Controle Avançado de Sistemas

Projeto de Controle $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$

Profa. Grace S. Deaecto

Faculdade de Engenharia Mecânica / UNICAMP
13083-860, Campinas, SP, Brasil.
grace@fem.unicamp.br

Segundo Semestre de 2018

NOTA AO LEITOR

Estas notas de aula foram baseadas nas seguintes referências :

- J. C. Geromel, R. H. Korogui, "*Controle Linear de Sistemas Dinâmicos - Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*", 1ª Edição, Edgard Blucher Ltda, 2011.
- S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, 1994.

Introdução

Neste capítulo são introduzidos os conceitos de Norma $\mathcal{H}_2$ e Norma $\mathcal{H}_\infty$, que são os dois critérios de desempenho mais utilizados no estudo de sistemas dinâmicos.

Estas normas são introduzidas para ambos os domínios de tempo, contínuo e discreto.

Como ficará claro, a norma $\mathcal{H}_2$ é importante para estabelecer critérios no domínio do tempo, enquanto que a norma $\mathcal{H}_\infty$, por ser definida no domínio da frequência, estabelece características importantes de robustez.

O projeto de controle via realimentação de estado considerando a minimização de cada uma destas normas, também será considerado.

Antes de iniciar o estudo deste capítulo recomenda-se a leitura sobre Desigualdades Matriciais Lineares, disponível em [Boyd, 1994], ou apresentado no material anexo.

Introdução

Antes de tratar o assunto principal deste capítulo, alguns resultados preliminares são de suma importância. O primeiro deles é a definição de norma Euclideana e norma $\mathcal{L}_2$ de trajetória.

- Considere um vetor $x \in \mathbb{C}^{n_x}$ e denote $x^\sim$ o seu conjugado transposto. A quantidade

$$\|x\| := \sqrt{x^\sim x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_x} |x_i|^2}$$

é a norma Euclideana do vetor x.

- Considere agora a trajetória $x(t) \in \mathbb{C}^{n_x}$ definida para $t \geq 0$. A quantidade

$$\|x\|_2 := \sqrt{\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt} = \sqrt{\int_0^\infty x(t)^\sim x(t) dt}$$

é a norma $\mathcal{L}_2$ da trajetória $x(t)$.

Introdução

Outro resultado importante é o Teorema de Parseval, que permite relacionar a integral de $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ definida para todo $t \geq 0$ com a integral da sua transformada de Fourier $\hat{x}(j\omega) \in \mathbb{C}^{n_x}$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$.

Teorema de Parseval

Considere uma trajetória $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e a sua transformada de Fourier $\hat{x}(j\omega) \in \mathbb{C}^n$. A seguinte igualdade

$$\|x(t)\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \|\hat{x}(j\omega)\|^2 d\omega$$

é verificada.

A prova é baseada na transformada de Fourier inversa do sinal $x(t)$, ou seja :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Introdução

- De fato, da definição de norma, temos

$$\begin{aligned}
\|x\|_2^2 &= \int_0^\infty x(t)^\sim x(t)dt \\
&= \int_0^\infty x(t)^\sim \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^\infty x(t)' e^{-j\omega t} dt \right)^* \hat{x}(j\omega)d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(j\omega)^\sim \hat{x}(j\omega)d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \|\hat{x}(j\omega)\|^2 d\omega
\end{aligned}$$

sendo que a última igualdade vem do fato de que $\hat{x}(j\omega)^* = \hat{x}(-j\omega)$ pois $x(t)$ é real.

Introdução

Os resultados anteriores serão usados para a definição das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ do seguinte sistema LIT estável $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{S} := \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Hw(t), \ x(0) = 0 \\ z(t) = Ex(t) + Jw(t) \end{cases}$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $w \in \mathbb{R}^{n_x}$ é a entrada externa e $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída de desempenho. Este sistema apresenta a seguinte função de transferência

$$H_{wz}(s) = E(sI - A)^{-1}H + J$$

cuja resposta ao impulso é dada por

$$h_{wz}(t) = Ee^{At}H + J\delta(t)$$

Norma $\mathcal{H}_2$

Norma $\mathcal{H}_2$

Para sistemas LIT estáveis e estritamente próprios ($J = 0$), a norma $\mathcal{H}_2$ é definida como

$$\|\mathcal{S}\|_2 = \left(\int_0^\infty \mathrm{Tr}\left(h_{wz}(\tau)' h_{wz}(\tau) \right) d\tau \right)^{1/2}$$

Note que ela depende da resposta ao impulso do sistema $h_{wz}(t)$. Entretanto, utilizando o Teorema de Parseval, também podemos calculá-la no domínio da frequência como segue

$$\|\mathcal{S}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr}\left(H_{wz}(-j\omega)' H_{wz}(j\omega) \right) d\omega$$

Norma $\mathcal{H}_2$

Porque o sistema precisa ser estritamente próprio ?

Utilizando a resposta ao impulso do sistema, temos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}\|_2^2 &= \int_0^\infty \mathrm{Tr}\left((Ee^{At}H + J\delta(t))'(Ee^{At}H + J\delta(t))\right) dt \\ &= \mathrm{Tr}\left(H'\left(\int_0^\infty e^{A't}E'Ee^{At}dt\right)H\right) + 2\mathrm{Tr}(H'E'J) \\ &+ \mathrm{Tr}(J'J)\int_0^\infty \delta(t)^2 dt\end{aligned}$$

Entretanto,

$$\int_0^\infty \delta(t)^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega \to \infty$$

e, portanto, para que a norma $\|\mathcal{S}\|_2^2$ seja finita é imperativo impor que $J = 0$, ou seja, o sistema deve ser estritamente próprio.

Norma $\mathcal{H}_2$

Assim, para sistemas estritamente próprios, a norma $\mathcal{H}_2$ é dada por :

$$\|\mathcal{S}\|_2^2 = \{\mathrm{Tr}(H'P_oH) \ : \ A'P_o + P_oA + E'E = 0\}$$

em que

$$P_o = \int_0^\infty e^{A't}E'Ee^{At}dt$$

é o gramiano de observabilidade.

Alternativamente, esta quantidade pode ser determinada como a solução do seguinte problema de otimização convexa.

$$\|\mathcal{S}\|_2^2 = \inf_{P>0}\{\mathrm{Tr}(H'PH) \ : \ A'P + PA + E'E < 0\}$$

Norma $\mathcal{H}_2$

De fato, note que qualquer solução $P > 0$ da desigualdade

$$A'P + PA + E'E < 0$$

satisfaz a equação de Lyapunov $A'P + PA + E'E = -S$ para uma matriz $S > 0$ arbitrária. Logo, temos

$$P = \int_0^\infty e^{A't}(E'E + S)e^{At}dt > P_o$$

e, portanto

$$\|\mathcal{S}\|_2^2 = \inf_{P>0} \{\mathrm{Tr}(H'PH) \ : \ A'P + PA + E'E < 0\}$$

Norma $\mathcal{H}_2$

Exercício : Utilizando a propriedade de circularidade do operador traço

$$\mathrm{Tr}\left(h_{wz}(\tau)' h_{wz}(\tau)\right) = \mathrm{Tr}\left(h_{wz}(\tau) h_{wz}(\tau)'\right)$$

mostre que é possível determinar a norma $\mathcal{H}_2$ utilizando o gramiano de controlabilidade

$$P_c = \int_0^\infty e^{At} H H' e^{A' t} dt$$

a partir das formas alternativas :

$$\|\mathcal{S}\|_2^2 = \{\mathrm{Tr}(EP_cE') \ : \ AP_c + P_cA' + HH' = 0\}$$

$$\|\mathcal{S}\|_2^2 = \inf_{P>0} \{\mathrm{Tr}(EPE') \ : \ AP + PA' + HH' < 0\}$$

Norma $\mathcal{H}_\infty$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ de um sistema LIT estável é definida como segue :

Norma $\mathcal{H}_\infty$

Para sistemas LIT estáveis, a norma $\mathcal{H}_\infty$ é definida como

$$\|\mathcal{S}\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{max}\{H_{wz}(j\omega)\}$$

em que $\mu_{max}\{\cdot\}$ é o máximo valor singular de $H_{wz}(j\omega)$

O máximo valor singular pode ser calculado como :

$$\mu_{max}\{H_{wz}(j\omega)\} = \max_{i=1,\cdots,n_x} \sqrt{\lambda_i\{H_{wz}(j\omega)^{\sim} H_{wz}(j\omega)\}}$$

em que $\lambda_i\{V\}$ é o i-ésimo autovalor da matriz V.

Para sistemas SISO $\mu_{max}\{H_{wz}(j\omega)\} = |H_{wz}(j\omega)|$.

Diferente do caso $\mathcal{H}_2$, não é exigido que o sistema seja estritamente próprio.

$\mathcal{H}_\infty$ Norm

Note que a norma $\mathcal{H}_\infty$ depende da função de transferência do sistema.

Entretanto, usando o Teorema de Parseval, é possível encontrar uma condição no domínio do tempo. De fato, considerando $w(t) \in \mathcal{L}_2$ e $\hat{z}(s) = H_{wz}(s)\hat{w}(s)$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z(t)'z(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \hat{z}(j\omega)^\sim \hat{z}(j\omega)d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \hat{w}(j\omega)^\sim H_{wz}(j\omega)^\sim H_{wz}(j\omega)\hat{w}(j\omega)d\omega \\ &\leq \|\mathcal{S}\|_\infty^2 \int_0^\infty w(t)'w(t)dt \end{aligned}$$

e, portanto, temos

$$\|\mathcal{S}\|_\infty^2 \leq \rho \Longleftrightarrow \|z(t)\|_2^2 \leq \rho\|w(t)\|_2^2$$

Norma $\mathcal{H}_\infty$

Adotando a função de Lyapunov quadrática $v(x) = x'Px$, $P > 0$, e impondo

$$\dot{v}(x(t)) < -z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t), \ \forall t \geq 0$$

para algum $\rho > 0$, após integrar ambos os lados de $t = 0$ até $t \to \infty$, obtemos

$$\int_0^\infty \dot{v}(x(t)) < \int_0^\infty -z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t)dt$$

Como o sistema é estável, temos $v(x(\infty)) = 0$. Além disso, $v(x(0)) = 0$ pois $x(0) = 0$ e, portanto,

$$\int_0^\infty z(t)'z(t) - \rho w(t)'w(t)dt < 0$$

levando à conclusão que $\|\mathcal{S}\|_\infty^2 \leq \rho$.

Norma $\mathcal{H}_\infty$

Logo, basta impor que a desigualdade

$$\begin{aligned}
\dot{v}(x(t)) &= \left\{\dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) + z(t)'z(t) - \rho w(t)'w(t)\right\} \\
&\quad - z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t) \\
&= \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'P + PA + E'E & PH + E'J \\ H'P + J'E & J'J - \rho I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\
&\quad - z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t) \\
&< -z(t)'z(t) + \rho w(t)'w(t)
\end{aligned}$$

é verificada, o que é verdade sempre que a desigualdade

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + E'E & PH + E'J \\ H'P + J'E & J'J - \rho I \end{bmatrix} < 0$$

é satisfeita.

Norma $\mathcal{H}_\infty$

Logo, a norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser calculada pelo seguinte problema de otimização convexa

$$\|\mathcal{S}\|_\infty^2 = \inf_{\{\rho>0, P>0\}} \rho$$

sujeito à desigualdade

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + E'E & PH + E'J \\ H'P + J'E & J'J - \rho I \end{bmatrix} < 0$$

Projeto de Controle

Considere agora o sistema LIT mais geral

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Hw(t), \ \ x(0) = 0 \\ z(t) &= Ex(t) + Fu(t) + Jw(t) \end{aligned}$$

em que além das variáveis já mencionadas $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle dada por

$$u(t) = -Kx(t)$$

Conectando esta lei de controle no sistema, obtemos o seguinte sistema em malha fechada

$$\mathcal{S}_\star := \begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Hw(t), \ \ x(0) = 0 \\ z(t) = (E - FK)x(t) + Jw(t) \end{cases}$$

A ideia é generalizar as condições para cálculo das Normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para tratar do projeto de controle via realimentação de estado.

Projeto de Controle $\mathcal{H}_2$

Teorema : Controle $\mathcal{H}_2$

Considere o sistema $\mathcal{S}_\star$ com $J = 0$. Se existirem matrizes simétricas $S > 0$ e W, matrizes Y satisfazendo o seguinte problema de otimização convexa

$$\|\mathcal{S}_\star\|_2^2 \leq \inf_{S>0, Y, W} \mathrm{Tr}(W)$$

sujeito às desigualdades matriciais lineares

$$\begin{bmatrix} AS - BY + SA' - Y'B' & \bullet \\ ES - FY & -I \end{bmatrix} < 0, \qquad \begin{bmatrix} W & \bullet \\ H & S \end{bmatrix} > 0$$

então a lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ com $K = YS^{-1}$ é aquela que minimiza a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema em malha fechada $\mathcal{S}_\star$.

Projeto de Controle $\mathcal{H}_2$

O resultado anterior é equivalente ao problema de otimização utilizado para determinar a norma $\mathcal{H}_2$ apresentado na página 12, mas aplicado para o sistema em malha fechada $\mathcal{S}_\star$.

De fato, considerando $Y = KS$, podemos reescrever a condição como

$$\begin{bmatrix} (A-BK)S + S(A-BK)' & \bullet \\ (E-FK)S & -I \end{bmatrix} < 0, \qquad \begin{bmatrix} W & \bullet \\ H & S \end{bmatrix} > 0$$

• Definindo $P = S^{-1}$ e multiplicando a primeira desigualdade de ambos os lados por $\mathrm{diag}(S^{-1}, I)$ e, posteriormente, aplicando o Complemento de Schur com relação à última linha e coluna obtemos

$$(A-BK)'P + P(A-BK) + (E-FK)'(E-FK) < 0$$

Projeto de Controle $\mathcal{H}_2$

• Da mesma forma, aplicando o Complemento de Schur na segunda desigualdade obtemos $W > H'PH$. Note que,

$$\|\mathcal{S}_\star\|_2^2 \leq \inf_{P>0} \mathrm{Tr}(H'PH) < \inf_{P>0,W} \mathrm{Tr}(W)$$

e, portanto, $\inf_{P>0,W} \mathrm{Tr}(W) \approx \inf_{P>0} \mathrm{Tr}(H'PH) \approx \|\mathcal{S}_\star\|_2^2$.
Logo o problema em estudo é equivalente ao apresentado na página 12, mas aplicado ao sistema em malha fechada, ou seja :

$$\|\mathcal{S}_\star\|_2^2 \leq \inf_{P>0} \mathrm{Tr}(H'PH)$$

sujeito à

$$(A - BK)'P + P(A - BK) + (E - FK)'(E - FK) < 0$$

que, da forma como está escrito, é não-convexo devido ao produto de variáveis matriciais e, portanto, difícil de resolver.

Projeto de Controle $\mathcal{H}_\infty$

Teorema : Controle $\mathcal{H}_\infty$

Considere o sistema $\mathcal{S}_\star$. Se existirem matrizes simétricas $S > 0$, matrizes Y e um escalar $\rho > 0$ satisfazendo o seguinte problema de otimização convexa

$$\|\mathcal{S}_\star\|_\infty^2 \leq \inf_{S>0, Y, \rho>0} \rho$$

sujeito às desigualdades matriciais lineares

$$\begin{bmatrix} AS - BY + SA' - Y'B' & \bullet & \bullet \\ H' & -\rho I & \bullet \\ ES - FY & J & -I \end{bmatrix} < 0$$

então a lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ com $K = YS^{-1}$ é aquela que minimiza a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada $\mathcal{S}_\star$.

Projeto de Controle $\mathcal{H}_\infty$

O resultado anterior é equivalente ao problema de otimização utilizado para determinar a norma $\mathcal{H}_\infty$ apresentado na página 18, mas aplicado para o sistema em malha fechada $\mathcal{S}_\star$.

De fato, considerando $Y = KS$, podemos reescrever a condição como

$$\begin{bmatrix} (A-BK)S + S(A-BK)' & \bullet & \bullet \\ H' & -\rho I & \bullet \\ (E-FK)S & J & -I \end{bmatrix} < 0$$

• Defina $P = S^{-1}$ e multiplique a desigualdade de ambos os lados por $\mathrm{diag}(S^{-1}, I, I)$.

Projeto de Controle $\mathcal{H}_\infty$

• Posteriormente, aplicando o Complemento de Schur com relação à última linha e coluna obtemos exatamente a condição $\mathcal{H}_\infty$ da página 18, mas aplicada ao sistema em malha fechada, ou seja

$$\|\mathcal{S}_\star\|_\infty^2 = \inf_{\{\rho>0, P>0\}} \rho$$

sujeito à desigualdade

$$\begin{bmatrix} (A-BK)'P + P(A-BK) + (E-FK)'(E-FK) & \bullet \\ H'P + J'(E-FK) & J'J - \rho I \end{bmatrix} < 0$$

que, da forma como está escrito, é não-convexo devido ao produto de variáveis matriciais e, portanto, difícil de resolver.

Normas

Nos desenvolvimentos que seguem, vamos apresentar resultados similares aos anteriores, mas para sistemas a tempo discreto. Antes, porém, algumas definições são importantes.

- Considere um vetor $x \in \mathbb{C}^{n_x}$ e denote $x^\sim$ o seu conjugado transposto. A quantidade

$$\|x\| := \sqrt{x^\sim x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_x} |x_i|^2}$$

  é a norma Euclideana do vetor x.
- Considere agora a trajetória $x(k) \in \mathbb{C}^{n_x}$ definida para $k \in \mathbb{N}$. A quantidade

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \|x(k)\|^2 dt} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} x(k)^\sim x(k)}$$

  é a norma $\mathcal{L}_2$ da trajetória $x(k)$.

Teorema de Parseval

Como no caso contínuo, o Teorema de Parseval é fundamental para a obtenção dos nossos resultados. A sua versão para sinais a tempo discreto está apresentada a seguir :

Teorema de Parseval

Considere uma trajetória $x(k) \in \mathbb{R}^n$ e a sua transformada de Fourier $\hat{x}(e^{j\omega}) \in \mathbb{C}^n$. A seguinte igualdade

$$\|x(k)\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \|\hat{x}(e^{j\omega})\|^2 d\omega$$

é verificada.

A prova é baseada na transformada de Fourier inversa do sinal $x(k)$, ou seja :

$$x(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{x}(e^{j\omega})e^{j\omega k} d\omega$$

Teorema de Parseval

- De fato, da definição de norma, temos

$$
\begin{aligned}
\|x\|_2^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)^{\sim} x(k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)^{\sim} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{x}(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x(k)' e^{-j\omega k} \right)^{*} \hat{x}(e^{j\omega}) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{x}(e^{j\omega})^{\sim} \hat{x}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \|\hat{x}(e^{j\omega})\|^2 d\omega
\end{aligned}
$$

sendo que a última igualdade vem do fato de que $\hat{x}(e^{j\omega})^* = \hat{x}(e^{-j\omega})$ pois $x(k)$ é real.

Introdução

Os resultados anteriores serão usados para a definição das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ do seguinte sistema LIT estável.

$$\mathcal{S}_d := \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Hw(k), \ x(0) = 0 \\ z(k) = Ex(k) + Jw(k) \end{cases}$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o estado, $w \in \mathbb{R}^{n_x}$ é a entrada externa e $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída de desempenho. Este sistema apresenta a seguinte função de transferência

$$H_{wz}(z) = E(zI - A)^{-1}H + J$$

cuja resposta ao impulso é dada por

$$h_{wz}(k) = \begin{cases} J & , \quad k = 0 \\ EA^{k-1}H & , \quad k \geq 1 \end{cases}$$

Norma $\mathcal{H}_2$

Norma $\mathcal{H}_2$

Para sistemas LIT estáveis, a norma $\mathcal{H}_2$ é definida como

$$\|\mathcal{S}_d\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\left(h_{wz}(k)' h_{wz}(k) \right) \right)^{1/2}$$

Note que ela depende da resposta ao impulso $h_{wz}(k)$ e não exige que o sistema seja estritamente próprio. Utilizando o Teorema de Parseval, também podemos calculá-la no domínio da frequência como segue

$$\|\mathcal{S}_d\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Tr}\left(H_{wz}(e^{-j\omega})' H_{wz}(e^{j\omega}) \right) d\omega$$

Norma $\mathcal{H}_2$

Utilizando a resposta ao impulso do sistema, temos

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{S}_d\|_2^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\left(h_{wz}(k)' h_{wz}(k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \mathrm{Tr}\left((EA^{k-1}H)'(EA^{k-1}H)\right) \right\} + \mathrm{Tr}(J'J) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathrm{Tr}\left((EA^{\ell}H)'(EA^{\ell}H)\right) + \mathrm{Tr}(J'J) \\
&= \mathrm{Tr}\left(H'\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} A'^{\ell}E'EA^{\ell}\right)H + J'J\right)
\end{aligned}
$$

em que na terceira igualdade foi realizada a seguinte mudança de variável $\ell = k - 1$.

Norma $\mathcal{H}_2$

Assim, a norma $\mathcal{H}_2$ é dada por :

$$\|\mathcal{S}_d\|_2^2 = \{\mathrm{Tr}(H'P_oH + J'J) \; : \; A'P_oA - P_o + E'E = 0\}$$

em que

$$P_o = \sum_{k=0}^{\infty} A'^k E'EA^k$$

é o gramiano de observabilidade.

Alternativamente, esta quantidade pode ser determinada como a solução do seguinte problema de otimização convexa.

$$\|\mathcal{S}_d\|_2^2 = \inf_{P>0}\{\mathrm{Tr}(H'PH + J'J) \; : \; A'PA - P + E'E < 0\}$$

Norma $\mathcal{H}_2$

De fato, note que qualquer solução $P > 0$ da desigualdade

$$A'PA - P + E'E < 0$$

satisfaz a equação de Lyapunov $A'PA - P + E'E = -S$ para uma matriz $S > 0$ arbitrária. Logo, temos

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} A'^k (E'E + S) A^k > P_o$$

e, portanto

$$\|\mathcal{S}_d\|_2^2 = \inf_{P>0} \{\mathrm{Tr}(H'PH + J'J) \ : \ A'PA - P + E'E < 0\}$$

Norma $\mathcal{H}_2$

Exercício : Utilizando a propriedade de circularidade do operador traço

$$\mathrm{Tr}\left(h_{wz}(k)'h_{wz}(k)\right) = \mathrm{Tr}\left(h_{wz}(k)h_{wz}(k)'\right)$$

mostre que é possível determinar a norma $\mathcal{H}_2$ utilizando o gramiano de controlabilidade

$$P_c = \sum_{k=0}^{\infty} A^k HH'A'^k$$

a partir das formas alternativas :

$$\|\mathcal{S}_d\|_2^2 = \{\mathrm{Tr}(EP_cE' + JJ') \ : \ AP_cA' - Pc + HH' = 0\}$$

$$\|\mathcal{S}_d\|_2^2 = \inf_{P>0}\{\mathrm{Tr}(EPE' + JJ') \ : \ APA' - P + HH' < 0\}$$

Norma $\mathcal{H}_\infty$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ de um sistema LIT estável é definida como segue :

Norma $\mathcal{H}_\infty$

Para sistemas LIT estáveis, a norma $\mathcal{H}_\infty$ é definida como

$$\|\mathcal{S}_d\|_\infty = \sup_{\omega \in [0,2\pi]} \mu_{max}\{H_{wz}(e^{j\omega})\}$$

em que $\mu_{max}\{\cdot\}$ é o máximo valor singular de $H_{wz}(e^{j\omega})$

O máximo valor singular pode ser calculado como :

$$\mu_{max}\{H_{wz}(j\omega)\} = \max_{i=1,\cdots,n_x} \sqrt{\lambda_i\{H_{wz}(e^{j\omega})^\sim H_{wz}(e^{j\omega})\}}$$

em que $\lambda_i\{V\}$ é o i-ésimo autovalor da matriz V.

Para sistemas SISO $\mu_{max}\{H_{wz}(e^{j\omega})\} = |H_{wz}(e^{j\omega})|$.

$\mathcal{H}_\infty$ Norm

Da mesma forma como no caso contínuo, usando o Teorema de Parseval, podemos determinar a norma $\mathcal{H}_\infty$ a partir da integral de sinais no domínio do tempo, sempre que $w(k) \in \mathcal{L}_2$, ou seja

$$\sum_{k=0}^{\infty} z(k)'z(k) \leq \|\mathcal{S}_d\|_\infty^2 \sum_{k=0}^{\infty} w(k)'w(k)$$

e, portanto, podemos escrever

$$\|\mathcal{S}_d\|_\infty^2 \leq \rho$$

sempre que

$$\|z(k)\|_2^2 \leq \rho \|w(k)\|_2^2$$

Norma $\mathcal{H}_\infty$

Adotando a função de Lyapunov quadrática $v(x) = x'Px$, $P > 0$, definindo $\Delta v(k) = v(x(k+1)) - v(x(k))$ e impondo

$$\Delta v(x(k)) < -z(k)'z(k) + \rho w(k)'w(k), \ \forall k \in \mathbb{N}$$

para algum $\rho > 0$, após somar ambos os lados de $k = 0$ até $k \to \infty$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta v(x(k)) < \sum_{k=0}^{\infty} (-z(k)'z(k) + \rho w(k)'w(k))$$

em que $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta v(x(k)) = v(x(\infty)) - v(x(0))$. Como o sistema é estável, temos $v(x(\infty)) = 0$. Além disso, $v(x(0)) = 0$ pois $x(0) = 0$ e, portanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (z(k)'z(k) - \rho w(k)'w(k)) < 0$$

Norma $\mathcal{H}_\infty$

Isto nos leva à conclusão de que se $\Delta v(x) < -z'z + \rho w'w$ for imposto então $\|z\|_2^2 - \rho\|w\|_2^2 < 0$ é assegurada e, portanto, $\|\mathcal{S}_d\|_\infty^2 \leq \rho$. Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
\Delta v(x(k)) &= \{x(k+1)'Px(k+1) + x(k)'Px(k) + z(k)'z(k) - \rho w(k)'w(k)\} \\
&\quad - z(k)'z(k) + \rho w(k)'w(k) \\
&= \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'PA - P + E'E & \bullet \\ H'PA + J'E & H'PH + J'J - \rho I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \\
&\quad - z(k)'z(k) + \rho w(k)'w(k) \\
&< -z(k)'z(k) + \rho w(k)'w(k)
\end{aligned}$$

é verificada, o que é verdade sempre que a desigualdade

$$\begin{bmatrix} A'PA - P + E'E & \bullet \\ H'PA + J'E & H'PH + J'J - \rho I \end{bmatrix} < 0$$

é satisfeita.

Norma $\mathcal{H}_\infty$

Note que, esta desigualdade pode ser escrita de forma alternativa

$$\begin{bmatrix} P & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ PA & PH & P & \bullet \\ E & J & 0 & I \end{bmatrix} > 0$$

que pode ser verificada aplicando o Complemento de Schur sucessivamente em relação às duas últimas linhas e colunas. Logo, a norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser calculada como

$$\|\mathcal{S}_d\|_\infty^2 = \inf_{\{\rho>0, P>0\}} \rho$$

sujeito à desigualdade matricial linear

$$\begin{bmatrix} P & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ PA & PH & P & \bullet \\ E & J & 0 & I \end{bmatrix} > 0$$

Projeto de Controle

Considere agora o sistema LIT mais geral

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Hw(k), \;\; x(0) = 0 \\ z(k) &= Ex(k) + Fu(k) + Jw(k) \end{aligned}$$

em que além das variáveis já mencionadas $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle dada por

$$u(k) = -Kx(k)$$

Conectando esta lei de controle no sistema, obtemos o seguinte sistema em malha fechada

$$\mathcal{S}_{d\star} := \begin{cases} x(k+1) = (A - BK)x(k) + Hw(k), \;\; x(0) = 0 \\ \quad\quad z(k) = (E - FK)x(k) + Jw(k) \end{cases}$$

A ideia é generalizar as condições para cálculo das Normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para tratar do projeto de controle via realimentação de estado.

Projeto de Controle $\mathcal{H}_2$

Teorema : Controle $\mathcal{H}_2$

Considere o sistema $\mathcal{S}_{d\star}$. Se existirem matrizes simétricas $S > 0$, W e matrizes Y satisfazendo o seguinte problema de otimização convexa

$$\|\mathcal{S}_{d\star}\|_2^2 \leq \inf_{S>0,Y,W} \mathrm{Tr}(W)$$

sujeito às desigualdades matriciais lineares

$$\begin{bmatrix} S & \bullet & \bullet \\ AS - BY & S & \bullet \\ ES - FY & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \qquad \begin{bmatrix} W & \bullet & \bullet \\ H & S & \bullet \\ J & 0 & I \end{bmatrix} > 0$$

então a lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ com $K = YS^{-1}$ é aquela que minimiza a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema em malha fechada $\mathcal{S}_{d\star}$.

Projeto de Controle $\mathcal{H}_2$

O resultado anterior é equivalente ao problema de otimização utilizado para determinar a norma $\mathcal{H}_2$ apresentado na página 33, mas aplicado para o sistema em malha fechada $\mathcal{S}_{d\star}$.
De fato, considerando $Y = KS$, podemos reescrever a condição como

$$\begin{bmatrix} S & \bullet & \bullet \\ (A-BK)S & S & \bullet \\ (E-FK)S & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \qquad \begin{bmatrix} W & \bullet & \bullet \\ H & S & \bullet \\ J & 0 & I \end{bmatrix} > 0$$

- Definindo $P = S^{-1}$ e multiplicando a primeira desigualdade de ambos os lados por $\mathrm{diag}(S^{-1}, S^{-1}, I)$ e, posteriormente, aplicando o Complemento de Schur com relação às duas últimas linhas e colunas obtemos

$$(A-BK)'P(A-BK) - P + (E-FK)'(E-FK) < 0$$

Projeto de Controle $\mathcal{H}_2$

• Da mesma forma, aplicando o Complemento de Schur com relação às duas últimas linhas e colunas da segunda desigualdade obtemos $W > H'PH + J'J$. Note que,

$$\|\mathcal{S}_{d\star}\|_2^2 \leq \inf_{P>0} \mathrm{Tr}(H'PH + J'J) < \inf_{P>0,W} \mathrm{Tr}(W)$$

e, portanto, $\inf_{P>0,W} \mathrm{Tr}(W) \approx \inf_{P>0} \mathrm{Tr}(H'PH) \approx \|\mathcal{S}_{d\star}\|_2^2$.
Logo o problema em estudo é equivalente ao apresentado na página 33, mas aplicado ao sistema em malha fechada, ou seja :

$$\|\mathcal{S}_{d\star}\|_2^2 \leq \inf_{P>0} \mathrm{Tr}(H'PH + J'J)$$

sujeito à

$$(A - BK)'P(A - BK) - P + (E - FK)'(E - FK) < 0$$

que, da forma como está escrito, é não-convexo devido ao produto de variáveis matriciais e, portanto, difícil de resolver. Por esta razão a condição do teorema é a recomendada para o projeto proposto.

Projeto de Controle $\mathcal{H}_\infty$

Teorema : Controle $\mathcal{H}_\infty$

Considere o sistema $\mathcal{S}_{d\star}$. Se existirem matrizes simétricas $S > 0$, matrizes Y e um escalar $\rho > 0$ satisfazendo o seguinte problema de otimização convexa

$$\|\mathcal{S}_{d\star}\|_\infty^2 \leq \inf_{S>0, Y, \rho>0} \rho$$

sujeito às desigualdades matriciais lineares

$$\begin{bmatrix} S & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ AS - BY & H & S & \bullet \\ ES - FY & J & 0 & I \end{bmatrix} > 0$$

então a lei de controle $u(k) = -Kx(k)$ com $K = YS^{-1}$ é aquela que minimiza a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada $\mathcal{S}_{d\star}$.

Projeto de Controle $\mathcal{H}_\infty$

O resultado anterior é equivalente ao problema de otimização utilizado para determinar a norma $\mathcal{H}_\infty$ apresentado na página 39, mas aplicado para o sistema em malha fechada $\mathcal{S}_{d\star}$.

De fato, considerando $Y = KS$, podemos reescrever a condição como

$$\begin{bmatrix} S & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ (A - BK)S & H & S & \bullet \\ (E - FK)S & J & 0 & I \end{bmatrix} > 0$$

• Definindo $P = S^{-1}$ e multiplicando a desigualdade de ambos os lados por $\mathrm{diag}(S^{-1}, I, S^{-1}, I)$ obtemos exatamente a condição $\mathcal{H}_\infty$ para o sistema em malha fechada.

Projeto de Controle $\mathcal{H}_\infty$

- Mais especificamente, a condição obtida é dada por

$$\|\mathcal{S}_{d\star}\|_\infty^2 = \inf_{\{\rho>0, P>0\}} \rho$$

sujeito à desigualdade

$$\begin{bmatrix} P & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ P(A-BK) & PH & P & \bullet \\ (E-FK) & J & 0 & I \end{bmatrix} > 0$$

que, da forma como está escrito, é não-convexo devido ao produto de variáveis matriciais e, portanto, difícil de resolver. Por esta razão a condição do teorema é a recomendada para o projeto proposto.