Controle Avançado de Sistemas

Projeto via Representação de Estado

Profa. Grace S. Deaecto

Faculdade de Engenharia Mecânica / UNICAMP
13083-860, Campinas, SP, Brasil.
grace@fem.unicamp.br

Segundo Semestre de 2018

NOTA AO LEITOR

Estas notas de aula foram baseadas nas seguintes referências :

- J. C. Geromel, R. H. Korogui, "*Controle Linear de Sistemas Dinâmicos - Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*", 2ª Edição, Edgard Blucher Ltda, 2019.
- G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini, "*Feedback Control of Dynamic Systems*", Prentice Hall, 2006.
- G. F. Franklin, J. D. Powell, M. L. Workman, "*Digital Control of Dynamic Systems*", Adison Wesley, 1998.
- C-T. Chen, "*Linear System Theory and Design*", Oxford University Press, 1999.
- D. G. Luenberger, "*Introduction to Dynamic Systems : Theory, Model and Applications*", New York : John Wiley & Sons, 1979.
- B. C. Kuo, F. Golnaraghi, "*Automatic Control Systems*", John Wiley & Sons, 8th Edition, 2003.

1. Capítulo II : Projeto de Controle de Sistemas LIT
   - Sistemas a Tempo Contínuo
     - Projeto via Representação de Estado
     - Regulador Linear Quadrático
     - Observador de Estado
     - Projeto de Servomecanismos
   - Sistemas a Tempo Discreto
     - Projeto via Representação de Estado
     - Regulador Linear Quadrático
     - Observador de Estado
     - Projeto de Servomecanismos

Introdução

No capítulo anterior apresentamos alguns conceitos importantes relacionados à análise de sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT) descritos por representação no espaço de estado, como por exemplo, a solução das equações de estado, as diferentes realizações e o estudo de estabilidade via critério de Lyapunov.

Este capítulo é dedicado ao projeto de controle de SLIT para os domínios de tempo contínuo e discreto.

De forma a dar ênfase aos aspectos mais relevantes, os desenvolvimentos que seguem são realizados para sistemas com uma entrada e uma saída SISO, mas podem ser generalizados para o caso de múltiplas entradas e múltiplas saídas MIMO. Discussões a este respeito será realizada ao longo do texto.

Projeto via Representação de Estado

Considere um sistema LIT com função de transferência

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_u}(b_i - b_n a_i)s^i}{\sum_{i=0}^{n_x} a_i s^i} + b_n$$

sendo $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_{n_x} = 1$ com $n_u \leq n_x - 1$ e sua representação em espaço de estado

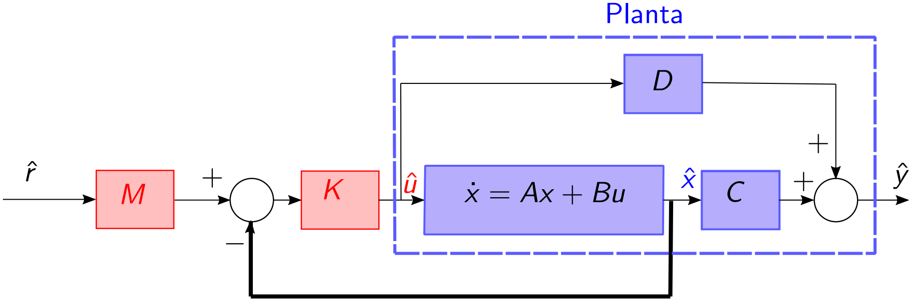
$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

que na forma canônica controlável, com $c_i = b_i - b_n a_i$, é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n_x-1} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n_u} \\ 0 \end{bmatrix}', \; D = b_n$$

Projeto via Representação de Estado

A estrutura de controle a ser adotada está apresentada na figura a seguir, em que os ganhos matriciais $K \in \mathbb{R}^{1\times n_x}$ e $M \in \mathbb{R}^{n_x\times 1}$ são as variáveis a serem determinadas de forma a sintetizar a lei de controle $u(t)$ que atuará na planta $G(s)$.



Note que esta estrutura considera que todos os estados $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ estão disponíveis, hipótese que será eliminada mais a frente.

Projeto via Representação de Estado

A partir do diagrama de blocos anterior, temos

$$u(t) = K(Mr(t) - x(t))$$

em que $r(t)$ é o sinal de referência. Conectando esta entrada de controle no sistema, obtemos o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x + BKMr, \ \ x(0) = x_0 \\ y &= (C - DK)x + DKMr \end{aligned}$$

cuja função de transferência é $F(s) = S(s)KM$ com

$$S(s) = (C - DK)\left(sI - (A - BK)\right)^{-1} B + D$$

Projeto via Representação de Estado

Note que a função de transferência em malha fechada $F(s)$ é uma função escalar sobre a qual podemos realizar as seguintes observações :

- Os seus polos dependem exclusivamente do ganho K, que deve ser determinado de forma a alocá-los em posições adequadas do plano complexo, de acordo com os critérios de desempenho especificados no projeto. Esta primeira etapa é chamada de problema de regulação.
- A segunda etapa, após determinar o ganho K, refere-se ao cálculo da matriz M de tal forma a assegurar um desempenho adequado em regime permanente.

Projeto via Representação de Estado

O problema de regulação consiste, portanto, em determinar K de forma que os polos de $F(s)$, raízes da equação característica

$$\det\left(sI - (A - BK)\right) = 0$$

sejam alocados em posições adequadas, por exemplo, dentro de uma região Ω de interesse. Assim, escolhendo os polos $p_1, \cdots, p_{n_x}$ localizados no interior de Ω, podemos determinar o polinômio

$$\mathcal{P}(s) = \prod_{i=1}^{n_x}(s - p_i) = s^{n_x} + \sum_{i=0}^{n_x-1} d_i s^i$$

e, assim, calcular $K = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_{n_x} \end{bmatrix}$ tal que

$$\det\left(sI - (A - BK)\right) = \underbrace{s^{n_x} + \sum_{i=0}^{n_x-1} d_i s^i}_{\mathcal{P}(s)}$$

Projeto via Representação de Estado

No Matlab existem duas funções que podem ser utilizadas para o cálculo de K :

- A função `acker` : $K = acker(A, B, p)$ em que p é o vetor contendo os autovalores desejados. Esta função é baseada na fórmula de Ackermann e se aplica exclusivamente para sistemas SISO. Este método não é numericamente confiável para problemas com ordem maior do que 10, mas funciona bem para sistemas com raízes repetidas.
- A função `place` : $K = place(A, B, p)$ é melhor no caso de sistemas com ordens elevadas e pode ser utilizada para sistemas MIMO. Entretanto, não pode ser adotada quando p possui raízes repetidas.

Projeto via Representação de Estado

Note que se o sistema (A, B, C, D) estiver na forma canônica controlável, o ganho K pode ser obtido através da igualdade de matrizes

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 - k_1 & -a_1 - k_2 & -a_2 - k_3 & \cdots & -a_{n_x-1} - k_{n_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \cdots & -d_{n_x-1} \end{bmatrix}$$

o que fornece

$$K = \begin{bmatrix} d_0 - a_0 & d_1 - a_1 & \cdots & d_{n_x-1} - a_{n_x-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n_x}$$

Projeto via Representação de Estado

A segunda etapa do projeto consiste em determinar M de forma a ajustar o desempenho em regime permanente. Considerando que $\hat{y}(s) = F(s)\hat{r}(s)$ temos as seguintes condições :

- Erro nulo para entrada degrau unitário :

$$F(0) = S(0)KM = 1 \Longrightarrow M = S(0)^{-1}K'(KK')^{-1}$$

- Erro nulo para entrada rampa unitária : Neste caso KM deve ser uma função de transferência $h(s) = KM(s)$ de forma a ser possível impor :

$$F(0) = S(0)h(0) = 1 \ \text{ e } \ F'(0) = \left(\frac{d}{ds}(S(s)h(s))\right)_{s=0} = 0$$

- O item anterior pode ser generalizado para $r(t) = t^{\alpha}, \ \alpha \geq 2$.

Vale ressaltar que os polos e zeros de $h(s)$ são também polos e zeros de $F(s)$, o que indica que a escolha da dinâmica de $h(s)$ deve ser feita com cuidado.

Exemplo : Considerando o motor CC já estudado anteriormente com função de transferência

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{0.07143}{s^2 + 1.0714s + 0.1429}$$

em que y é a velocidade angular e u a tensão de alimentação, deseja-se através da representação em espaço de estado na forma canônica controlável determinar os ganhos $K \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ e $M \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ de tal forma que o sistema em malha fechada satisfaça os seguintes requisitos :

- seja estável e acompanhe um degrau unitário com erro nulo em regime permanente.
- não apresente sobrelevação no sinal de saída em relação ao degrau de entrada no domínio do tempo.

A representação em espaço de estado do sistema é dada por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1429 & -1.0714 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0.07143 & 0 \end{bmatrix} x$$

Três casos distintos foram considerados :

- Polos em malha fechada definidos por $P(s) = (s + 0.25)^2$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0625 & -0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} -0.0804 & -0.5714 \end{bmatrix}$$

$$S(0) = 1.1429 \Rightarrow M = \begin{bmatrix} -10.8829 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Polos em malha fechada definidos por $P(s) = (s + 0.5)^2$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.25 & -1.00 \end{bmatrix} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 0.1071 & -0.0714 \end{bmatrix}$$

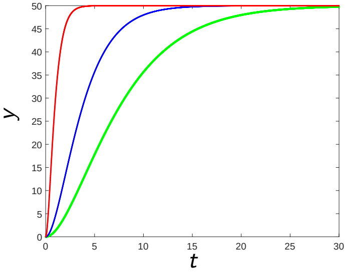
$$S(0) = 0.2857 \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 32.6791 \\ 0 \end{bmatrix}$$

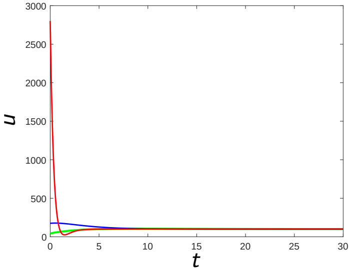
- Polos em malha fechada definidos por $P(s) = (s+2)^2$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 3.8571 & 2.9286 \end{bmatrix}$$

$$S(0) = 0.0179 \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 14.5184 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As figuras a seguir apresentam a evolução da saída $y(t)$ e do esforço de controle $u(t)$ para os casos 1, 2 e 3 para $\hat{r}(s) = 50/s$ [rad/s].





É importante observar que quanto mais distantes os polos do sistema em malha fechada estiverem dos polos em malha aberta, maiores em módulo devem ser os elementos dos ganhos de realimentação K e, consequentemente, a intensidade do controle $u(t)$ aumenta de forma expressiva.

Considere agora que o objetivo seja assegurar erro nulo para a entrada rampa unitária considerando os polos em malha fechada definidos por $P(s) = (s + 0.5)^2$. Neste caso, adotando

$$K = \begin{bmatrix} 0.1071 & -0.0714 \end{bmatrix}$$

devemos determinar $M(s)$ tal que $F(0) = 1$ e $F'(0) = 0$. Definindo,

$$M(s) = \frac{\tau s + 1}{2s + 1} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

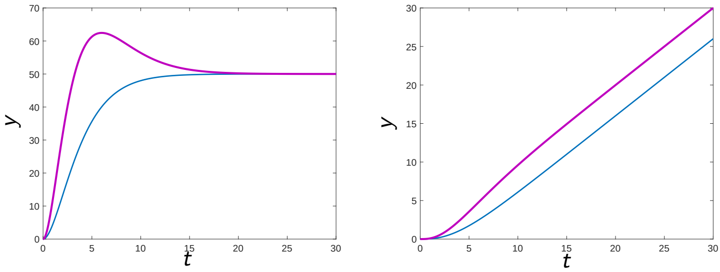
temos

$$F(0) = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.6791 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e, além disso,

$$F'(0) = 0 \Rightarrow \tau = 6$$

A figura a seguir apresenta, à esquerda, a resposta do sistema a uma entrada degrau $\hat{r}(s) = 50/s$ e, à direita, a resposta à entrada rampa $\hat{r}(s) = 1/s^2$ para os casos com M e $M(s)$.



Observe que o projeto de controle considerando erro nulo para rampa unitária foi realizado às custas do aparecimento de uma sobrelevação na saída devido ao zero acrescentado em $F(s)$.

Neste momento, duas perguntas são pertinentes :

- **Questão 1 :** Quando é possível determinar K de maneira a alocar todos os polos em posições desejadas no plano complexo ?

  A resposta vem de uma propriedade importante chamada **controlabilidade** que será apresentada em seguida.

- **Questão 2 :** Onde alocar os polos em malha fechada do sistema de maneira a atender critérios de desempenho no regime transitório ?

  A resposta para esta pergunta não é simples. No curso anterior a ideia era alocar os polos dominantes dentro de uma região Ω que foi obtida a partir de critérios de desempenho como tempo de estabilização e sobrelevação, deduzidos para uma função de transferência de segunda ordem. Entretanto, com a possibilidade de alocar todos os polos, um critério que permite conciliar comportamento transitório, mantendo o esforço de controle dentro de limites aceitáveis será apresentado posteriormente.

Controlabilidade

O sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, ou o par (A, B), é dito ser controlável se para qualquer estado inicial $x(0) = x_0$ e qualquer estado final $x(T) = x_T$ existir uma entrada $u(t)$ capaz de transferir x_0 a x_T em tempo finito. Caso contrário, o sistema é dito ser não controlável.

O lema a seguir estabelece um teste simples para verificar se o par (A, B) é controlável.

Lema

O par (A, B) é controlável se e somente se a matriz

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n_x-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$$

denominada matriz de controlabilidade, for não singular.

Comentários :

- Como vimos no capítulo anterior, o modelo $(\tilde{A}, \tilde{B})$ na forma canônica controlável pode ser obtido a partir da transformação $\Gamma = \mathcal{C}\mathcal{M}$ da seguinte forma $(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\Gamma^{-1}A\Gamma, \Gamma^{-1}B)$.
- Logo, para a descrição do sistema na forma canônica controlável, a matriz Γ deve ser não singular. Como a inversa de $\mathcal{M}$ sempre existe pois seu determinante fornece $\det(\mathcal{M}) = (-1)^{n_x-1}$ então $\mathcal{C}$ deve ser não singular.

A controlabilidade de um sistema pode também ser verificada analisando o gramiano de controlabilidade.

Lema

O par (A, B) é controlável se e somente se o gramiano de controlabilidade

$$W_C(T) = \int_0^T e^{A\tau} BB' e^{A'\tau} d\tau$$

for não singular.

De fato, se um sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$ for controlável, a sua solução em um instante arbitrário $t = T$ é dada por

$$x(T) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

A função que satisfaz a igualdade é

$$u(t) = -B'e^{A'(T-t)}W_C(T)^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T)$$

Substituindo u em $x(T)$ e levando em conta que

$$W_C(T) = \int_0^T e^{A\tau}BB'e^{A'\tau}d\tau = \int_0^T e^{A(T-\tau)}BB'e^{A'(T-\tau)}d\tau$$

temos

$$\begin{aligned} x(T) &= e^{AT}x_0 - W_C(T)W_C(T)^{-1}(e^{AT}x_0 - x_T) \\ &= x_T \end{aligned}$$

somente se $W_C(T)^{-1}$ for não singular!

Além disso se o gramiano for semidefinido positivo, ou seja, $W_C(T) \geq 0$ existe $\chi \neq 0$ tal que

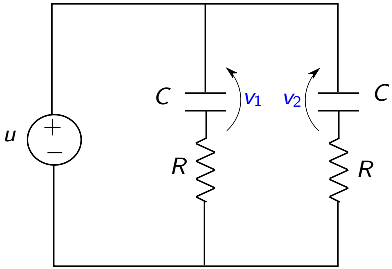
$$\begin{aligned}\chi' W_C(T)\chi &= \int_0^T \chi' e^{A\tau} BB' e^{A'\tau} \chi d\tau \\ &= \int_0^T z(\tau)' z(\tau) d\tau \geq 0\end{aligned}$$

Logo, deve existir $z(t) = B' e^{A' t} \chi = 0, \forall t \in [0, T]$. Portanto, $z(t)$ e suas derivadas sucessivas devem ser nulas em $t = 0$, logo

$$\begin{bmatrix} B'\chi \\ B'A'\chi \\ \vdots \\ B'A'^{n_x - 1}\chi \end{bmatrix} = 0$$

ou seja, $\mathcal{C}'\chi = 0$. Logo se o par (A, B) for controlável, então $\mathcal{C}$ deve ser não singular e, portanto, $\mathcal{C}'\chi = 0$ se verifica somente se $\chi = 0$ e único, o que implica que $W_C(T)$ deve ser positiva definida.

Exemplo : Considere o circuito apresentado a seguir. Considerando que as variáveis de estado são definidas como $x_1 = v_1$ e $x_2 = v_2$, obtenha a representação em espaço de estado do sistema e verifique se ele é controlável.



A representação do sistema em espaço de estado é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/(RC) & 0 \\ 0 & -1/(RC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/(RC) \\ 1/(RC) \end{bmatrix} u$$

A matriz de controlabilidade é dada por

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(RC) & -1/(RC)^2 \\ 1/(RC) & -1/(RC)^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathcal{C}) = 0$$

$$\Downarrow$$

O sistema é não controlável !

A conclusão acima é evidente uma vez que a entrada u pode transferir x_1 **ou** x_2 para qualquer valor, mas não pode levar x_1 **e** x_2 para valores arbitrários. Por exemplo, para $x_1(0) = x_2(0) = 0$, independentemente da entrada x_1 sempre será sempre igual a x_2.

Regulador Linear Quadrático

Não é fácil decidir onde alocar os polos em malha fechada do sistema que desejamos controlar. Polos estáveis muito distantes do eixo imaginário geram as seguintes implicações :

- O sistema em malha fechada chega à estabilidade em um tempo bastante reduzido

Em contrapartida :

- O sistema fica sensível a ruídos de alta frequência, uma vez que a sua largura de faixa aumenta
- Os ganhos de realimentação tornam-se muito elevados e, como consequência, a amplitude do esforço de controle passa atingir valores que impedem a implementação do controlador.

Regulador Linear Quadrático

De forma a estabelecer um compromisso entre obter um comportamento adequado no regime transitório e um esforço de controle dentro de limites aceitáveis para a implementação, calculamos o ganho matricial K através da solução do seguinte problema de otimização

$$J(u) = \min_{K \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}} \int_0^\infty \left(x(t)' Q x(t) + \rho u(t)^2 \right) dt$$

em que $x(t)$ e $u(t)$ devem satisfazer as seguintes equações

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \; x(0) = x_0 \\ u(t) &= -Kx(t) \end{aligned}$$

O controlador K que resolve este problema é conhecido como Regulador Linear Quadrático.

Regulador Linear Quadrático

O papel da matriz $0 \leq Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e do escalar $\rho > 0$ é de definir o peso relativo que o estado e o sinal de controle têm no cálculo do critério $J(u)$. Note que :

- Se $Q \gg \rho I_n > 0$ então :
  - O sistema responde com maior velocidade
  - O sinal de controle pode assumir valores elevados causando a saturação dos atuadores
- Se $\rho I_n \gg Q \geq 0$ então :
  - O sistema responde mais lentamente
  - O esforço de controle é reduzido

Regulador Linear Quadrático

Após definir Q e ρ, o ganho K pode ser calculado como apresentado a seguir :

Regulador Linear Quadrático

A solução ótima do problema linear quadrático $J(u)$ é dada por $u = -Kx$ com

$$K = \rho^{-1} B' P$$

sendo $P = P' > 0$ a solução da seguinte equação de Riccati

$$A'P + PA - \rho^{-1} PBB'P + Q = 0$$

Ademais, o valor mínimo do critério é dado por $J_{min} = x(0)'Px(0)$.

Regulador Linear Quadrático

De fato adotando a função de Lyapunov $v(x) = x'Px$ e derivando-a com relação ao tempo, obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{v}(x) &= (Ax + Bu)'Px + x'P(Ax + Bu) \\
&= x'(A'P + PA)x + u'B'Px + x'PBu \\
&= x'(A'P + PA - \rho^{-1}PBB'P)x - \rho u'u + \\
&+ \rho(u + \rho^{-1}B'Px)'(u + \rho^{-1}B'Px) \\
&= -x'Qx - \rho u'u + \rho(u + \rho^{-1}B'Px)'(u + \rho^{-1}B'Px)
\end{aligned}$$

cuja integral de $t = 0$ a $t \to \infty$ fornece

$$\begin{aligned}
J(u) &= v(x_0) - \cancelto{0}{v(x(\infty))} + \rho \int_0^\infty (u + \rho^{-1}B'Px)'(u + \rho^{-1}B'Px)dt \\
&\geq v(x_0)
\end{aligned}$$

pois $v(x(\infty)) = 0$ devido à estabilidade do sistema em malha fechada. Além disso $J_{min} = v(x_0) = x_0'Px_0$.

Regulador Linear Quadrático

- No Matlab este projeto pode ser realizado a partir da seguinte função

$$\texttt{[K,P,E] = lqr(sys,Q,}\rho\texttt{)}$$

sendo `sys` o sistema em representação de estado obtido através do comando

$$\texttt{sys = ss(A,B,C,D)}$$

`K` é o regulador linear quadrático, `P` é a solução da equação de Riccati e `E` fornece os autovalores do sistema em malha fechada.

Existe uma relação direta entre as escolhas das matrizes Q e ρ e o desempenho do sistema no regime transitório ?

Felizmente a resposta é positiva e está apresentada em seguida.

Regulador Linear Quadrático

Ao ponderarmos no critério quadrático uma combinação linear dos estados $z = Vx$ e definirmos $Q = V'V$ com $V \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$, temos :

Lugar das Raízes Simétrico

Seja $\varphi(s) = V(sI - A)^{-1}B$ e $\rho > 0$. Os polos do sistema em malha fechada $\dot{x} = (A - BK)x$, em que K é o ganho ótimo solução do problema linear quadrático, são as n_x raízes de

$$1 + \rho^{-1}\varphi(-s)'\varphi(s) = 0$$

situadas no semiplano esquerdo complexo.

- Como $\varphi(s)$ é conhecida, uma localização desejada dos polos é imposta através da escolha de $\rho > 0$.

Exemplo : Considere novamente o motor CC descrito na forma canônica controlável. Projete reguladores lineares quadráticos para $Q = I$ e $\rho = \{2, 10, 50\}$ e os ganhos M associados de maneira a obter erro nulo para entrada degrau unitário.

- Para $\rho = 2$ a solução da equação de Riccati é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 2.1102 & 1.1570 \\ 1.1570 & 1.2068 \end{bmatrix}$$

que permite determinar o ganho de realimentação

$$K = \begin{bmatrix} 0.5785 & 0.6034 \end{bmatrix}$$

que aloca os polos em $-0.8374 \pm 0.1420j$. O ganho M associado é dado por

$$M = \begin{bmatrix} 17.4579 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Para $\rho = 10$ a solução da equação de Riccati é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 2.9347 & 2.0412 \\ 2.0412 & 2.1551 \end{bmatrix}$$

que permite determinar o ganho de realimentação

$$K = \begin{bmatrix} 0.2041 & 0.2155 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} 23.7997 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que aloca os polos em -0.9023 e -0.3846.

- Para $\rho = 50$ a solução da equação de Riccati é dada por

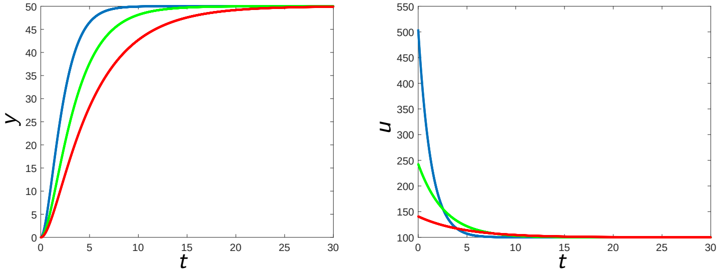
$$P = \begin{bmatrix} 3.7365 & 2.9074 \\ 2.9074 & 3.0912 \end{bmatrix}$$

que permite determinar o ganho de realimentação

$$K = \begin{bmatrix} 0.0581 & 0.0618 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} 48.3926 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que aloca os polos em -0.9130 e -0.2202.

A figura a seguir apresenta a resposta do sistema e o esforço de controle correspondente para $\rho = 2$, $\rho = 10$ e $\rho = 50$.



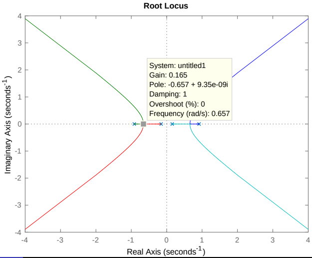
Note que, como esperado, a medida que ρ aumenta o esforço de controle diminui mas, em contrapartida, o sistema se torna mais lento.

Exemplo : Para $V = [1 \;\; 0]$, utilizando o lugar das raízes simétrico, refaça o projeto de controle do motor CC para que o sistema em malha fechada tenha o menor tempo de estabilização possível e não apresente oscilação.

Utilizando V apresentada, obtemos imediatamente

$$\varphi(s) = \frac{1}{s^2 + 1.0714s + 0.1429}$$

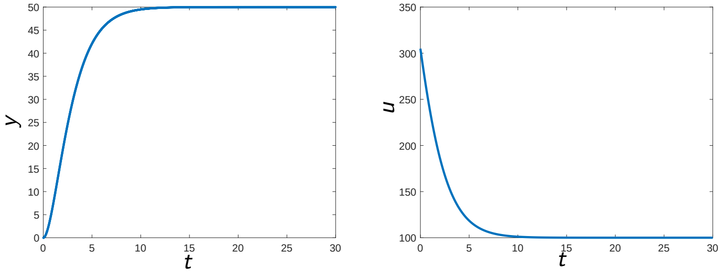
A figura abaixo mostra o lugar das raízes simétrico. O valor de $\rho = 6$ permite obter o desempenho desejado.



Ambos os polos foram alocados em -0.66 fazendo com que $P(s) = s^2 + 1.32s + 0.4356$. Consequentemente, o ganho é dado por

$$K = \begin{bmatrix} 0.2927 & 0.2486 \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} 20.8346 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A figura abaixo apresenta a resposta do sistema, bem como o esforço de controle associado.



Observador de Estado

A grande vantagem do projeto de controladores via realimentação de estado é a possibilidade de alocar todos os polos do sistema em malha fechada em posições adequadas do plano complexo de forma impor ao sistema controlado qualquer desempenho desejado.

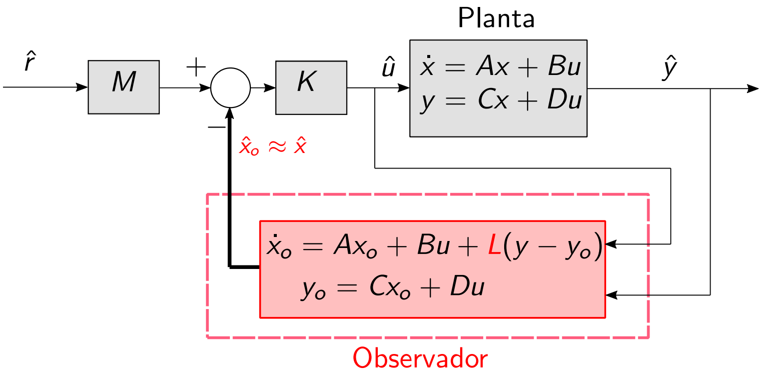
No entanto, o controlador depende da medida de todos os estados do sistema, o que muitas vezes é impossível de ser obtida, seja por motivos de custos dos sensores ou por impossibilidade física de implantação dos medidores.

Neste caso, uma forma de contornar esta dificuldade é estimar os estados tendo como base as informações disponíveis na saída.

A estrutura que permite estimar o estado do sistema é chamada de observador de estado.

Observador de Estado

A figura seguinte apresenta em destaque o observador de estado.



Note que $L \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$ é o ganho do observador a ser determinado. Além disso, como não se conhece x, geralmente $x_o(0) \neq x(0)$.

Observador de Estado

Definindo o erro entre o estado verdadeiro e o estado estimado como sendo $e_o(t) = x(t) - x_o(t)$, temos

$$\begin{aligned}
\dot{e}_o &= \dot{x} - \dot{x}_o \\
&= Ax + Bu - (Ax_o + Bu + L(Cx + Du - (Cx_o + Du))) \\
&= A(x - x_o) - LC(x - x_o) \\
&= (A - LC)e_o
\end{aligned}$$

Note que o ganho L deve tornar a matriz $(A - LC)$ estável para toda condição inicial $e_o = x(0) - x_o(0)$. **Mas não apenas isto :**

O erro $e_o(t)$ deve tender a zero com uma velocidade aceitável. Entretanto, alocar os polos de $(A - LC)$ muito distantes do eixo imaginário, faz com que as componentes dos ganhos L sejam elevadas e a largura de faixa do observador seja grande deixando-o suscetível a ruídos de alta frequência. Logo, deve haver um compromisso !

Observador de Estado

Considerando a existência de ruídos no sistema, ou seja

$$\dot{x} = Ax + Bu + w$$
$$y = Cx + Du + \upsilon$$

Neste caso, o erro de estimação é dado por

$$\dot{e}_o = (A - LC)e_o + w - L\upsilon$$

o que indica que o aumento de L faz com que a dinâmica do erro seja mais rápida, mas em contrapartida aumenta a intensidade do ruído de medição. Podemos considerar, por exemplo,

$$w(t) = U\delta(t) \quad , \quad \upsilon(t) = \sqrt{\mu}\delta(t)$$

para indicar a atuação do ruído em todo o espectro de frequência, já que $\hat{\delta}(j\omega) = 1, \ \omega \in \mathbb{R}$, em que $U \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$ e μ são dados e definem a intensidade e abrangência do ruído.

Observador de Estado

A equação do erro é dada por

$$\begin{aligned} e_o(t) &= e^{(A-LC)t} e_o + \int_0^t e^{(A-LC)(t-\tau)}(w(\tau) - L\upsilon(\tau))d\tau \\ &= e^{(A-LC)t} x_o + \underbrace{e^{(A-LC)t} U}_{e_w(t)} \underbrace{- \sqrt{\mu} e^{(A-LC)t} L}_{e_\upsilon(t)} \end{aligned}$$

Logo, um bom critério para a determinação do ganho L pode ser escrito na forma

$$J(L) = \int_0^\infty \left(e_w(t)' e_w(t) + e_\upsilon(t)' e_\upsilon(t) \right) dt$$

Observador de Estado

Assim, temos

$$\begin{aligned} J(L) &= \int_0^\infty \mathrm{Tr}\left(e_w(t)'e_w(t) + e_\upsilon(t)'e_\upsilon(t)\right) dt \\ &= \int_0^\infty \mathrm{Tr}\left(e_w(t)e_w(t)' + e_\upsilon(t)e_\upsilon(t)'\right) dt \\ &= \mathrm{Tr}\left(\underbrace{\int_0^\infty \left(e^{(A-LC)t}(UU' + \mu LL')e^{(A-LC)'t} \right) dt}_{R} \right) \end{aligned}$$

sendo R a solução da equação de Lyapunov

$$(A - LC)R + R(A - LC)' + UU' + \mu LL' = 0$$

que pode ser reescrita como

$$AR + RA' - \mu^{-1}RC'CR + UU' + \mu(L - \mu^{-1}RC')(L - \mu^{-1}RC')' = 0$$

Logo, $L = \mu^{-1}RC'$ é o ganho tal que $\min_L J(L) = J_{min} = \mathrm{Tr}(R)$.

Observador de Estado

Assim, sendo $w(t)$ e $v(t)$ dois ruídos brancos independentes com intensidades $Q = UU'$ e $\mu > 0$, o melhor compromisso entre velocidade de convergência e largura de faixa do observador pode ser obtido a partir da solução do problema linear quadrático

$$\min_{L} \underbrace{\int_0^{\infty} \left(e_w(t)' e_w(t) + e_v(t)' e_v(t) \right) dt}_{J(L)}$$

que fornece o ganho ótimo $L = \mu^{-1} R C'$ em que $R > 0$ é a solução da equação de Riccati

$$AR + RA' - \mu^{-1} R C' C R + UU' = 0$$

Ademais, temos que $J_{min} = \mathrm{Tr}(R)$.

Observador de Estado

Podemos também resolver este problema utilizando o lugar das raízes simétrico.

Lugar das Raízes Simétrico

Seja $\psi(s) = C(sI - A)^{-1}U$ e $\mu > 0$ com $U \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$. Os polos da equação do erro $\dot{e}_o = (A - LC)e_o$, em que L é o ganho ótimo do observador, são as n_x raízes de

$$1 + \mu^{-1}\psi(-s)\psi(s)' = 0$$

situadas no semiplano esquerdo complexo.

Note que $n_w > 1$ permite considerar ruídos do tipo $w(t) = U\bar{w}(t)$ sendo $\bar{w}(t) \in \mathbb{R}^{n_w \times 1}$.

Exemplo : Considere o motor CC já estudado mas levando em conta que a carga está engastada em um ponto fixo através de um eixo flexível com constante elástica κ. Neste caso, as equações são dadas por :

$$L_e \frac{di}{dt} + Ri = u - Kc\frac{d\theta}{dt}$$
$$J_T \frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + \kappa\theta = cKi$$

em que $J_T = J_c + J_m c^2$. Definindo $x = [i \;\; \theta \;\; d\theta/dt]$ e considerando que apenas a velocidade $d\theta/dt$ pode ser medida, temos

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -R/L_e & 0 & -Kc/L_e \\ 0 & 0 & 1 \\ Kc/J_T & -\kappa/J_T & -b/J_T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/L_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Utilizando os valores numéricos já fornecidos e $\kappa = 2$ [Nm/rad], projete um observador de estado com polos suficientemente mais rápidos do que o polo mais rápido da planta.

O polo mais rápido da planta é ≈ -0.9, logo os três polos do observador foram alocados em -2 resolvendo-se a seguinte equação

$$\det(sI - (A - LC)) = P_o(s) = (s+2)^3$$

que fornece

$$L = \begin{bmatrix} -15.0000 \\ -55.0000 \\ 4.9286 \end{bmatrix}$$

Para fins de conferência, no Matlab, este ganho pode ser obtido através do comando

$$\begin{aligned} &\texttt{L} = \texttt{acker}(\texttt{A}', \texttt{C}', [-2, -2, -2]) \\ &\texttt{L} = \texttt{L}' \end{aligned}$$

Considerando agora que os sinais de controle $u(t)$ e de saída $y(t)$ sejam submetidos a ruídos aditivos brancos, de tal forma que $U = 10^{-1}B$ e $\sqrt{\mu} = 10^{-2}$ a partir da solução da equação de Riccati

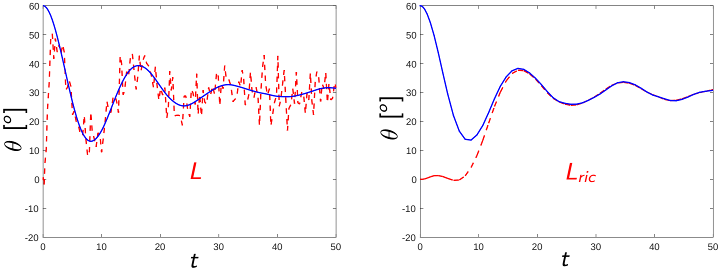
```
U = 1e - 1 * B;
mu = (1e - 2)^2;
[Lric, R, E] = lqr(A', C', U * U', mu);
Lric = Lric';
```

obtemos

$$L = \begin{bmatrix} 1.7587 \\ 0.0000 \\ 0.4349 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de $A - L_{ric}C$ são $\{-0.6087 \pm 0.3521j, -0.2889\}$. Para ilustrar a qualidade de ambos os projetos, considere que o sistema evolui de condição inicial $x(0) = [1 \ \pi/3 \ 0]'$ com entrada $u(t) = \pi/3, \ \forall t \geq 0$, e está sujeito a ruídos.

A figura a seguir apresenta a resposta obtida para cada um dos projetos realizados.



Note que ambos os observadores partem de condições iniciais nulas. Enquanto o observador com L é mais rápido, aquele com L_{ric} praticamente não sofre a influência do ruído.

Neste momento, é importante saber sob quais condições é possível determinar L de forma a estimar os estados do sistema com qualquer desempenho previamente estabelecido.

Observabilidade

O sistema $\dot{x} = Ax$ com $y = Cx$, ou o par (A, C), é dito ser observável se existir um instante $t = T > 0$ tal que o conhecimento de $y(t)$ para $t \in [0, T]$ permita determinar unicamente $x(0)$. Caso contrário, o sistema é dito ser não observável.

Sabemos que a solução de $\dot{x} = Ax$ para $x(0) = 0$ fornece $y(t) = Ce^{At}x(0) = 0$, $\forall t \geq 0$. Então como $y(t) = 0$, $t \in [0, T]$, suas derivadas sucessivas também são. Assim

$$\left.\begin{bmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n_x-1)}(t) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n_x-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}} x(0) = 0, \text{ Logo, } \det(\mathcal{O}) \neq 0 \text{ para } x(0) \text{ ser único.}$$

Observabilidade

O lema a seguir estabelece um teste simples para verificar se o par (A, C) é observável.

Lema

O par (A, C) é observável se e somente se a matriz $\mathcal{O}$ denominada matriz de observabilidade, for não singular.

Alternativamente,

Lema

O par (A, C) é observável se e somente se o gramiano de observabilidade

$$W_O(T) = \int_0^T e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau$$

for não singular.

Observabilidade

De fato, se um sistema $\dot{x} = Ax$ for observável, o conhecimento de $y(t) = Cx(t)$ para $t \in [0, T]$ permite calcular de maneira única a sua condição inicial $x(0)$. Logo, pre-multiplicando

$$Ce^{At}x_0 = y(t)$$

por $e^{A't}C'$ e integrando ambos os lados de $t = 0$ a $t = T$, obtemos

$$x_0 = W_O(T)^{-1} \int_0^T e^{A't}C'y(t)dt$$

que fornece uma única condição inicial $x(0) = x_0$ somente se $W_O(T)^{-1}$ for não singular !

Além disso se o gramiano for semidefinido positivo, ou seja, $W_O(T) \geq 0$ existe $\chi \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned} \chi' W_O(T)\chi &= \int_0^T \chi' e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} \chi d\tau \\ &= \int_0^T z(\tau)' z(\tau) d\tau \geq 0 \end{aligned}$$

Logo, deve existir $z(t) = Ce^{At}\chi = 0, \forall t \in [0, T]$. Portanto, $z(t)$ e suas derivadas sucessivas devem ser nulas em $t = 0$, logo

$$\begin{bmatrix} C\chi \\ CA\chi \\ \vdots \\ CA^{n_x-1}\chi \end{bmatrix} = 0$$

ou seja, $\mathcal{O}\chi = 0$. Logo se o par (A, C) for observável, então $\mathcal{O}$ deve ser não singular e, portanto, esta condição se verifica somente se $\chi = 0$ e único, o que implica que $W_O(T)$ deve ser positiva definida.

Dualidade : Observabilidade e Controlabilidade

Analisando os conceitos de observabilidade e controlabilidade, notamos que existe uma relação precisa entre ambos.

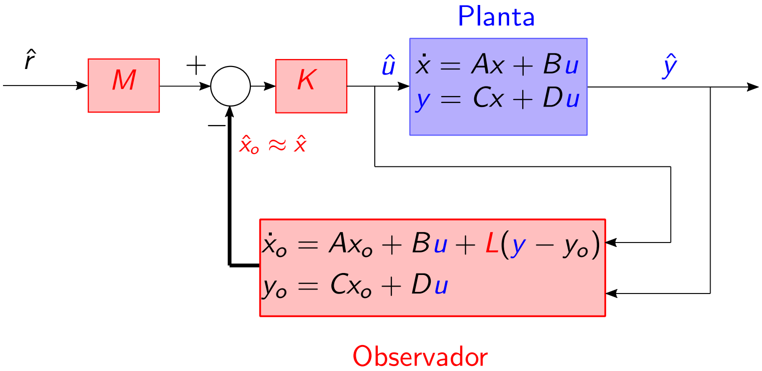
Dualidade

De fato, o par (A, C) é observável se e somente se o par (A', C') for controlável.

De fato, o par (A, B) é controlável se e somente se o par (A', B') for observável.

Projeto de Servomecanismos

O projeto de servomecanismos refere-se ao projeto mais geral. Ele leva em conta a determinação dos ganhos K, M e L e que apenas os sinais u e y estão disponíveis.



O objetivo é fazer com que y siga a referência r com um erro aceitável. De preferência nulo!

Projeto de Servomecanismos

Supomos que o estado $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ não está disponível para realimentação. Ele será substituído pelo estado estimado $x_o \in \mathbb{R}^{n_x}$ fornecido pelo observador, o que torna possível a implementação do controle. Do esquema anterior, temos

- Representação de estado da planta

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

- Representação de estado do observador

$$\begin{aligned} \dot{x}_o &= Ax_o + Bu + L(y - y_o) \\ y_o &= Cx_o + Du \end{aligned}$$

- Sinal de controle

$$u = K(Mr - x_o)$$

Projeto de Servomecanismos

Definindo a variável de estado aumentada $x_a \in \mathbb{R}^{2n_x}$ como

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ \underbrace{x - x_o}_{e_o} \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= \begin{bmatrix} (A - BK) & BK \\ 0 & (A - LC) \end{bmatrix} x_a + \begin{bmatrix} BKM \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} C - DK & DK \end{bmatrix} x_a + DKMr \end{aligned}$$

A equação característica do sistema em malha fechada é

$$\det(sI - (A - BK))\det(sI - (A - LC)) = 0$$

Ou seja, os seus polos são determinados através de K como se os estados estivessem disponíveis e através da escolha do ganho L.

Projeto de Servomecanismos

Além disso a função de transferência em malha fechada é dada por

$$F(s) = \begin{bmatrix} C - DK & DK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - (A - BK))^{-1} & ? \\ 0 & (sI - (A - LC))^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BKM \\ 0 \end{bmatrix} + \\ + DKM \\ = (C - DK)(sI - (A - BK))^{-1} BKM + DKM$$

que é exatamente a função de transferência em malha fechada obtida para o caso em que o estado está disponível. A interrogação ? indica que o termo não é relevante na análise. Estas observações decorrem o chamado **Teorema da Separação**.

Teorema da Separação

O projeto do observador para a obtenção de L e do controlador para a obtenção de K e M podem ser feitos de forma separada e independente.

Projeto de Servomecanismos

Uma vez determinados K, $M(s)$ e L é importante verificar como a estrutura de controle pode ser implementada. Lembrando que

$$\hat{u} = KM(s)\hat{r} - K\hat{x}_o$$

definimos o escalar $h(s) = KM(s)$ e, aplicando a transformada de Laplace na equação do observador, temos

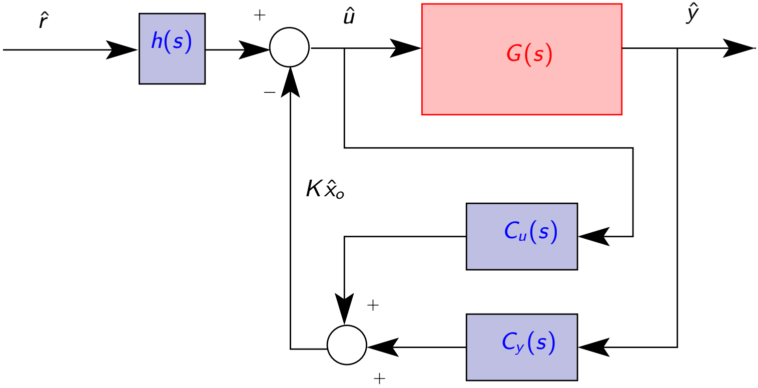
$$K\hat{x}_o = C_u(s)\hat{u} + C_y(s)\hat{y}$$

sendo

$$\begin{aligned} C_u(s) &= K(sI - (A - LC))^{-1}(B - LD) \\ C_y(s) &= K(sI - (A - LC))^{-1}L \end{aligned}$$

Projeto de Servomecanismos

- A figura a seguir mostra o esquema final a ser implementado.



Projeto via Representação de Estado

Considere um sistema LIT com função de transferência

$$G(z) = \frac{\hat{y}(z)}{\hat{u}(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_u} (b_i - b_n a_i) z^i}{\sum_{i=0}^{n_x} a_i z^i} + b_n$$

sendo $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_{n_x} = 1$ com $n_u \leq n_x - 1$ e sua representação em espaço de estado

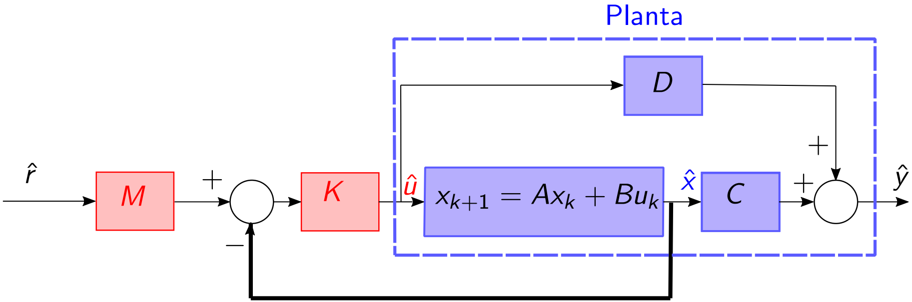
$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

que na forma canônica controlável, com $c_i = b_i - b_n a_i$, é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n_x-1} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n_u} \\ 0 \end{bmatrix}', \ D = b_n$$

Projeto via Representação de Estado

Os desenvolvimentos para os sistemas dinâmicos a tempo discreto são muito similares aos introduzidos para os sistemas a tempo contínuo. Seguiremos, portanto, o mesmo caminho trilhado anteriormente mas com as ferramentas matemáticas adequadas para tratar o caso discreto. Considere novamente a seguinte estrutura de controle considerando, neste primeiro momento, $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ disponível.



Projeto via Representação de Estado

O objetivo é determinar os ganhos matriciais $K \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}$ e $M \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$ de forma a fazer com que $y(k)$ siga a referência $r(k)$ com desempenho adequado. A partir do diagrama de blocos anterior, temos

$$u(k) = K(Mr(k) - x(k))$$

em que $r(k)$ é o sinal de referência. Conectando esta entrada de controle no sistema, obtemos o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A - BK)x(k) + BKMr(k), \ \ x(0) = x_0 \\ y(k) &= (C - DK)x(k) + DKMr(k) \end{aligned}$$

cuja função de transferência é $F(z) = S(z)KM$ com

$$S(z) = (C - DK)\left(zI - (A - BK)\right)^{-1} B + D$$

Projeto via Representação de Estado

A primeira etapa é resolver o problema de regulação, ou seja, determinar K de forma que os polos de $F(z)$ dados por

$$\det\left(zI - (A - BK)\right) = 0$$

sejam alocados em posições adequadas, por exemplo, dentro de uma região Ω de interesse. Assim, escolhendo os polos $p_1, \cdots, p_{n_x}$ localizados no interior de Ω, podemos determinar o polinômio

$$\mathcal{P}(z) = \prod_{i=1}^{n_x}(z - p_i) = z^{n_x} + \sum_{i=0}^{n_x-1} d_i z^i$$

e, assim, calcular $K = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_{n_x} \end{bmatrix}$ tal que

$$\det\left(zI - (A - BK)\right) = \underbrace{z^{n_x} + \sum_{i=0}^{n_x-1} d_i z^i}_{\mathcal{P}(z)}$$

Projeto via Representação de Estado

Note que se o sistema (A, B, C, D) estiver na forma canônica controlável, o ganho K pode ser obtido através da igualdade de matrizes

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 - k_1 & -a_1 - k_2 & -a_2 - k_3 & \cdots & -a_{n_x-1} - k_{n_x} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \cdots & -d_{n_x-1} \end{bmatrix}$$

o que fornece

$$K = \begin{bmatrix} d_0 - a_0 & d_1 - a_1 & \cdots & d_{n_x-1} - a_{n_x-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}$$

Projeto via Representação de Estado

A segunda etapa do projeto consiste em determinar M de forma a ajustar o desempenho em regime permanente. Considerando que $\hat{y}(z) = F(z)\hat{r}(z)$ temos as seguintes condições :

- Erro nulo para entrada degrau unitário :

$$F(1) = S(1)KM = 1 \Longrightarrow M = S(1)^{-1}K'(KK')^{-1}$$

- Erro nulo para entrada rampa unitária : Neste caso KM deve ser uma função de transferência $h(z) = KM(z)$ de forma a ser possível impor :

$$F(1) = S(1)h(1) = 1 \ \ \text{e} \ \ F'(1) = \left(\frac{d}{dz}(S(z)h(z))\right)_{z=1} = 0$$

- O item anterior pode ser generalizado para $r(k) = k^{\alpha}u(k), \ \alpha \geq 2$.

Vale ressaltar que os polos e zeros de $h(z)$ são também polos e zeros de $F(z)$, o que indica que a escolha da dinâmica de $h(z)$ deve ser feita com cuidado.

O ganho K pode ser calculado de forma a alocar os polos do sistema em malha fechada em posições arbitrárias do plano complexo, sempre que o sistema for controlável.

Controlabilidade

O sistema $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, ou o par (A, B), é dito ser controlável se para qualquer $x(0) = x_0$ e qualquer $x(T) = x_T$ existir uma entrada $u(k)$ capaz de transferir x_0 a x_T em tempo finito. Caso contrário, o sistema é dito ser não controlável.

O lema a seguir estabelece um teste simples.

Lema

O par (A, B) é controlável se e somente se a matriz

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n_x-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$$

denominada matriz de controlabilidade, for não singular.

Controlabilidade

Comentários :

- Como no caso contínuo este lema se baseia na existência da matriz de transformação $\Gamma = \mathcal{C}\mathcal{M}$ que permite descrever o sistema na forma canônica controlável. Isto é possível se e somente se $\mathcal{C}$ é não singular.

A controlabilidade de um sistema pode também ser verificada analisando o gramiano de controlabilidade.

Lema

O par (A, B) é controlável se e somente se o gramiano de controlabilidade

$$W_C(n_x - 1) = \sum_{k=0}^{n_x-1} A^k BB' A'^k$$

for não singular.

Controlabilidade

Note que o gramiano de controlabilidade pode ser escrito como

$$W_C(n_x - 1) = \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n_x-1}B \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} B' \\ B'A' \\ \cdots \\ B'A'^{n_x-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}'}$$

e será não-singular se e somente se $\mathcal{C}$ for não-singular. Além disso, por ser não singular temos que o gramiano é uma matriz definida positiva.

Regulador Linear Quadrático

Para sistemas a tempo discreto, também podemos determinar o ganho K de forma a estabelecer um compromisso entre obter um comportamento adequado no regime transitório e um esforço de controle dentro de limites aceitáveis para a implementação, através da solução do seguinte problema de otimização

$$J(u) = \min_{K \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}} \sum_{k=0}^{\infty} x(k)' Q x(k) + \rho u(k)^2$$

em que $x(k)$ e $u(k)$ devem satisfazer as seguintes equações

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \;\; x(0) = x_0 \\ u(k) &= -Kx(k) \end{aligned}$$

O controlador K que resolve este problema é conhecido como Regulador Linear Quadrático.

Regulador Linear Quadrático

O papel da matriz $0 \leq Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e do escalar $\rho > 0$ é de definir o peso relativo que o estado e o sinal de controle têm no cálculo do critério $J(u)$. Note que :

- Se $Q \gg \rho I_n > 0$ então :
  - O sistema responde com maior velocidade
  - O sinal de controle pode assumir valores elevados causando a saturação dos atuadores
- Se $\rho I_n \gg Q \geq 0$ então :
  - O sistema responde mais lentamente
  - O esforço de controle é reduzido

Regulador Linear Quadrático

Após definir Q e ρ, o ganho K pode ser calculado como apresentado a seguir :

Regulador Linear Quadrático

A solução ótima do problema linear quadrático $J(u)$ é dada por $u = -Kx$ com

$$K = (\rho I + B'PB)^{-1}B'PA$$

sendo $P = P' > 0$ a solução da seguinte equação de Riccati

$$A'PA - P - A'PB\left(\rho I + B'PB\right)^{-1}B'PA + Q = 0$$

Ademais, o valor mínimo do critério é dado por $J_{min} = x(0)'Px(0)$.

Regulador Linear Quadrático

De fato adotando a função de Lyapunov $v(x) = x'Px$ e calculando $\Delta v(k) = v(x(k+1)) - v(x(k))$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta v(x) &= (Ax + Bu)'P(Ax + Bu) - x'Px \\
&= x'A'PAx + x'A'PBu + u'B'PAx + u'B'PBu - x'Px \\
&= x'\Big(A'PA - P - A'PB(\rho I + B'PB)^{-1}B'PA\Big)x - \rho u'u + \mathcal{V}(u,x) \\
&= -x'Qx - \rho u'u + \mathcal{V}(u,x)
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(u,x) = \Big(u + (\rho I + B'PB)^{-1}B'PAx\Big)'\Big(\rho I + B'PB\Big) \times \\
\times \Big(u + (\rho I + B'PB)^{-1}B'PAx\Big)
\end{aligned}$$

Somando de $k = 0$ a $k \to \infty$ vem

$$J(u) = v(x_0) - \cancelto{0}{v(x(\infty))} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{V}(u,x) \geq v(x_0)$$

Regulador Linear Quadrático

Além disso, da desigualdade anterior fica evidente que o menor custo

$$J_{min} = v(x_0) = x_0' P x_0$$

é obtido para

$$u = -(\rho I + B'PB)^{-1} B'PAx$$

No Matlab este projeto pode ser realizado a partir da seguinte função `[K,P,E] = lqr(sys,Q,ρ)` sendo `sys` o sistema em representação de estado a tempo discreto

```
sys = ss(A,B,C,D,T)
```

Alternativamente, pode ser utilizado `[K,P,E] = dlqr(A,B,Q,ρ)`.

Assim como no caso contínuo, existe uma relação direta entre as escolhas das matrizes Q e ρ e o desempenho do sistema no regime transitório.

Regulador Linear Quadrático

Ao ponderarmos no critério quadrático uma combinação linear dos estados $z = Vx$ e definirmos $Q = V'V$ com $V \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$, temos :

Lugar das Raízes Simétrico

Seja $\varphi(z) = V(zI - A)^{-1}B$ e $\rho > 0$. Os polos do sistema em malha fechada $x(k+1) = (A - BK)x(k)$, em que K é o ganho ótimo solução do problema linear quadrático

$$J(u) = \min_{K \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}} \sum_{k=0}^{\infty} x(k)' Q x(k) + \rho u(k)^2$$

são as n_x raízes de

$$1 + \rho^{-1} \varphi(z^{-1})' \varphi(z) = 0$$

situadas no interior do círculo unitário.

Observador de Estado

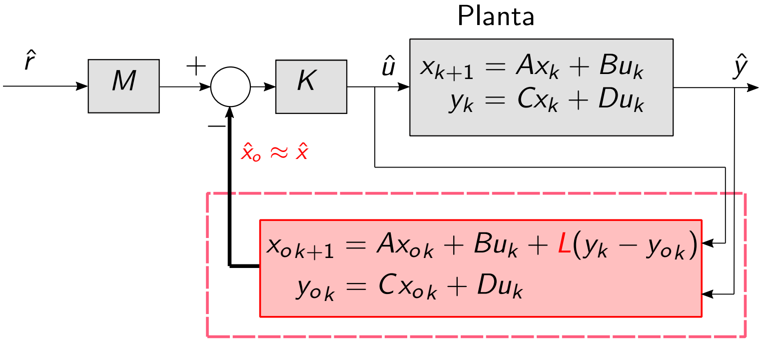
Como já mencionado no caso contínuo, a lei de controle projetada necessita da informação de todos os estados do sistema, o que muitas vezes é impossível de ser obtida, seja por motivos de custos dos sensores ou por impossibilidade física de implantação dos medidores.

Neste caso, uma forma de contornar esta dificuldade é estimar os estados tendo como base as informações disponíveis na saída.

A estrutura que permite estimar o estado do sistema é chamada de observador de estado.

Observador de Estado

A figura seguinte apresenta em destaque o observador de estado.



Note que $L \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$ é o ganho do observador a ser determinado. Além disso, como não se conhece x, geralmente $x_o(0) \neq x(0)$.

Observador de Estado

Definindo o erro entre o estado verdadeiro e o estado estimado como sendo $e_o(k) = x(k) - x_o(k)$, temos

$$\begin{aligned} e_o(k+1) &= x(k+1) - x_o(k+1) \\ &= Ax(k) + Bu(k) - (Ax_o(k) + Bu(k) + L(y(k) - y_o(k))) \\ &= A(x(k) - x_o(k)) - LC(x(k) - x_o(k)) \\ &= (A - LC)e_o(k) \end{aligned}$$

Note que o ganho L deve tornar a matriz $(A - LC)$ estável para toda condição inicial $e_o(0) = x(0) - x_o(0)$. **Mas não apenas isto :**

O erro $e_o(k)$ deve tender a zero com uma velocidade aceitável. Um deslocamento grande na posição dos polos do sistema faz com que o ganho do observador L seja elevado deixando-o muito suscetível a ruídos de alta frequência. Logo deve haver um compromisso !

Observador de Estado

Considerando a existência de ruídos no sistema, ou seja

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) + \upsilon(k) \end{aligned}$$

Neste caso, o erro de estimação é dado por

$$e_o(k+1) = (A - LC)e_o + w(k) - L\upsilon(k)$$

o que indica que o aumento de L faz com que a dinâmica do erro seja mais rápida mas, em contrapartida, aumenta a intensidade do ruído de medição. Podemos considerar, por exemplo,

$$w(k) = U\delta(k) \quad , \quad \upsilon(k) = \sqrt{\mu}\delta(k)$$

para indicar a atuação do ruído em todo o espectro de frequência, já que $\hat{\delta}(j\omega) = 1, \ \omega \in \mathbb{R}$, em que $U \in \mathbb{R}^{n_x \times 1}$ e μ são dados e definem a intensidade e abrangência do ruído.

Observador de Estado

A equação do erro é dada por

$$\begin{aligned} e_o(k) &= (A - LC)^k x_o + \sum_{\ell=0}^{k-1} (A - LC)^{k-\ell-1}(w(\ell) - L\upsilon(\ell)) \\ &= (A - LC)^k x_o + \underbrace{(A - LC)^{k-1} U}_{e_w(k)} \underbrace{- \sqrt{\mu}(A - LC)^{k-1} L}_{e_\upsilon(k)} \end{aligned}$$

considerando que $e_w(0) = e_\upsilon(0) = 0$. Logo, um bom critério para a determinação do ganho L pode ser escrito na forma

$$J(L) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e_w(k)' e_w(k) + e_\upsilon(k)' e_\upsilon(k) \right)$$

Assim, temos

$$
\begin{aligned}
J(L) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Tr}\left(e_w(k)' e_w(k) + e_\upsilon(k)' e_\upsilon(k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Tr}\left(e_w(k) e_w(k)' + e_\upsilon(k) e_\upsilon(k)'\right) \\
&= \mathrm{Tr}\Bigg(\underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} (A - LC)^{\ell} (UU' + \mu LL')(A - LC)'^{\ell}}_{R}\Bigg)
\end{aligned}
$$

sendo R a solução da equação de Lyapunov

$$
(A - LC)R(A - LC)' - R + UU' + \mu LL' = 0
$$

que pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
&ARA' - R - ARC'(\mu I - CRC')^{-1} CRA' + UU' + \\
&+ (L - ARC'(\mu I - CRC')^{-1})(\mu I - CRC')(L - ARC'(\mu I - CRC')^{-1})' = 0
\end{aligned}
$$

Observador de Estado

Logo, sendo $w(k)$ e $v(k)$ dois ruídos independentes com intensidades $Q = UU'$ e $\mu > 0$, o melhor compromisso entre velocidade de convergência e largura de faixa do observador pode ser obtido a partir da solução do problema linear quadrático

$$\min_{L} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(e_w(k)' e_w(k) + e_v(k)' e_v(k) \right)}_{J(L)}$$

que fornece o ganho ótimo $L = ARC'(\mu I - CRC')^{-1}$ em que $R > 0$ é a solução da equação de Riccati

$$ARA' - R - ARC'(\mu I - CRC')^{-1} CRA' + UU' = 0$$

Ademais, temos que $J_{min} = \mathrm{Tr}(R)$.

Observador de Estado

Podemos também resolver este problema utilizando o lugar das raízes simétrico.

Lugar das Raízes Simétrico

Seja $\psi(z) = C(zI - A)^{-1}U$ e $\mu > 0$ com $U \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$. Os polos da equação do erro $e_o(k+1) = (A - BK)e_o(k)$, em que L é o ganho ótimo do observador, são as n_x raízes de

$$1 + \mu^{-1}\psi(z^{-1})\psi(z)' = 0$$

situadas no interior do círculo unitário.

Note que $n_w > 1$ permite considerar ruídos do tipo $w(t) = U\bar{w}(t)$ sendo $\bar{w}(t) \in \mathbb{R}^{n_w \times 1}$.

Neste momento, é importante saber sob quais condições é possível determinar L de forma a estimar os estados do sistema com qualquer desempenho previamente estabelecido.

Observabilidade

O sistema $x(k+1) = Ax(k)$ com $y(k) = Cx(k)$, ou o par (A, C), é dito ser observável se existir um instante $k = k_T > 0$ tal que o conhecimento de $y(k)$ para $k \in [0, k_T]$ permita determinar unicamente $x(0)$. Caso contrário, o sistema é dito ser não observável.

Sabemos que a solução de $x(k+1) = Ax(k)$ para $x(0) = 0$ fornece $y(k) = CA^k x(0) = 0, \forall k \geq 0$. Então podemos escrever

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n_x - 1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n_x-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{O}} x(0) = 0, \text{ Logo, } \det(\mathcal{O}) \neq 0 \text{ para } x(0) \text{ ser único.}$$

O lema a seguir estabelece um teste simples para verificar se o par (A, C) é observável.

Lema

O par (A, C) é observável se e somente se a matriz $\mathcal{O}$ denominada matriz de observabilidade, for não singular.

Alternativamente,

Lema

O par (A, C) é observável se e somente se o gramiano de observabilidade

$$W_O(n_x - 1) = \sum_{k=0}^{n_x-1} A'^{\ell} C' C A^{\ell}$$

for não singular.

A prova do segundo lema segue o mesmo raciocínio daquele utilizado no caso contínuo.

Dualidade : Observabilidade e Controlabilidade

Analisando os conceitos de observabilidade e controlabilidade, notamos que existe uma relação precisa entre ambos.

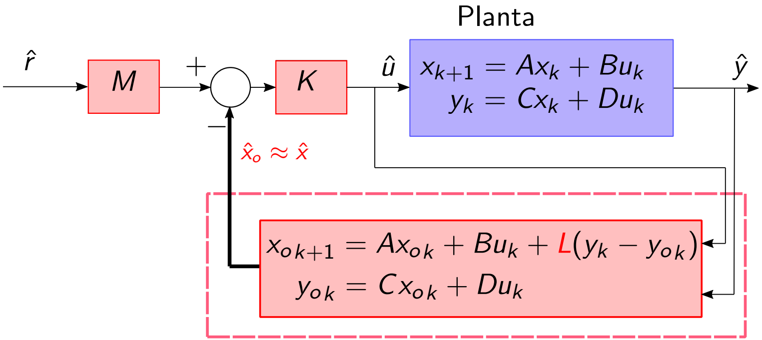
Dualidade

De fato, o par (A, C) é observável se e somente se o par (A', C') for controlável.

De fato, o par (A, B) é controlável se e somente se o par (A', B') for observável.

Projeto de Servomecanismos

O projeto de servomecanismos refere-se ao projeto mais geral. Ele leva em conta a determinação dos ganhos K, M e L e que apenas os sinais u e y estão disponíveis.



O objetivo é fazer com que y siga a referência r com um erro aceitável. De preferência nulo !

Projeto de Servomecanismos

Supomos que o estado $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ não está disponível para realimentação. Ele será substituído pelo estado estimado $x_o \in \mathbb{R}^{n_x}$ fornecido pelo observador, o que torna possível a implementação do controle. Do esquema anterior, temos

- Representação de estado da planta

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

- Representação de estado do observador

$$\begin{aligned} x_o(k+1) &= Ax_o(k) + Bu(k) + L(y(k) - y_o(k)) \\ y_o(k) &= Cx_o(k) + Du(k) \end{aligned}$$

- Sinal de controle

$$u(k) = K(Mr(k) - x_o)$$

Projeto de Servomecanismos

Definindo a variável de estado aumentada $x_a \in \mathbb{R}^{2n_x}$ como

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ \underbrace{x - x_o}_{e_o} \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\begin{aligned} x_a(k+1) &= \begin{bmatrix} (A - BK) & BK \\ 0 & (A - LC) \end{bmatrix} x_a(k) + \begin{bmatrix} BKM \\ 0 \end{bmatrix} r(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} C - DK & DK \end{bmatrix} x_a(k) + DKMr(k) \end{aligned}$$

A equação característica do sistema em malha fechada é

$$\det(zI - (A - BK))\det(zI - (A - LC)) = 0$$

Ou seja, os seus polos são determinados através de K como se os estados estivessem disponíveis e através da escolha do ganho L.

Projeto de Servomecanismos

Além disso a função de transferência em malha fechada é dada por

$$F(z) = \begin{bmatrix} C - DK & DK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - (A - BK))^{-1} & ? \\ 0 & (sI - (A - LC))^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BKM \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ DKM$$

$$= (C - DK)(zI - (A - BK))^{-1} BKM + DKM$$

que é exatamente a função de transferência em malha fechada obtida para o caso em que o estado está disponível. A interrogação ? indica que o termo não é relevante na análise.

Estas observações decorrem o chamado **Teorema da Separação**.

Teorema da Separação

O projeto do observador para a obtenção de L e do controlador para a obtenção de K e M podem ser feitos de forma separada e independente.

Projeto de Servomecanismos

Uma vez determinados K, $M(z)$ e L é importante verificar como a estrutura de controle pode ser implementada. Lembrando que

$$\hat{u}(z) = KM(z)\hat{r}(z) - K\hat{x}_o$$

definimos o escalar $h(z) = KM(z)$ e, aplicando a transformada de Laplace na equação do observador para $x_o(0) = 0$, temos

$$K\hat{x}_o = C_u(z)\hat{u} + C_y(z)\hat{y}$$

sendo

$$\begin{aligned} C_u(z) &= K(zI - (A - LC))^{-1}B \\ C_y(z) &= K(zI - (A - LC))^{-1}L \end{aligned}$$

Projeto de Servomecanismos

- A figura a seguir mostra o esquema final a ser implementado.