Escoamentos compressíveis

Resumo

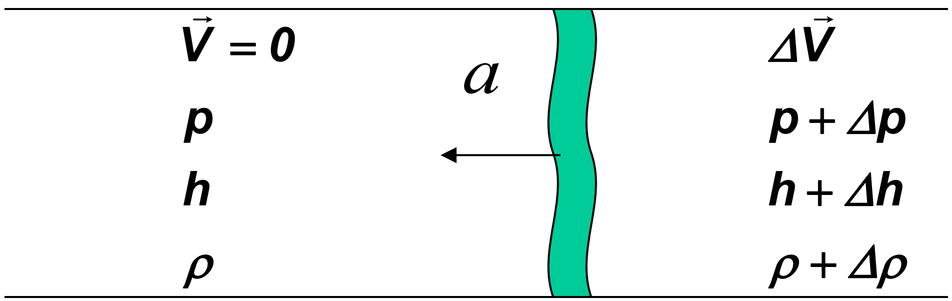
Grupos adimensionais

- $M = \frac{V}{a}$
- $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$
- $Re = \frac{\rho U L}{\mu}$

Escoamento compressível

- Esc. Incomp. Subsônico => $M = \frac{V}{a} \leq 0.3$
- Esc. Comp. Subsônico => $0.3 < M = \frac{V}{a} < 1$
- Esc. Sônico => $M = 1$
- Esc. Comp. Supersônico => $M = \frac{V}{a} > 1$

• Velocidade do som e número de Mach



$a =$ velocidade do som

Conservação da massa: $\rho A a = (\rho + \Delta\rho) A (a - \Delta V)$

Conservação da QDM: $PA - (P + \Delta P) A = (\rho A a)(a - \Delta V - a)$

Segunda lei, processo isentrópico:

Combinando as três equações: $a^2 = \lim_{\Delta \to 0} \left(\frac{\Delta p}{\Delta \rho} \right)_s$ **ou:** $a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}$

Velocidade do som em gases ideais

Equação de estado: $\frac{p}{\rho} = RT$ **Processo isentrópico:** $p = \frac{p_1}{\rho_1^{k}} \rho^{k}$

Efetuando a derivada indicada:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \left(\frac{p_1}{\rho_1^{k}}\right) k \rho^{(k-1)} \frac{\rho}{\rho} = k \frac{p}{\rho}$$

Obtém-se uma expressão para o cálculo da velocidade do som num gás ideal

$$a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}$$

Número de Mach

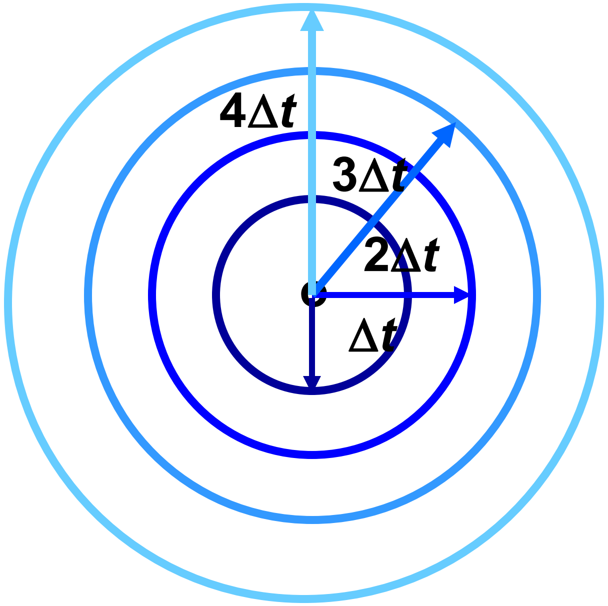
$$M = \frac{V}{a}$$

$M > 1$ escoamento supersônico

$M = 1$ sônico

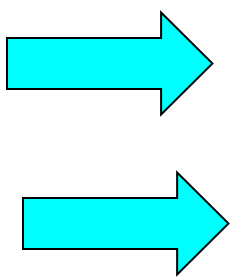
$M < 1$ escoamento subsônico

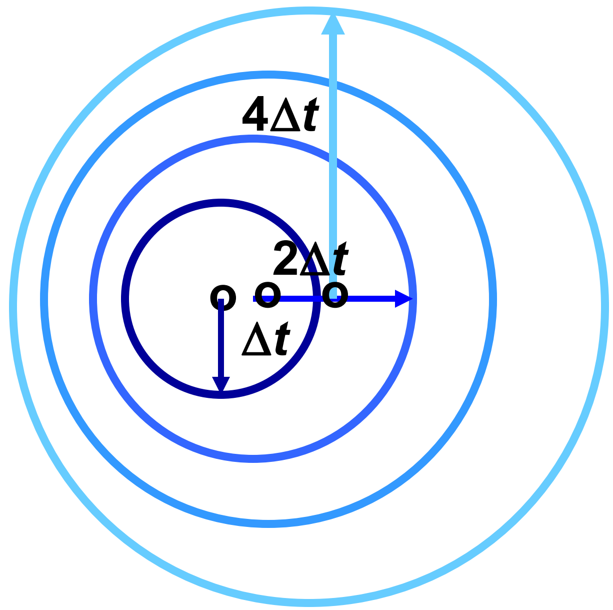
Propagação de uma onde elástica num gás



em repouso

$V < a$

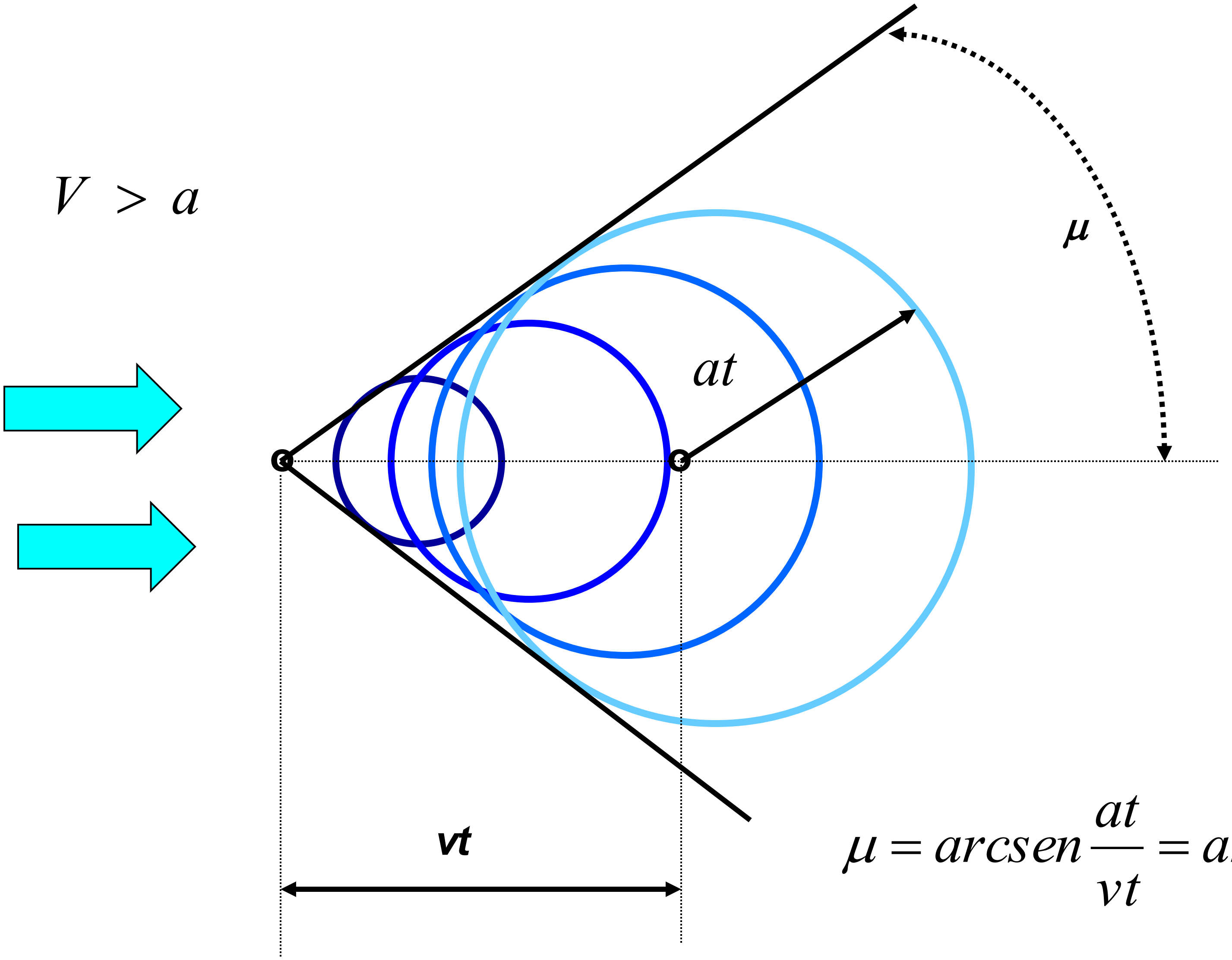




em movimento

Propagação de uma onde elástica num gás : cone de Mach

$V > a$



$$\mu = arcsen\frac{at}{vt} = arcsen\frac{1}{M}$$

Eqs. p/ s=cte, RP e gás perf.

- Continuidade $$\rho_2 V_2 A_2 = \rho_1 V_1 A_1$$
- Eq. s=cte $$\frac{P_2}{\rho_2^\gamma} = \frac{P_1}{\rho_1^\gamma}$$
- Eq. Energia $$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2}$$

$$\frac{a_2^2}{\gamma - 1} + \frac{V_2^2}{2} = \frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{V_1^2}{2}$$

- Eq. Estado $$P = \rho R T$$

Estado de Estagnação

-> Fluido trazido adiabaticamente até o repouso (V=0)

-> Índice "t" ou "0"

-> Estado de referência

Entalpia de estagnação: $$h_0 = c_p T_0 = c_p T + \frac{V^2}{2}$$

Temperatura de estagnação: $$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)}$$

$$a = \sqrt{\gamma R T}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2$$

Estado de Estagnação

Temperatura de estagnação: $$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2$$

Velocidade do som na estagnação: $$a \sim T^{1/2} \longrightarrow \frac{a_0}{a} = \left[1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2\right]^{1/2}$$

-> E, se além disso o processo for isentrópico:

Pressão de estagnação: $$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \longrightarrow \frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2\right]^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Variação da densidade na estagnação: $$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/(\gamma-1)} \longrightarrow \frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2\right]^{1/(\gamma-1)}$$

- **Propriedades na estagnação**

Entalpia: $h = u + pv$

Entalpia de estagnação: $h_0 = h + \dfrac{V^2}{2}$

Escoamento num duto adiabático : conservação da energia

h_1
V_1
h_{01}

h_2
V_2
h_{02}

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

$$h_{01} = h_{02}$$

$$T_{01} = T_{02}$$

Escoamento isentrópico: relações isentrópicas

$$P_{01} = P_{02}$$

Estado Crítico

-> Condições de escoamento sônico (M=1)

-> Índice *

-> Estado de referência

Temperatura crítica:

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1}$$

Velocidade do som
Nas cond. críticas:

$$\frac{a_*}{a_0} = \left[\frac{2}{(\gamma + 1)}\right]^{1/2}$$

-> E, se além disso o processo for isentrópico:

Pressão crítica:

$$\frac{p_*}{p_0} = \left[\frac{2}{\gamma + 1}\right]^{\gamma/(\gamma - 1)}$$

Variação da densidade
crítica:

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left[\frac{2}{\gamma + 1}\right]^{1/(\gamma - 1)}$$

• Escoamento isentrópico unidimensional

Variação da velocidade do fluído com a seção da tubulação

Conservação da massa, num escoamento em regime permanente:

$$\rho A V = vaz\tilde{a}o$$

Diferenciando em relação à x e dividindo pela vazão:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Vel. som $a^2 = \dfrac{\partial P}{\partial \rho}$

QDM1-D isentrópico: $$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Substituindo na equação diferencial de conservação da massa:

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dx} = \frac{P}{\rho}\frac{dP}{dx}\left(\frac{1}{V^2} - \frac{d\rho}{dp}\right)$$

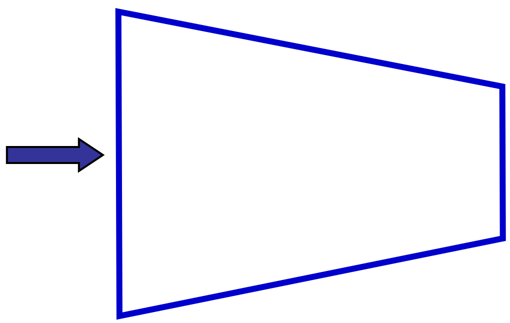
Ou:

$$\boxed{\frac{1}{A}\frac{dA}{dx} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dx}\left(1 - M^2\right)}$$

Variação da velocidade do fluído com a seção da tubulação

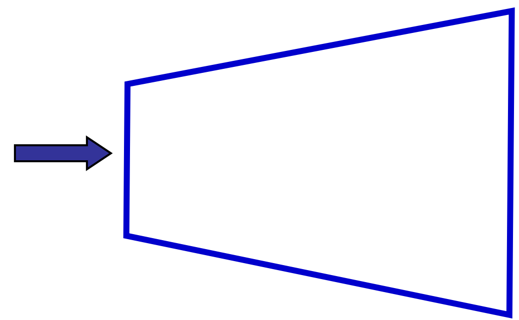
$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dx} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dx}\left(1 - M^2\right)$$

Para escoamento subsônico M < 1



$(1 - M^2) > 0$

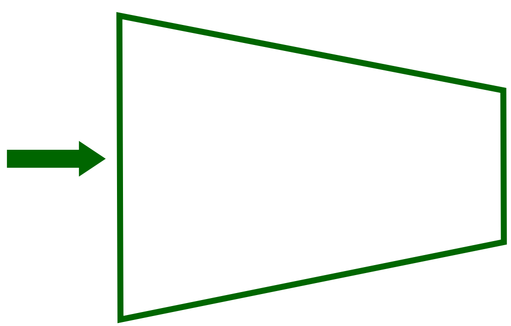
$A \downarrow \; dV > 0$



$(1 - M^2) > 0$

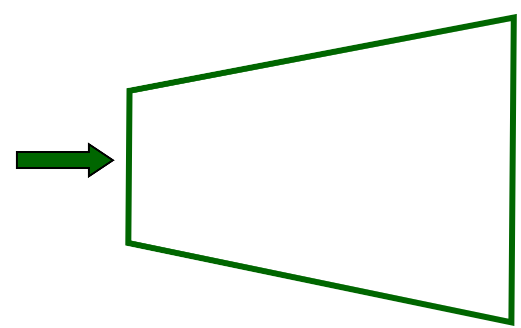
$A \uparrow \; dV < 0$

Para escoamento supersônico M > 1



$(1 - M^2) < 0$

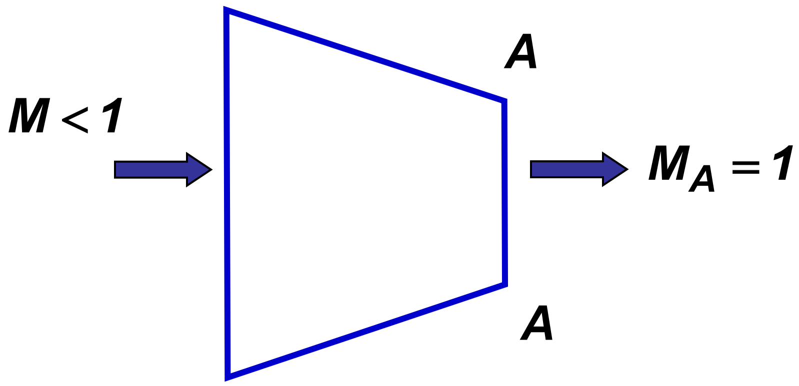
$A \downarrow \; dV < 0$



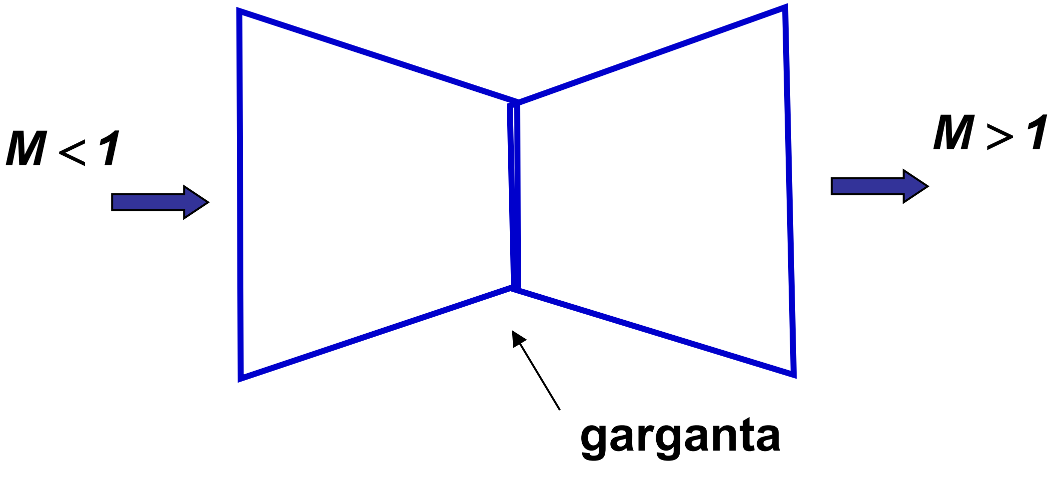
$(1 - M^2) < 0$

$A \uparrow \; dV > 0$

Caso em que M=1 é atingido no final do duto:



A solução para continuar acelerando o fluído é fazer um duto convergente - divergente:



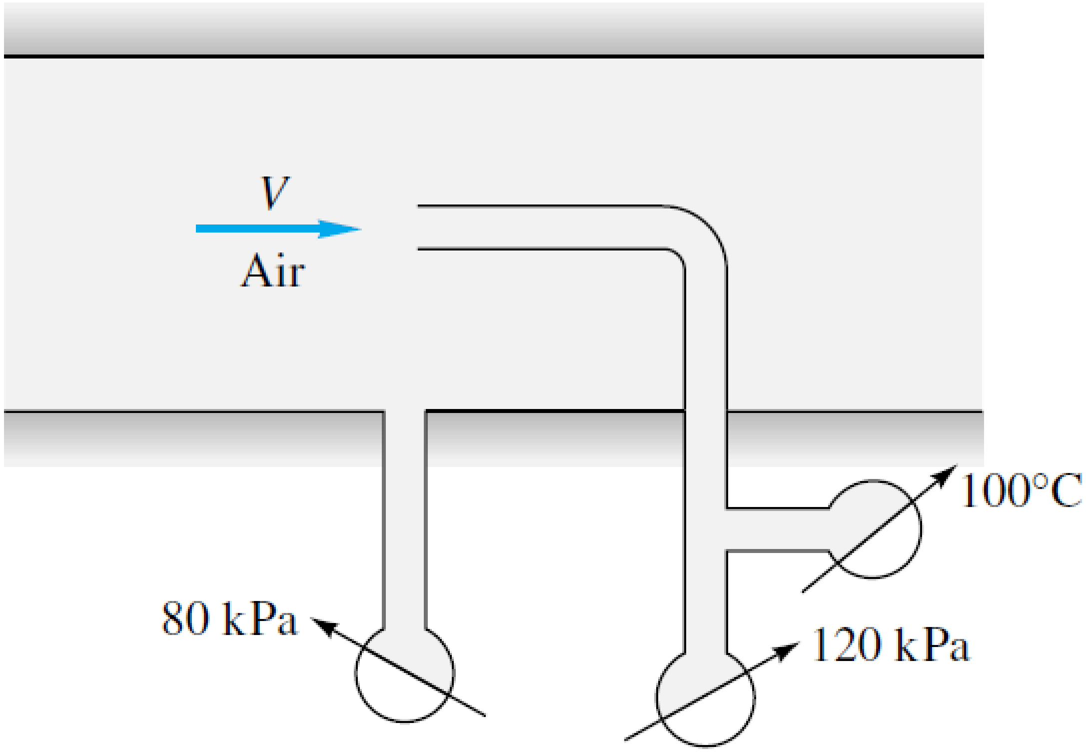
Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
0,0	1,0	1,0	1,0	∞
0,02	0,9997	0,9998	0,9999	28,9421
0,04	0,9989	0,9992	0,9997	14,4815
0,06	0,9975	0,9982	0,9993	9,6659
0,08	0,9955	0,9968	0,9987	7,2616
0,1	0,9930	0,9950	0.9980	5,8218
0,12	0,9900	0,9928	0,9971	4.8643
0,14	0,9864	0,9903	0,9961	4,1824
0,16	0,9823	0,9873	0,9949	3,6727
0,18	0,9776	0,9840	0,9936	3,2779
0,2	0,9725	0,9803	0.9921	2,9635
0,22	0.9668	0,9762	0.9904	2,7076
0,24	0,9607	0,9718	0,9886	2,4956
0,26	0.9541	0,9670	0,9867	2,3173
0,28	0,9470	0,9619	0.9846	2,1656
0,3	0,9395	0,9564	0,9823	2,0351
0,32	0,9315	0,9506	0,9799	1,9219
0,34	0,9231	0.9445	0,9774	1,8229
0,36	0,9143	0,9380	0,9747	1,7358
0,38	0,9052	0,9313	0,9719	1,6587
0,4	0,8956	0,9243	0,9690	1,5901
0,42	0,8857	0,9170	0,9659	1,5289
0,44	0,8755	0.9094	0,9627	1,4740
0,46	0,8650	0,9016	0,9594	1,4246
0,48	0.8541	0,8935	0,9559	1,3801
0,5	0,8430	0,8852	0,9524	1,3398
0,52	0,8317	0,8766	0,9487	1,3034
0,54	0,8201	0,8679	0,9449	1,2703
0,56	0,8082	0,8589	0,9410	1,2403
0,58	0,7962	0,8498	0,9370	1,2130
0,6	0,7840	0,8405	0,9328	1,1882

Questão

Um reservatório contém ar a 10^6 Pa e o descarrega isentropicamente em um ambiente a 10^5 Pa. Qual é o número de Mach na saída?

Questão

Dadas as medições de pressão e temperatura de estagnação e de pressão estática da figura, calcule a velocidade do ar V admitindo: (a) escoamento incompressível; (b) escoamento compressível



Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	∞
0.10	0.9930	0.9950	0.9980	5.8218
0.20	0.9725	0.9803	0.9921	2.9635
0.30	0.9395	0.9564	0.9823	2.0351
0.40	0.8956	0.9243	0.9690	1.5901
0.50	0.8430	0.8852	0.9524	1.3398
0.60	0.7840	0.8405	0.9328	1.1882
0.70	0.7209	0.7916	0.9107	1.0944
0.80	0.6560	0.7400	0.8865	1.0382
0.90	0.5913	0.6870	0.8606	1.0089
1.00	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000
1.10	0.4684	0.5817	0.8052	1.0079
1.20	0.4124	0.5311	0.7764	1.0304
1.30	0.3609	0.4829	0.7474	1.0663
1.40	0.3142	0.4374	0.7184	1.1149
1.50	0.2724	0.3950	0.6897	1.1762
1.60	0.2353	0.3557	0.6614	1.2502
1.70	0.2026	0.3197	0.6337	1.3376
1.80	0.1740	0.2868	0.6068	1.4390
1.90	0.1492	0.2570	0.5807	1.5553
2.00	0.1278	0.2300	0.5556	1.6875

Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
2.10	0.1094	0.2058	0.5313	1.8369
2.20	0.0935	0.1841	0.5081	2.0050
2.30	0.0800	0.1646	0.4859	2.1931
2.40	0.0684	0.1472	0.4647	2.4031
2.50	0.0585	0.1317	0.4444	2.6367
2.60	0.0501	0.1179	0.4252	2.8960
2.70	0.0430	0.1056	0.4068	3.1830
2.80	0.0368	0.0946	0.3894	3.5001
2.90	0.0317	0.0849	0.3729	3.8498
3.00	0.0272	0.0762	0.3571	4.2346
3.10	0.0234	0.0685	0.3422	4.6573
3.20	0.0202	0.0617	0.3281	5.1210
3.30	0.0175	0.0555	0.3147	5.6286
3.40	0.0151	0.0501	0.3019	6.1837
3.50	0.0131	0.0452	0.2899	6.7896
3.60	0.0114	0.0409	0.2784	7.4501
3.70	0.0099	0.0370	0.2675	8.1691
3.80	0.0086	0.0335	0.2572	8.9506
3.90	0.0075	0.0304	0.2474	9.7990
4.00	0.0066	0.0277	0.2381	10.7188