H}_∞ control design of continuous-time switched affine systems. *IET Control Theory & Applications*, 2015.
- [14] R. DeCarlo, M. S. Branicky, S. Pettersson, B. Lennartson, et al. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7):1069–1082, 2000.

- [15] C. Duan and F. Wu. Analysis and control of switched linear systems via modified lyapunov–metzler inequalities. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(2):276–294, 2014.
- [16] G. F. Franklin, J. D. Powell, and M. L. Workman. *Digital control of dynamic systems*, volume 3. Addison-wesley Menlo Park, 1998.
- [17] F. S. Garcia, J. Pomilio, G. S. Deaecto, J. C. Geromel, et al. Analysis and control of dc-dc converters based on lyapunov stability theory. In *Energy Conversion Congress and Exposition, 2009. ECCE 2009. IEEE*, pages 2920–2927. IEEE, 2009.
- [18] J. C. Geromel and P. Colaneri. Stability and stabilization of discrete time switched systems. *International Journal of Control*, 79(07):719–728, 2006.
- [19] J. C. Geromel, P. Colaneri, and P. Bolzern. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 53(3):720–733, 2008.
- [20] J. C. Geromel and R. Korogui. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos*. Editora Blucher, São Paulo, SP, 2011.
- [21] P. Hauroigne, P. Riedinger, and C. Iung. Switched affine systems using sampled-data controllers: robust and guaranteed stabilization. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 56(12):2929–2935, 2011.
- [22] L. Hetel and E. Fridman. Robust sampled–data control of switched affine systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 58(11):2922–2928, 2013.
- [23] R. H. Korogui. *Análise de estabilidade e realimentação de estado de sistemas dinâmicos politópicos via multiplicadores*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 2006.
- [24] R. Kuiava, R. A. Ramos, H. R. Pota, and L. F. Alberto. Practical stability of switched systems without a common equilibria and governed by a time-dependent switching signal. *European Journal of Control*, 19(3):206–213, 2013.

- [25] D. Liberzon. *Switching in systems and control*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [26] G. C. Santos. *Controle via realimentação de estado de sistemas afins com comutação*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Mecânica, 2015.
- [27] C. C. Scharlau, M. C. de Oliveira, A. Trofino, and T. J. Dezuo. Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule. *Systems & Control Letters*, 68:1–8, 2014.
- [28] R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, and C. King. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM review*, 49(4):545–592, 2007.
- [29] M. Souza. *Controle de Sistemas Dinâmicos Através de Redes de Comunicação*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 2012.
- [30] Z. Sun. *Switched linear systems: control and design*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [31] A. Trofino, C. C. Scharlau, T. J. Dezuo, and M. C. de Oliveira. Switching rule design for affine switched systems with \mathcal{H}_∞ performance. In *Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on*, pages 1923–1928. IEEE, 2012.