CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE

CONDUÇÃO TRANSIENTE

- A temperatura varia no espaço e no tempo.
- A equação representa um balanço de energia num volume ‘infinitesimal’.
- O terceiro termo representa uma geração volumétrica de calor (reação química, elétrico ou de outras fontes)

$$\dot{Q}_{gen} = \frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, e\, d\forall + fluxo\, de\, calor$$

$$\dot{q}'''\Delta x \Delta y \Delta z = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t}\Delta x \Delta y \Delta z + \nabla . \vec{\dot{q}}''\Delta x \Delta y \Delta z$$

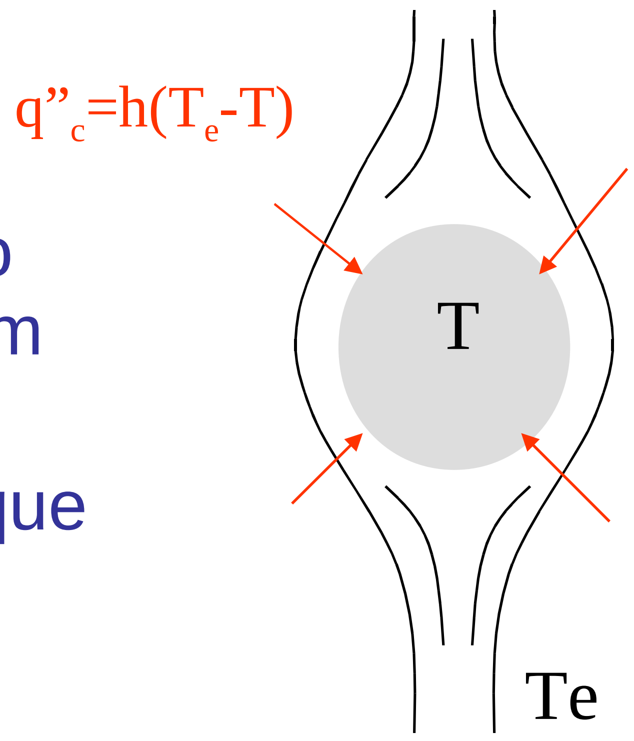
$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \dot{q}'''$$

- A obtenção do campo de temperaturas através da solução analítica ou numérica destas equações geralmente tem um custo elevado. Vamos estudar técnicas aproximadas

Método Concentrado

- O corpo possui uma temperatura uniforme em TODOS os instantes.
- Sem geração de calor, o balanço de energia é:

$$\rho C \forall \frac{\partial T}{\partial t} = h A (T_e - T)$$



- O calor transferido por convecção para o corpo sólido é difundido por condução em seu interior.
- O processo de condução é mais eficaz que o de convecção de maneira que a temperatura do corpo sólido é uniforme!

Solução da E.D.O.

$$\rho C\forall \frac{dT}{dt} = hA\left(T_e - T\right)$$

- No tempo t = 0, a temperatura do corpo está a T_0
- Transformação $\theta = (T-T_e)$ $\longrightarrow$ $\theta(0) = (T_0-T_e) = \theta_0$

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA}{\rho C\forall} \cdot dt \rightarrow Ln\left(\frac{\theta}{\theta_o}\right) = -\frac{hA}{\rho C\forall} \cdot t$$

- ou em termos das temperaturas

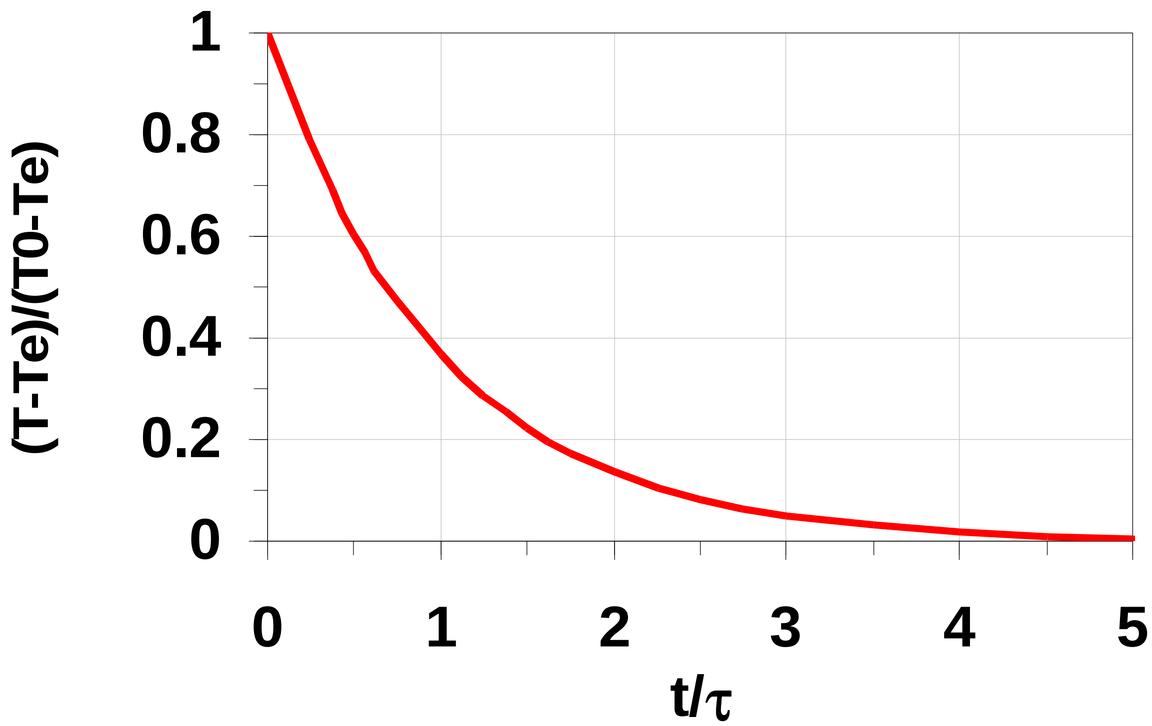
$$\left(\frac{T - T_e}{T_0 - T_e}\right) = e^{-t/\tau} \quad \text{onde} \qquad \tau = \left(\frac{\rho C\forall}{hA}\right)$$

A Constante de Tempo, τ

- A constante de tempo é um parâmetro do sistema que define uma escala de tempo.

$$\tau = \left(\frac{\rho C \forall}{hA} \right)$$

- Se $\tau \gg 1$, o corpo apresenta uma variação ‘lenta’
- Se $\tau \ll 1$, o corpo apresenta uma variação ‘rápida’



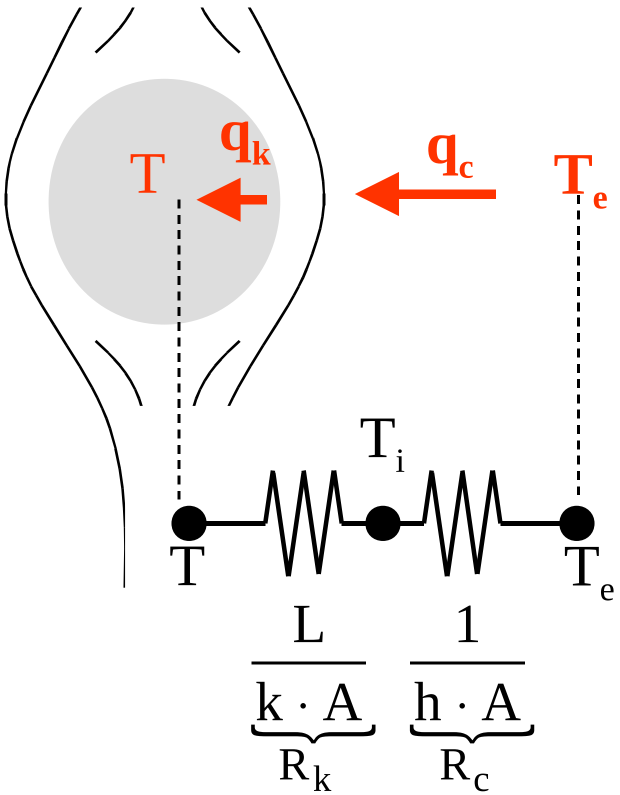
$t = 1\tau \rightarrow 0.36$

$t = 2\tau \rightarrow 0.13$

$t = 3\tau \rightarrow 0.05$

Quando é Válido Aplicar Mod. Concentrado?

- O modelo só é válido quando a temperatura no interior do corpo varia de forme uniforme. Há dois mecanismos de transferência de calor: convecção e condução envolvidos. Vamos analisá-los:



- A temperatura é uniforme quando $R_k << R_c$ ou

$$\mathbf{Bi = \frac{R_k}{R_c} = \frac{hL}{k} << 1}$$

- Biot, Bi compara as resistências interna e externa ao corpo sólido. L é uma dimensão caract. do corpo.
- <u>*Método Concentrado é válido quando Bi << 1*</u>

Taxa Transf. Calor Modelo Concentrado

- A taxa de transferência de calor, em qualquer instante de tempo, é determinada por:

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{hA} \cdot \left(\mathbf{T_e} - \mathbf{T}\right) \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{hA} \cdot \left(\mathbf{T_0} - \mathbf{T_e}\right) \mathbf{e}^{-\left(\mathbf{t}/\tau\right)}$$

- O calor total transferido do ou para o corpo sólido é obtido integrando a taxa de calor:

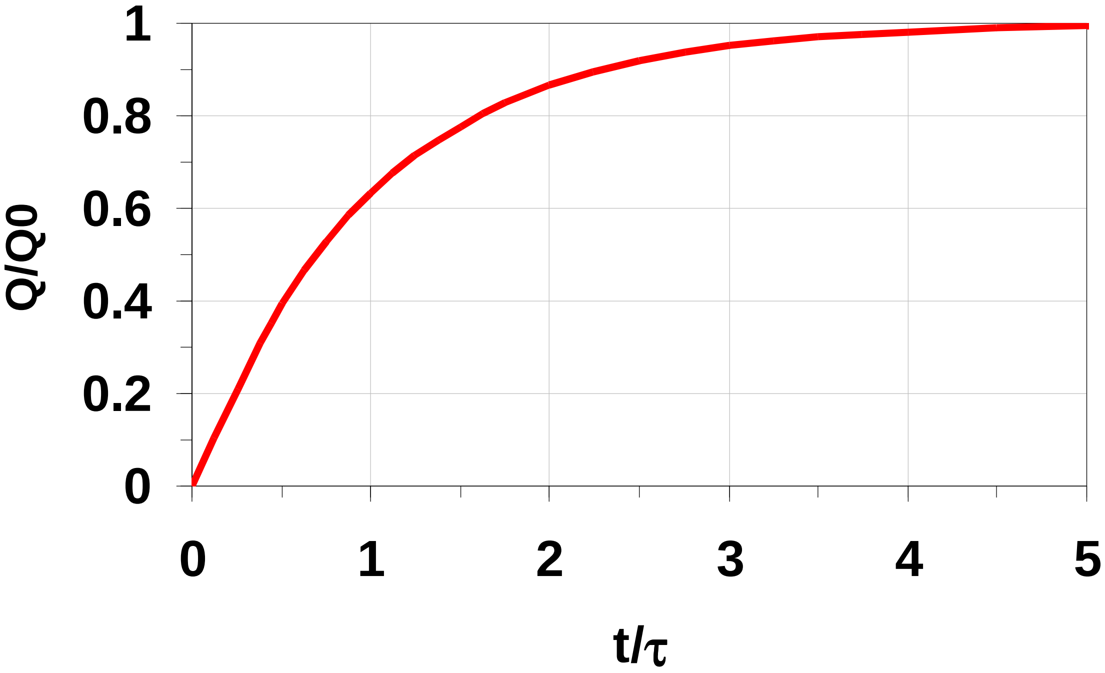
$$Q = \rho\, C\, \forall\, \left(T_e - T_0\right)\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

- Note que para t = 0, Q =0, como deveria ser!

Máximo Calor Transferido

- O calor total transferido do ou para o corpo sólido é obtido integrando a taxa de calor:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - e^{-(t/\tau)} \qquad Q_0 = \rho\, C\, \forall\, (T_e - T_0)$$



$t = 1\tau \rightarrow 0.64$

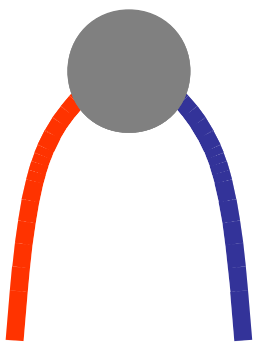
$t = 2\tau \rightarrow 0.87$

$t = 3\tau \rightarrow 0.95$

- O máximo calor que pode ser transferido, Q_0, é quando o corpo é aquecido da temp. inicial a Te.

- **8-30** O termopar é um sensor de temperatura formado pela fusão de dois metais não similares na forma esférica. Considere um processo onde haja uma variação em degrau de temperatura de 100ºC para 200ºC. Determine a curva de resposta do termopar para as características definidas na figura.

D = 0,5 mm



$k = 23$ W/mºC

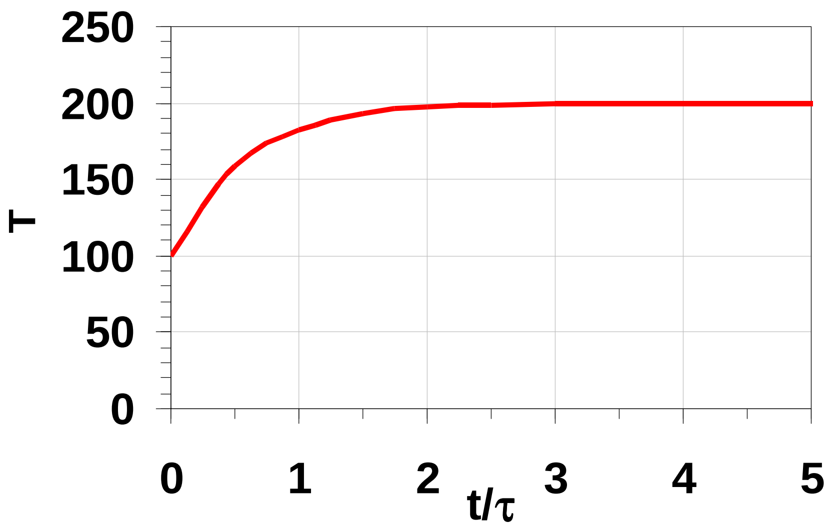
$\rho = 8920$ kg/m³

$C = 384$ J/kgºC

$h = 500$ W/m²ºC

A constante de tempo:

$$\tau = \left(\frac{\rho C \forall}{hA}\right) = \frac{8920 \cdot 384 \cdot \frac{4\pi}{3}\left(\frac{0.005}{2}\right)^3}{500 \cdot 4\pi\left(\frac{0.005}{2}\right)^2} = 0.57s$$



Condução Transiente Bi > 0.1

- Não se considera a temperatura do corpo uniforme para casos com Bi > 0.1. Portanto não se pode utilizar o modelo concentrado, mas considerar a variação no tempo e no espaço da temperatura.

- ➔ Condução bi-dimensional e transiente
- ➔ Corpo inicialmente 0^oC tem a temperatura numa parte da fronteira subitamente alterada para 100^oC.
- ➔ O distúrbio da fronteira se propaga por ‘difusão’ no interior do sólido.

Condução 1D Transiente, Bi > 0,1

- Serão abordados casos transientes e uni-dimensionais. Isto é, a temperatura só varia em uma direção.

➔ Condução uni-dimensional e transiente

➔ Corpo inicialmente 0^oC tem a temperatura numa face subitamente alterada para 100^oC.

➔ O distúrbio da fronteira se propaga por ‘difusão’ no interior do sólido somente ao longo da direção X.

Condução 1D Transiente, Bi > 0,1

- Formulação

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \textbf{onde} \quad \alpha = \frac{k}{\rho C}}$$

- Eq. diferencial parcial de segunda ordem linear Parabólica. Ela tem uma condição inicial e duas condições de contorno em x.

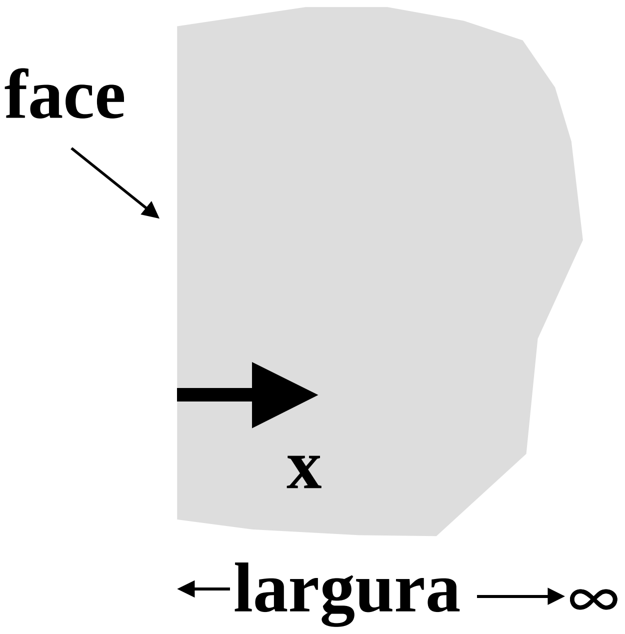
$$\text{C.I.} \rightarrow T(x,0) = T_i$$

$$\text{C.C.} \rightarrow T(0,t) = T_1$$

$$\text{C.C.} \rightarrow T(L,t) = T_2$$

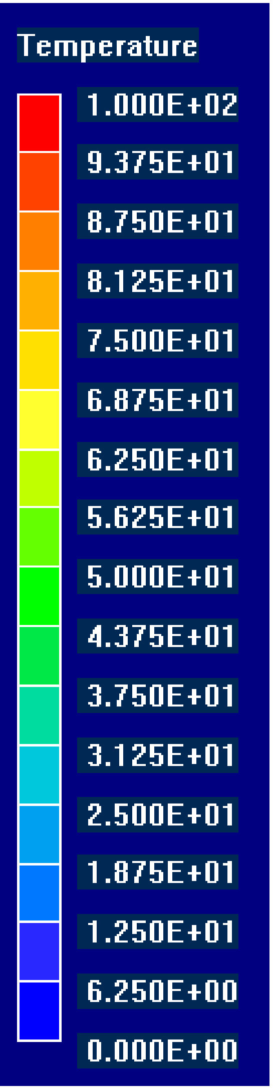
Condução 1D Transiente: Sólido Semi-Infinito

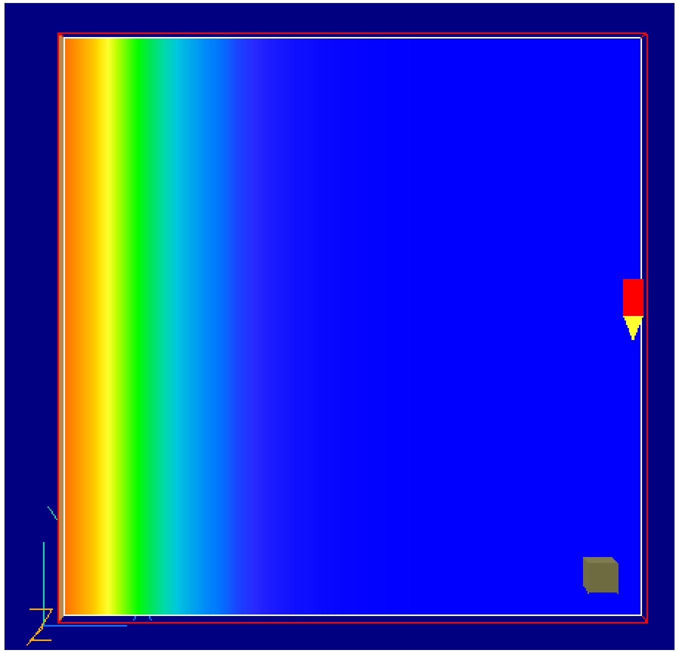
- Um sólido semi-infinito 2D possui uma face e largura infinita. Qualquer distúrbio de temperatura na face NUNCA atingirá a sua outra extremidade.



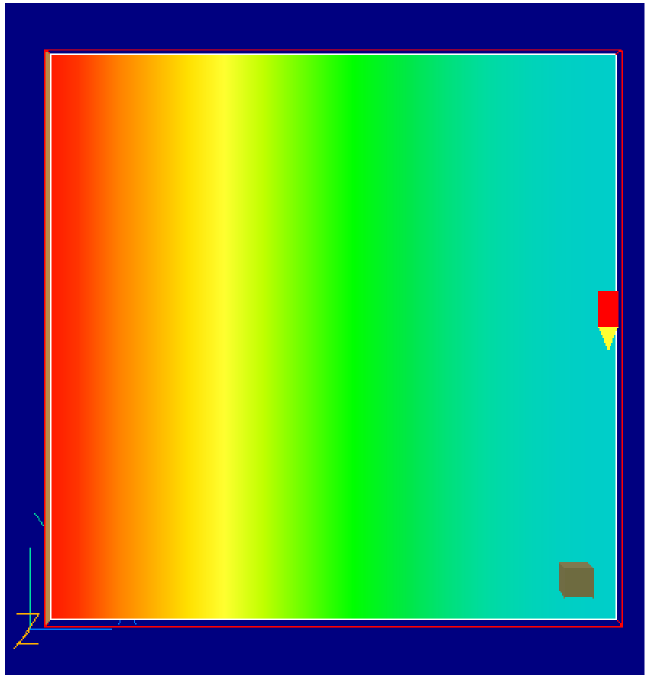
- Qualquer sólido com dimensões ‘finitas’ pode ser ‘aproximado’ como um sólido semi-infinito desde que o distúrbio de temperatura da face não atinja a sua outra fronteira.

Aproximação de Sólido Semi-Inifinito

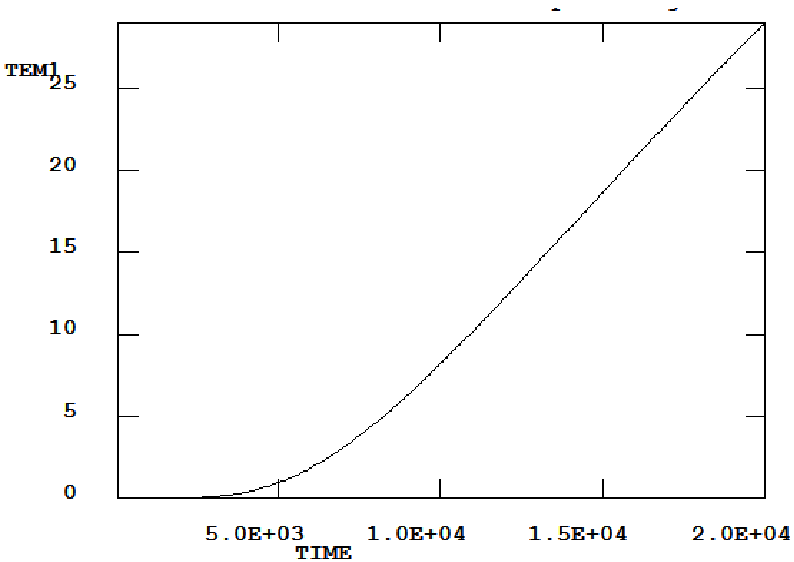




Distúrbio não chegou na outra face



Distúrbio chegou na outra face

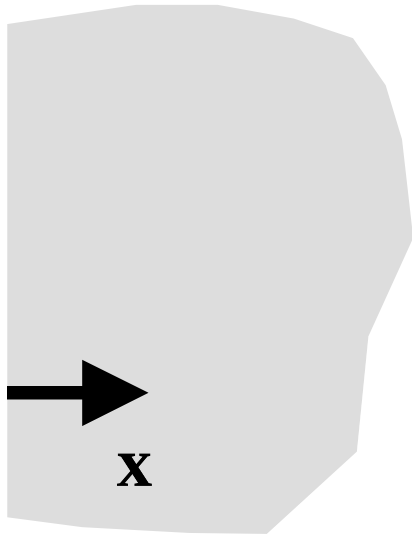


- História da temperatura versus tempo na face oposta.

- Para t < 5000s pode-se dizer que o sólido se comporta como Semi-Infinito.

Solução Sólido Semi-Infinito

- Considere um sólido inicialmente a temperatura T_0. A temperatura em sua face muda, subitamente, para T_1 e o calor começa a ser difundido no interior do sólido.



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

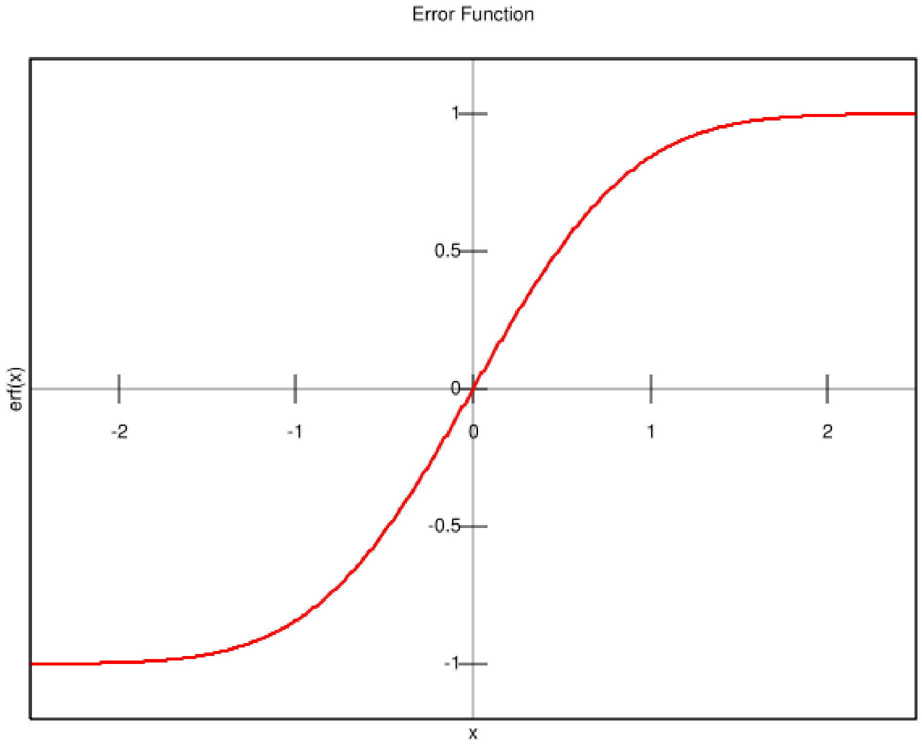
$$\begin{cases} \text{C.I.} \rightarrow T(x,0) = T_0 \\ \text{C.C.} \rightarrow T(0,t) = T_1 \\ \text{C.C.} \rightarrow T(\infty,t) = T_0 \end{cases}$$

$$\frac{T(x,t) - T_1}{T_0 - T_1} = \text{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right]$$

Error Function

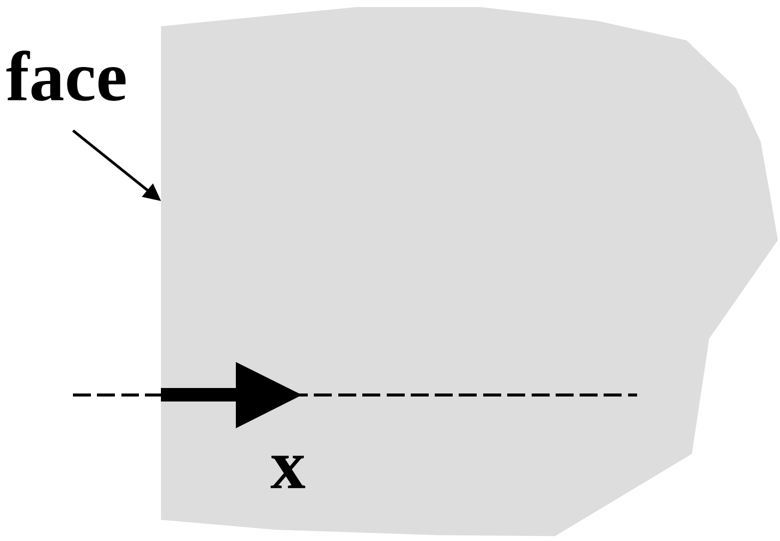
A função erro (Gauss error function) é uma função não elementar definida como:

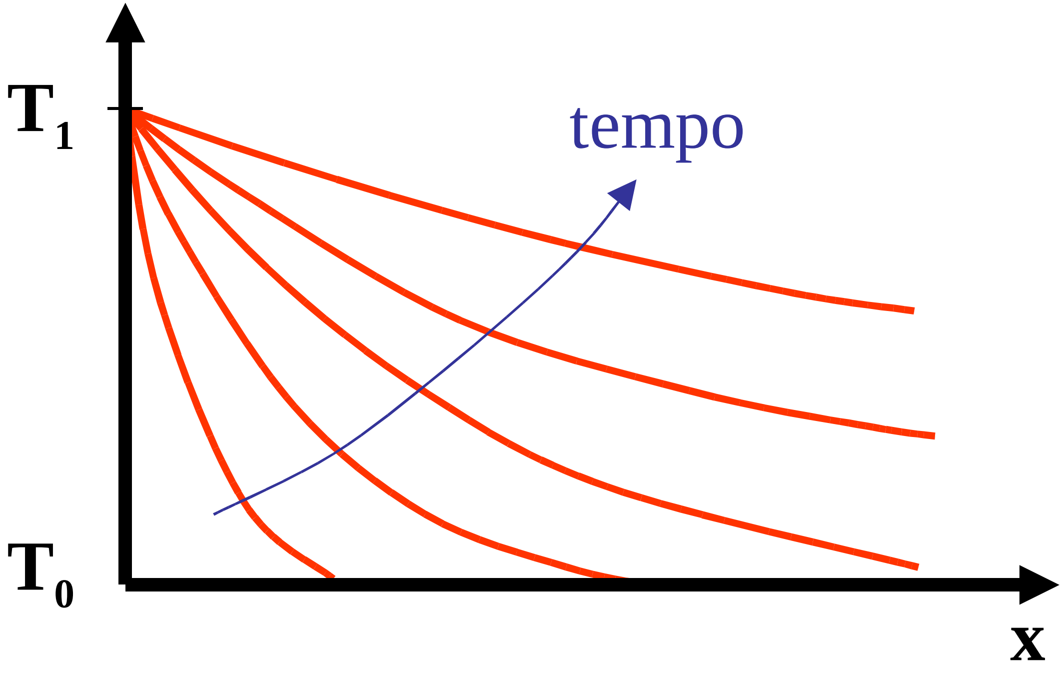
$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$



Solução Sólido Semi-Infinito

$$\frac{T(x,t) - T_1}{T_0 - T_1} = \text{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right]$$





- **8-38** Um teste de incêndio é conduzido sobre uma grande massa de concreto inicialmente a uma temperatura de 15°C. A temperatura da superfície atinge 500°C instantaneamente. Estime o tempo requerido para que a temperatura a uma profundidade de 30cm atinja 100°C. O concreto pode ser considerado como um sólido semi-infinito.

Tab. A-15.1

$k = 1{,}4$ W/m°C

$\rho = 2300$ kg/m^3

$C = 880$ J/kg°C

$\alpha = 6{,}9.10^{-7}$ m^2/s

$$\frac{T(x,t) - T_1}{T_0 - T_1} = \mathrm{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right]$$

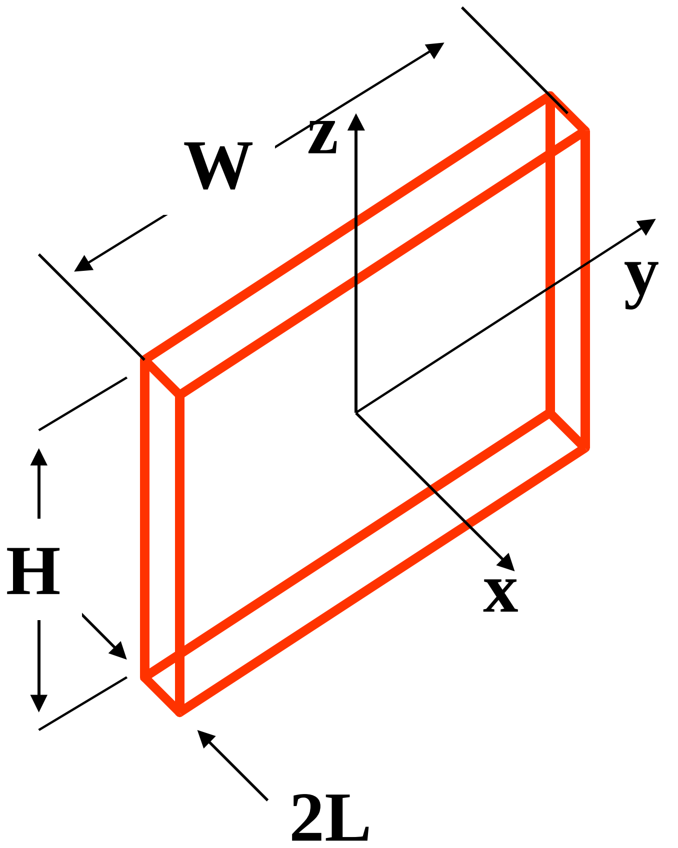
$$\left(\frac{100 - 500}{15 - 500}\right) = 0{,}8347 = \mathrm{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right]$$

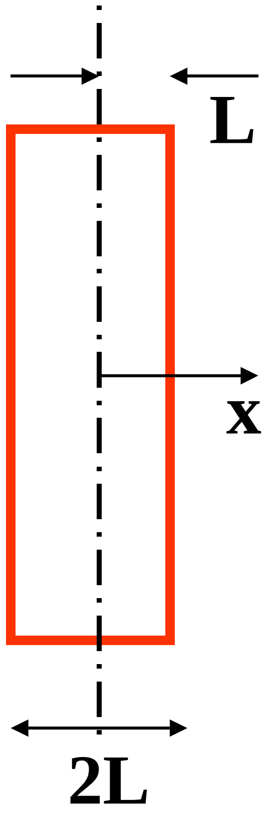
Tab. 8-4

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 0{,}98 \rightarrow t = 9{,}4\,h\,(x = 0{,}3)$$

Condução Transiente 1D em Sólidos Finitos

- Será apresentado uma solução gráfica para condução 1D transiente em casos onde Bi > 0,1.
- Para que a transferência de calor seja 1D é necessário que as dimensões do corpo, normais a direção do fluxo, sejam muito grandes.

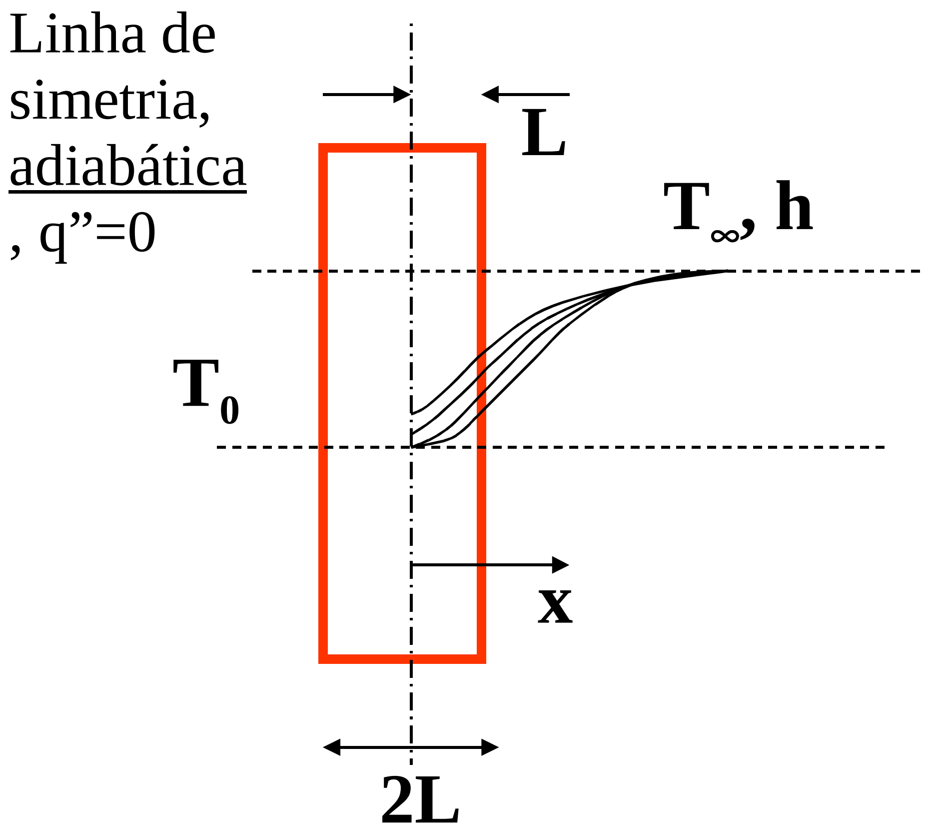




- 2L é muito menor que as dimensões W e H, assim o fluxo de calor ocorre somente em X.
- Neste caso as condições de contorno nas outras direções terão pouca influência no campo de temperatura

Condução Transiente 1D em Sólidos Finitos

- A solução gráfica é apresentada para corpos sólidos com espessura 2L submetidos a um fluxo de calor imposto por um coeficiente de transferência de calor, h, idêntico em ambas as faces.



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$t = 0 \rightarrow T(x, 0) = T_0$$

$$x = 0 \rightarrow \partial T/\partial x\big|_{x=0} = 0$$

$$x = L \rightarrow h(T - T_\infty) = -k\partial T/\partial x\big|_{x=L}$$

Condução Transiente 1D em Sólidos Finitos

- Pode-se mostrar que o campo de temperatura depende dos grupos adimensionais:

$$\frac{(T - T_e)}{(T_0 - T_e)} = f\,(Bi, Fo) \quad \text{onde} \quad Bi = \frac{h \cdot L}{k} \quad \text{e} \quad Fo = \frac{\alpha \cdot t}{L^2}$$

- A solução gráfica fornece: a temperatura na linha de centro, na superfície x = L e o calor transferido, este definido por:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\text{calor transferido}}{\rho\, C\, \forall\, (T_\infty - T_0)} = f\,(Bi\,, Fo)$$

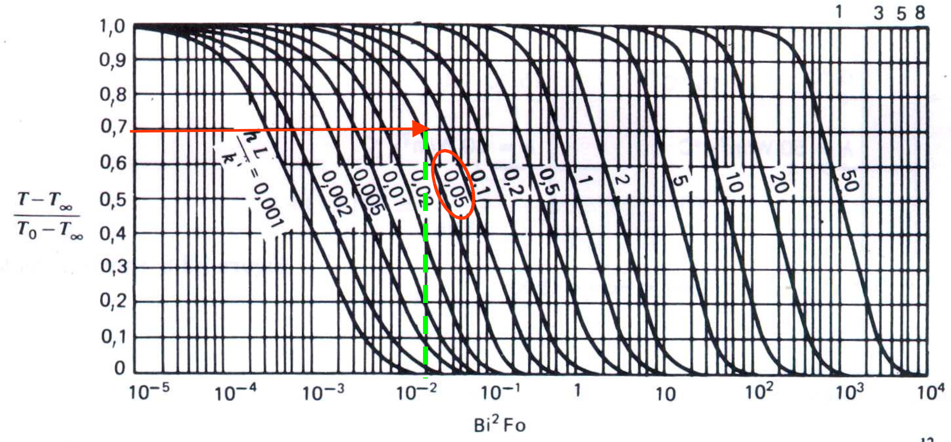


Figura 8-20 Temperatura da superfície adiabática — placa infinita, $X = 0$. Usada com permissão.[12]

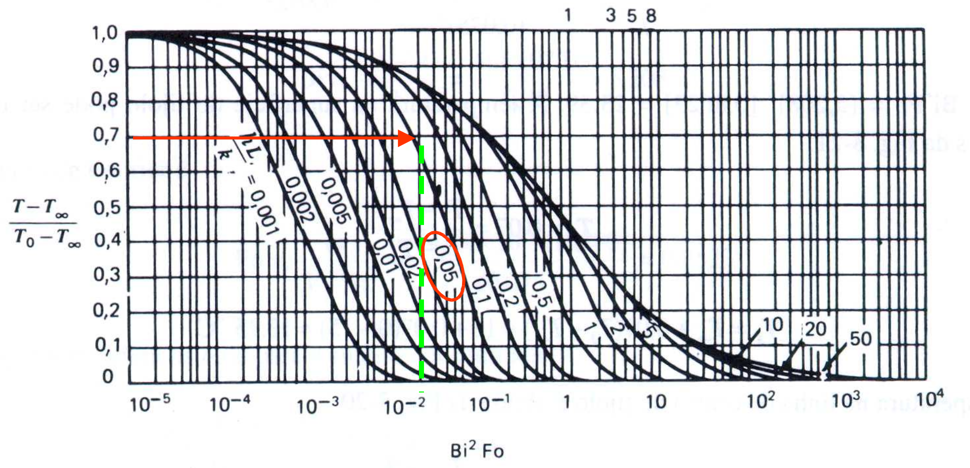


Figura 8-21 Temperatura de superfície — placa infinita, $X = 1$. Usada com permissão.[12]

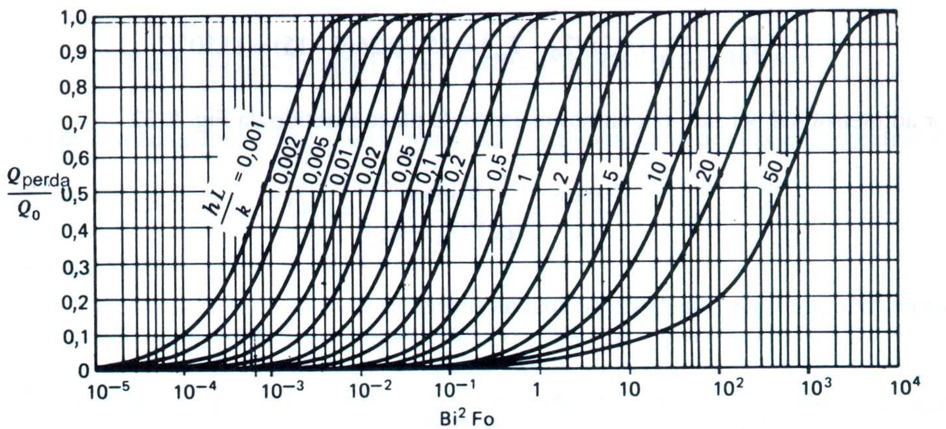


Figura 8-22 Calor perdido — placa infinita. Usada com permissão.[12]

- PLACA PLANA

$$\mathbf{Bi} = \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{L}}{\mathbf{k}} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{Fo} = \frac{\alpha \cdot \mathbf{t}}{\mathbf{L}^2}$$

- Note que a temperatura no centro e na superfície coincidem para Bi < 0,1, como era de se esperar

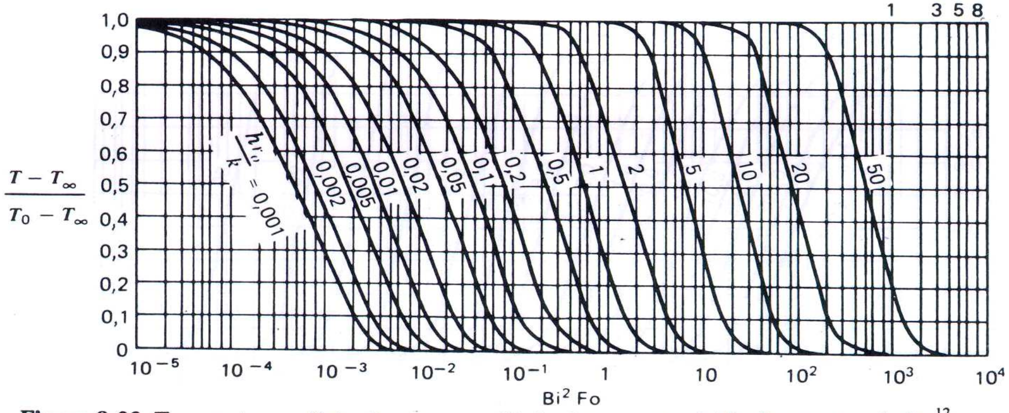


Figura 8-23 Temperatura na linha de centro — cilindro infinito, $R = 0$. Usada com permissão.[12]

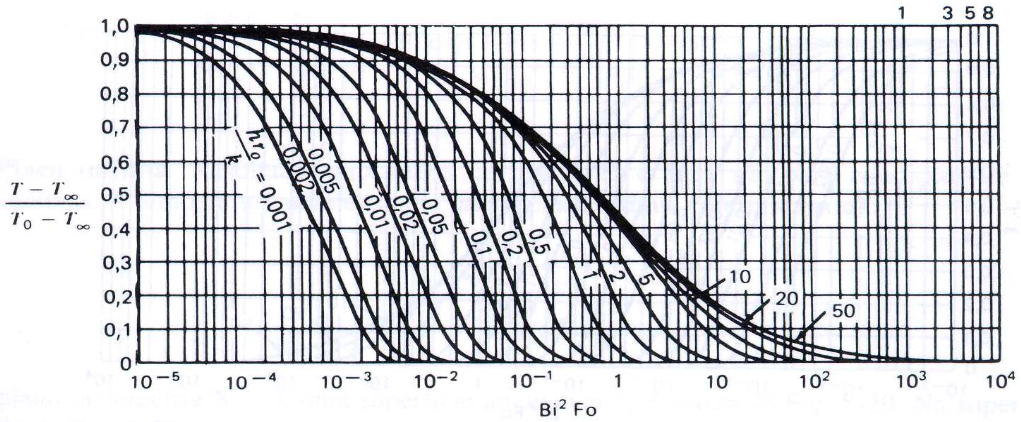


Figura 8-24 Temperatura na superfície — cilindro infinito, $R = 1$. Usada com permissão.[12]

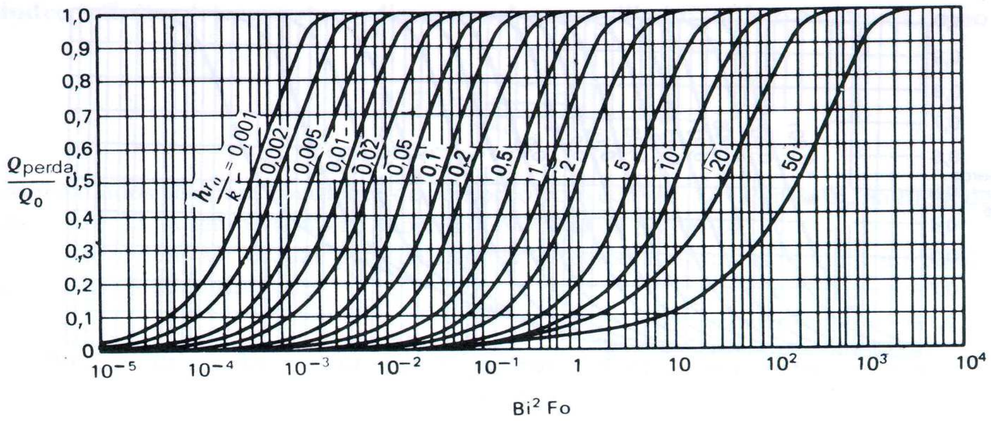


Figura 8-25 Calor perdido — cilindro infinito. Usada com permissão.[12]

- CILINDRO

$$Bi = \frac{h\,r_0}{k} \qquad Fo = \frac{\alpha\,t}{r_0^{\,2}}$$

- Note que a temperatura do centro e da superfície coincidem para Bi < 0,1, como era de se esperar

- **Exemplo** Uma lata de cerveja inicialmente a 20°C é colocada num congelador com ar a 0°C. Quanto tempo leva para resfriar a lata de cerveja para 7°C? Considere as propriedades da cerveja as mesmas da água. A lata possui 20cm de altura e 7cm de diâmetro. O coeficiente de transferência de calor do ar para a lata foi estimado em 4,73 W/m^2 °C.

Tab. A-8

$k = 0,5723$ W/m°C
$\rho = 1000$ kg/m^3
$C = 4203$ J/kg°C
$\alpha = 1,32.10^{-7}$ m^2/s

Biot, $Bi = hR_0/k = 0,289$.

Como $Bi > 0.1$ o modelo concentrado *não é recomendado*!

Estimativa Modelo Concentrado

- Apesar de ser inapropriado vamos estimar o tempo utilizando o modelo concentrado.

$$\tau = \left(\frac{\rho C \forall}{hA}\right) = \frac{1000 \cdot 4203 \cdot 7,7.10^{-4}}{4,73 \cdot 4,48.10^{-2}} = 14300\text{s} \ \text{ ou } \ 3,96\text{h}$$

$$t = -\tau \cdot Ln\left(\frac{T - T_e}{T_0 - T_e}\right)$$

$$\rightarrow t = -14300 \cdot Ln\left(\frac{7-0}{20-0}\right) \cong 15000\text{s ou 4h}$$

Estimativa Modelo Unidimensional

- Deseja-se saber quanto tempo é necessário para que *o centro* da lata atinja 7ºC.

$$(T - T_e)/(T_0 - T_e) = 0,35 \quad \& \quad Bi = 0.289$$

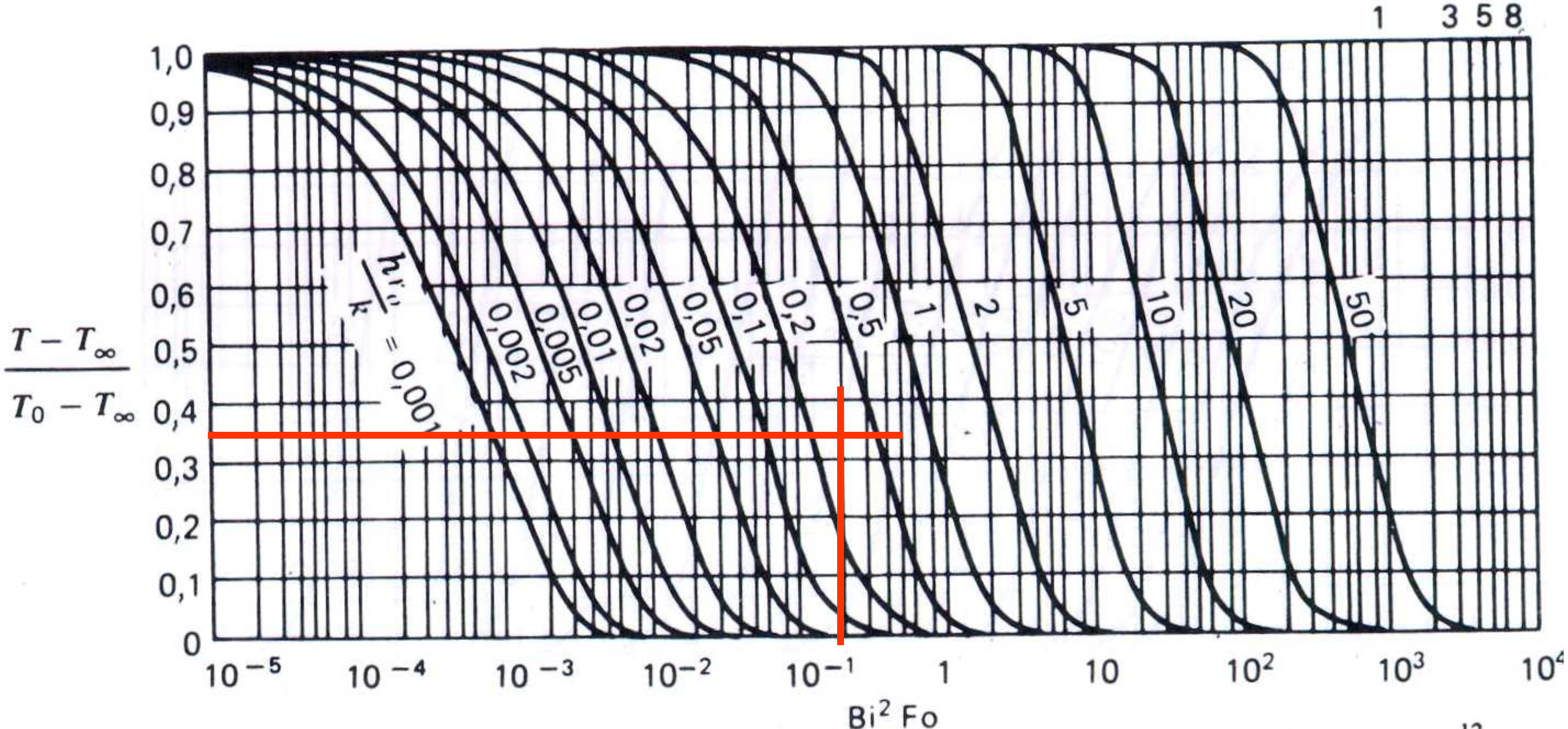


Figura 8-23 Temperatura na linha de centro — cilindro infinito, $R = 0$. Usada com permissão.[12]

$$Bi^2 Fo = 0,2 \quad \text{logo } Fo = 2,39$$

$$\text{como } Fo = t/\alpha r^2 \rightarrow t = Fo \cdot \left(r^2/\alpha\right) = 21500s \text{ ou } 6h$$

Comentário Final

- Se quisermos diminuir o tempo necessário para gelar a lata a $7^{o}C$ temos que aumentar o coeficiente de transferência de calor, h.
- O h pode ser aumentado se colocarmos a lata num barril com água e gelo ao invés do ar. Outra possibilidade é utilizar congeladores que possuem um fluxo forçado de ar dentro do congelador.