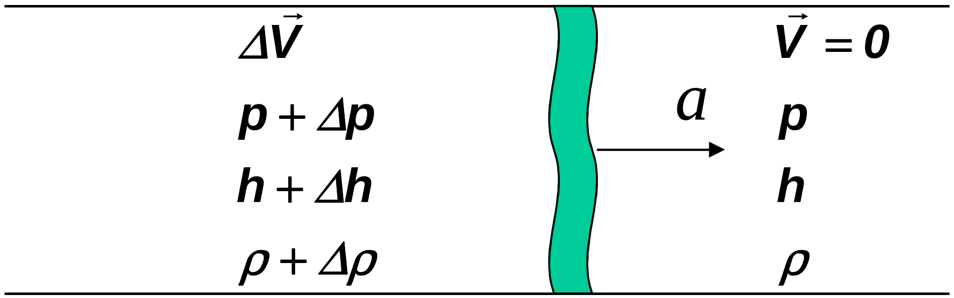
Escoamentos compressíveis

• Velocidade do som e número de Mach



$a =$ velocidade do som

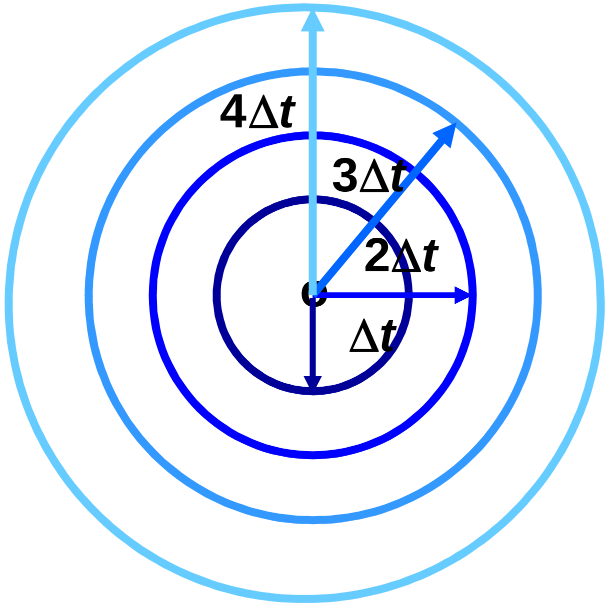
Conservação da massa: $$\rho A a = (\rho + \Delta\rho) A (a - \Delta V)$$

Conservação da QDM: $$PA - (P + \Delta P) A = (\rho A a)(a - \Delta V - a)$$

Segunda lei, processo isentrópico:

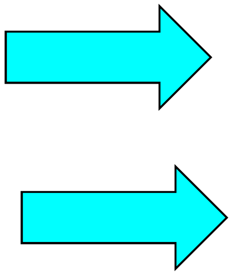
Combinando as três equações: $$a^2 = \lim_{\Delta \to 0} \left(\frac{\Delta p}{\Delta \rho} \right)_s$$ **ou:** $$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}$$

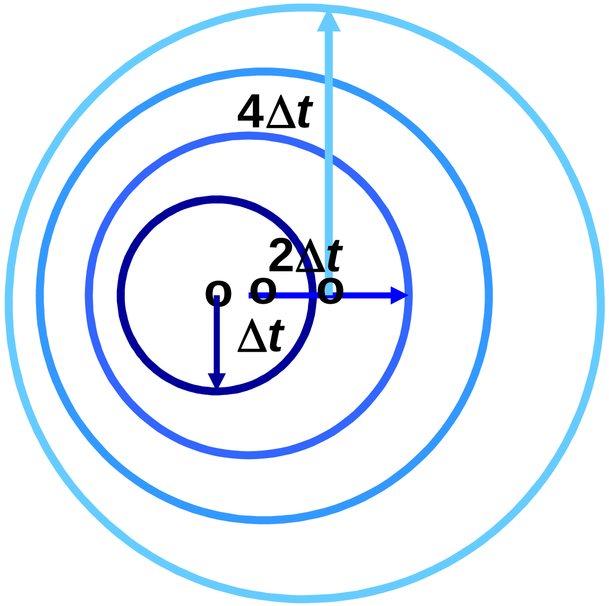
Propagação de uma onde elástica num gás



em repouso

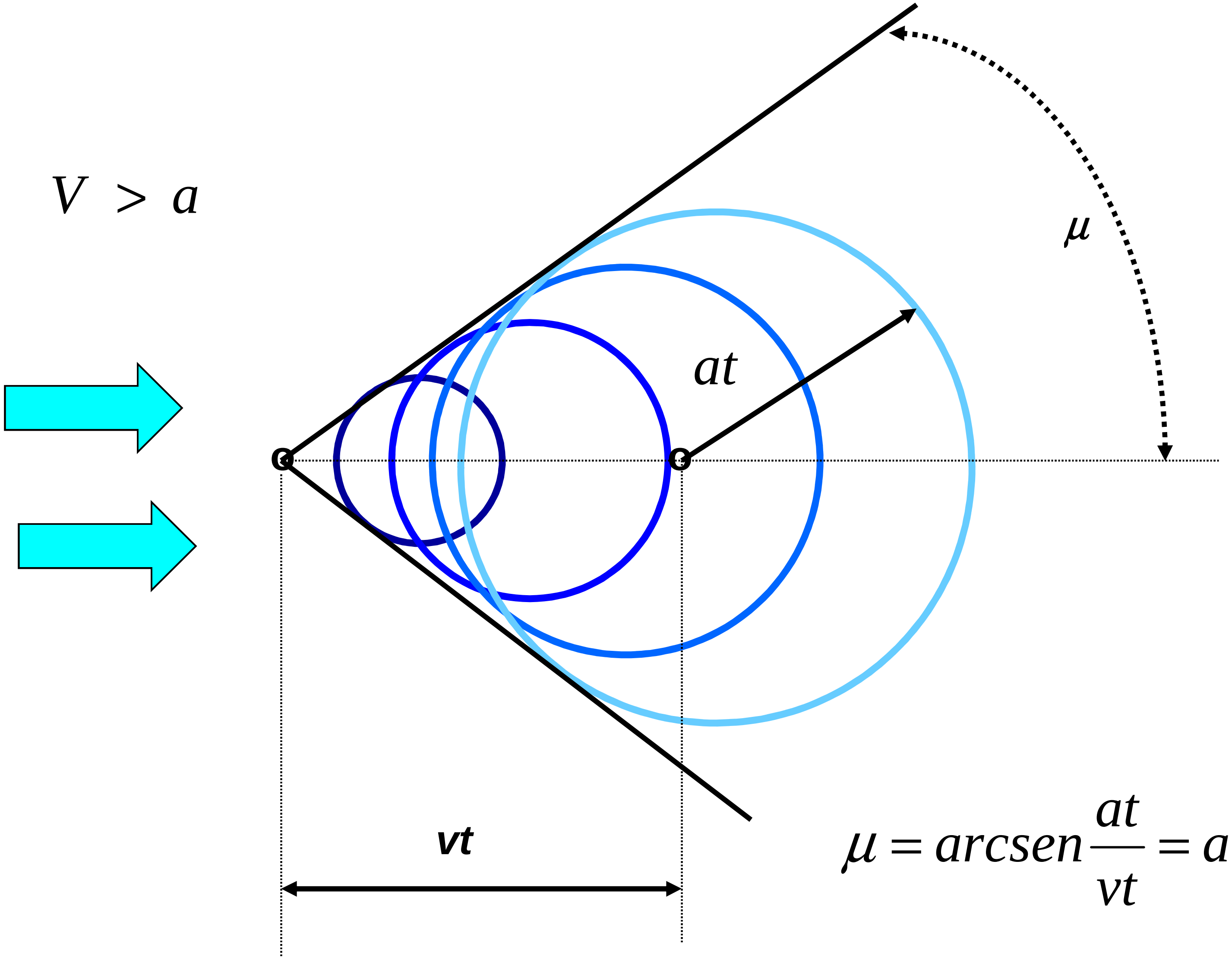
$V < a$





em movimento

Propagação de uma onde elástica num gás : cone de Mach



$$\mu = arcsen\frac{at}{vt} = arcsen\frac{1}{M}$$

Equações para gases ideais

Entalpia:

$$\Delta h = \int c_p dT = \bar{c}_p T$$

Entalpia de estagnação:

$$h_0 = \bar{c}_p T_0 = \bar{c}_p T + \frac{V^2}{2}$$

Temperatura de estagnação:

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2\bar{c}_p}$$

Pressão de estagnação:

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{k/(k-1)} \qquad k = \frac{c_p}{c_v}$$

Variação da densidade na estagnação:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/(k-1)} \qquad \rho = \frac{1}{v}$$

- **Propriedades na estagnação**

Entalpia: $h = u + pv$

Entalpia de estagnação: $h_0 = h + \dfrac{V^2}{2}$

Escoamento num duto adiabático : conservação da energia

h_1

V_1

h_{01}

h_2

V_2

h_{02}

$$h_1 + \frac{V_1^{\,2}}{2} = h_2 + \frac{V_2^{\,2}}{2}$$

$$h_{01} = h_{02}$$

Velocidade do som em gases ideais

Equação de estado: $\frac{p}{\rho} = RT$ **Processo isentrópico:** $p = \frac{p_1}{\rho_1^{\,k}} \rho^k$

Efetuando a derivada indicada:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \left(\frac{p_1}{\rho_1^{\,k}}\right) k \rho^{(k-1)} \frac{\rho}{\rho} = k \frac{p}{\rho}$$

Obtém-se uma expressão para o cálculo da velocidade do som num gás ideal

$$a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}$$

Número de Mach

$$M = \frac{V}{a}$$

$M > 1$ *escoamento supersônico*

$M = 1$ *sônico*

$M < 1$ *escoamento subsônico*

Relações para escoamento isentrópico de gases ideais

Levando em conta as expressões:

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} \qquad c_p = \frac{kR}{(k-1)} \qquad \vec{c}^{\,2} = kRT \qquad M = \frac{\vec{V}}{\vec{c}}$$

Obtêm-se:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2$$

Lembrando as equações para processos isentrópicos, se chega em:

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{(k-1)}{2} M^2\right]^{k/(k-1)}$$

As propriedades do fluído na garganta do bocal, ponto em que é atingido M=1, são chamadas *propriedades críticas,* fazendo M=1 e invertendo as relações anteriores:

$$\boxed{\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1}} \qquad \boxed{\frac{p^*}{p_0} = \left[\frac{2}{k+1}\right]^{k/(k-1)}} \qquad \boxed{\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left[\frac{2}{k+1}\right]^{1/(k-1)}}$$

• Escoamento isentrópico unidimensional

Variação da velocidade do fluído com a seção da tubulação

Conservação da massa, num escoamento em regime permanente:

$$\rho AV = vaz\tilde{a}o$$

Diferenciando em relação às três variáveis e dividindo pela vazão:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0$$

Conservação da energia num escoamento isentrópico

Em regime permanente:

$$h + \frac{V^2}{2} = cons\tan te$$

Diferenciando: $dh + VdV = 0$

Como já visto: $dh = \frac{dP}{\rho}$

Combinando as duas últimas equações: $\frac{dP}{\rho} + VdV = 0$

Ou: $\rho V = -\frac{dp}{dV}$

Substituindo na equação diferencial de conservação da massa:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho}\left(\frac{1}{V^2} - \frac{d\rho}{dp}\right)$$

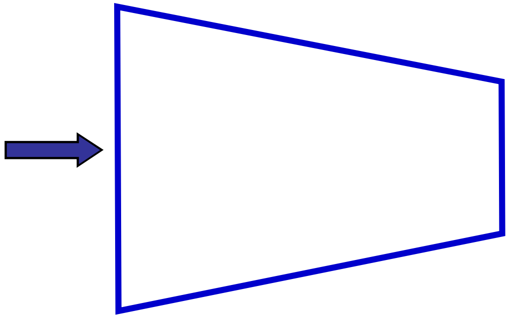
Ou:

$$\boxed{\frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V}\left(1 - M^2\right)}$$

Variação da velocidade do fluído com a seção da tubulação

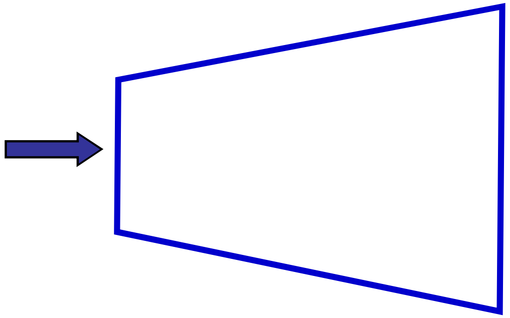
$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\vec{V}}{\vec{V}}\left(1 - M^2\right)$$

Para escoamento subsônico M < 1



$$\left(1 - M^2\right) > 0$$

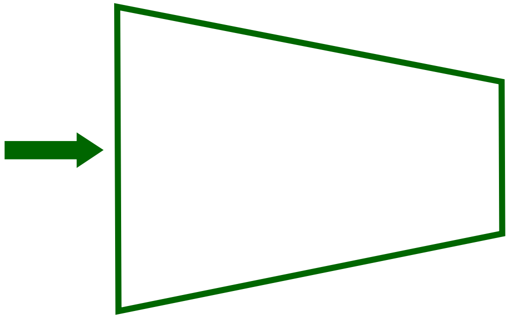
$$A \downarrow \; d\vec{V} > 0$$



$$\left(1 - M^2\right) > 0$$

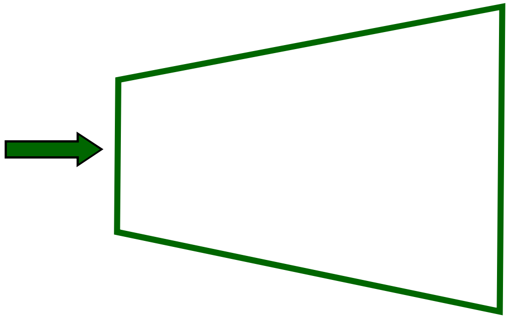
$$A \uparrow \; d\vec{V} < 0$$

Para escoamento supersônico M > 1



$$\left(1 - M^2\right) < 0$$

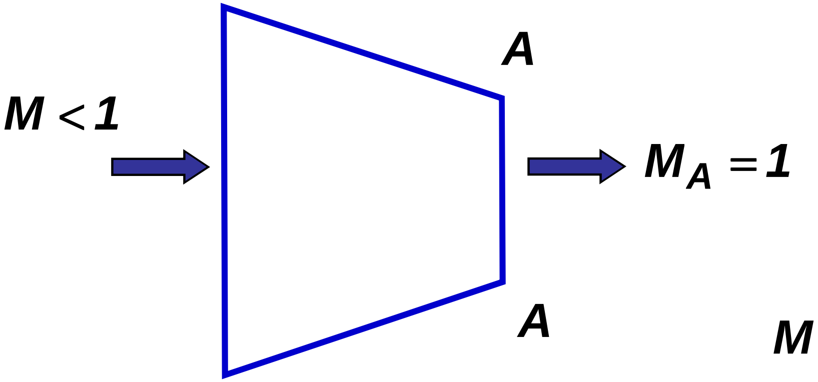
$$A \downarrow \; d\vec{V} < 0$$



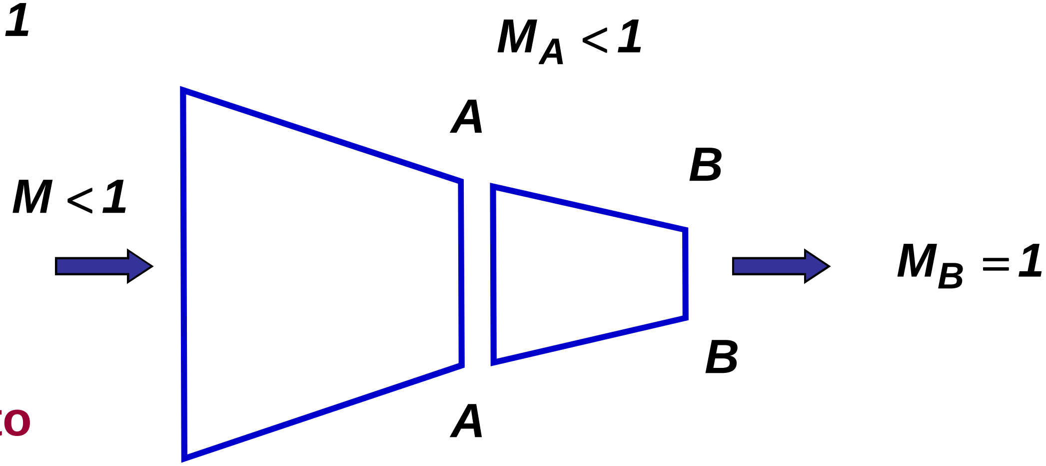
$$\left(1 - M^2\right) < 0$$

$$A \uparrow \; d\vec{V} > 0$$

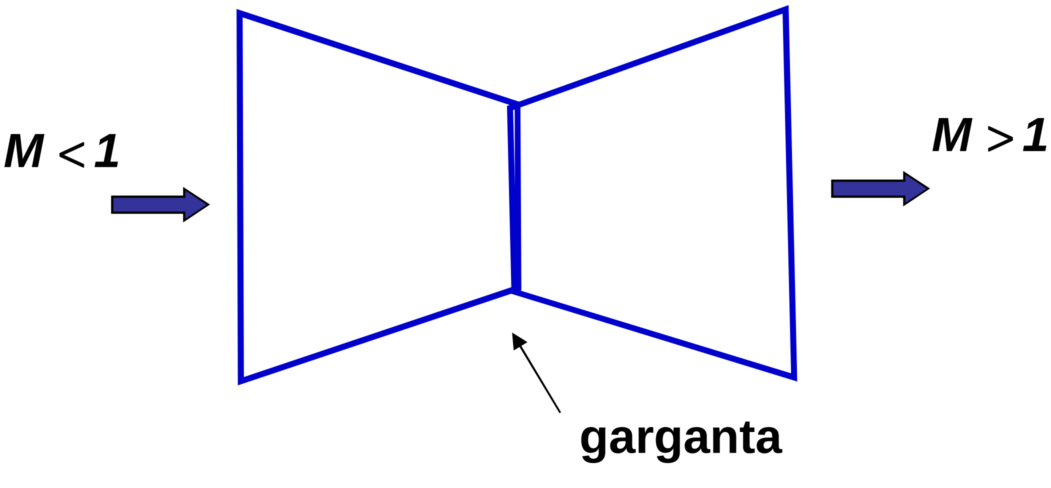
Caso em que M=1 é atingido no final do duto:



Prolongando o duto, acontece:



A solução para continuar acelerando o fluído é fazer um duto convergente - divergente:



Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
0,0	1,0	1,0	1,0	∞
0,02	0,9997	0,9998	0,9999	28,9421
0,04	0,9989	0,9992	0,9997	14,4815
0,06	0,9975	0,9982	0,9993	9,6659
0,08	0,9955	0,9968	0,9987	7,2616
0,1	0,9930	0,9950	0.9980	5,8218
0,12	0,9900	0,9928	0,9971	4.8643
0,14	0,9864	0,9903	0,9961	4,1824
0,16	0,9823	0,9873	0,9949	3,6727
0,18	0,9776	0,9840	0,9936	3,2779
0,2	0,9725	0,9803	0.9921	2,9635
0,22	0.9668	0,9762	0.9904	2,7076
0,24	0,9607	0,9718	0,9886	2,4956
0,26	0.9541	0,9670	0,9867	2,3173
0,28	0,9470	0,9619	0,9846	2,1656
0,3	0,9395	0,9564	0,9823	2,0351
0,32	0,9315	0,9506	0,9799	1,9219
0,34	0,9231	0,9445	0,9774	1,8229
0,36	0,9143	0,9380	0,9747	1,7358
0,38	0,9052	0,9313	0.9719	1,6587
0,4	0,8956	0,9243	0,9690	1,5901
0,42	0,8857	0,9170	0,9659	1,5289
0,44	0,8755	0.9094	0,9627	1,4740
0,46	0,8650	0,9016	0,9594	1,4246
0,48	0,8541	0,8935	0,9559	1.3801
0,5	0,8430	0,8852	0,9524	1,3398
0,52	0,8317	0,8766	0,9487	1,3034
0,54	0,8201	0,8679	0,9449	1,2703
0,56	0,8082	0,8589	0,9410	1,2403
0,58	0,7962	0,8498	0,9370	1,2130
0,6	0,7840	0.8405	0,9328	1.1882

Questão

Um reservatório contém ar a 10^6 Pa e o descarrega isentropicamente em um ambiente a 10^5 Pa. Qual é o número de Mach na saída?

Questão

Dadas as medições de pressão e temperatura de estagnação e de pressão estática da figura, calcule a velocidade do ar V admitindo: (a) escoamento incompressível; (b) escoamento compressível