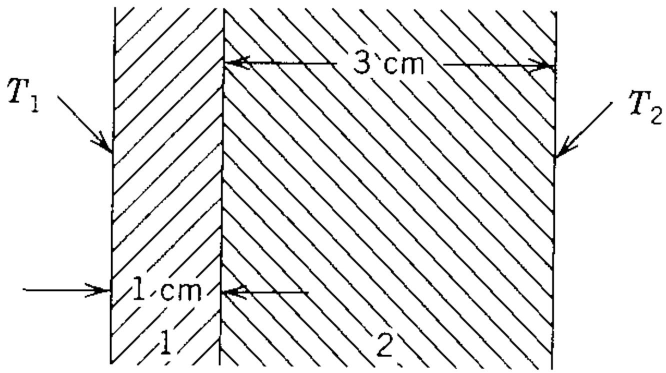
Condução Térmica

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{kA}\,\frac{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{T}}{\mathbf{L}} \quad \textbf{ou} \quad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{hA}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{T}$$

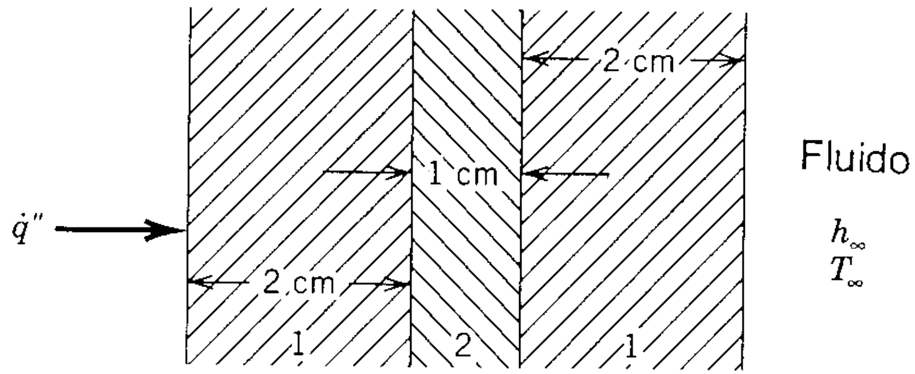
$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R}$$

$$R_k = \frac{L}{k\,A} \qquad\qquad R_h = \frac{1}{h\,A}$$

8-7 Desenhe os perfis de temperatura nas seções (a) e (b). Calcule a taxa de transferência de Calor em (a)



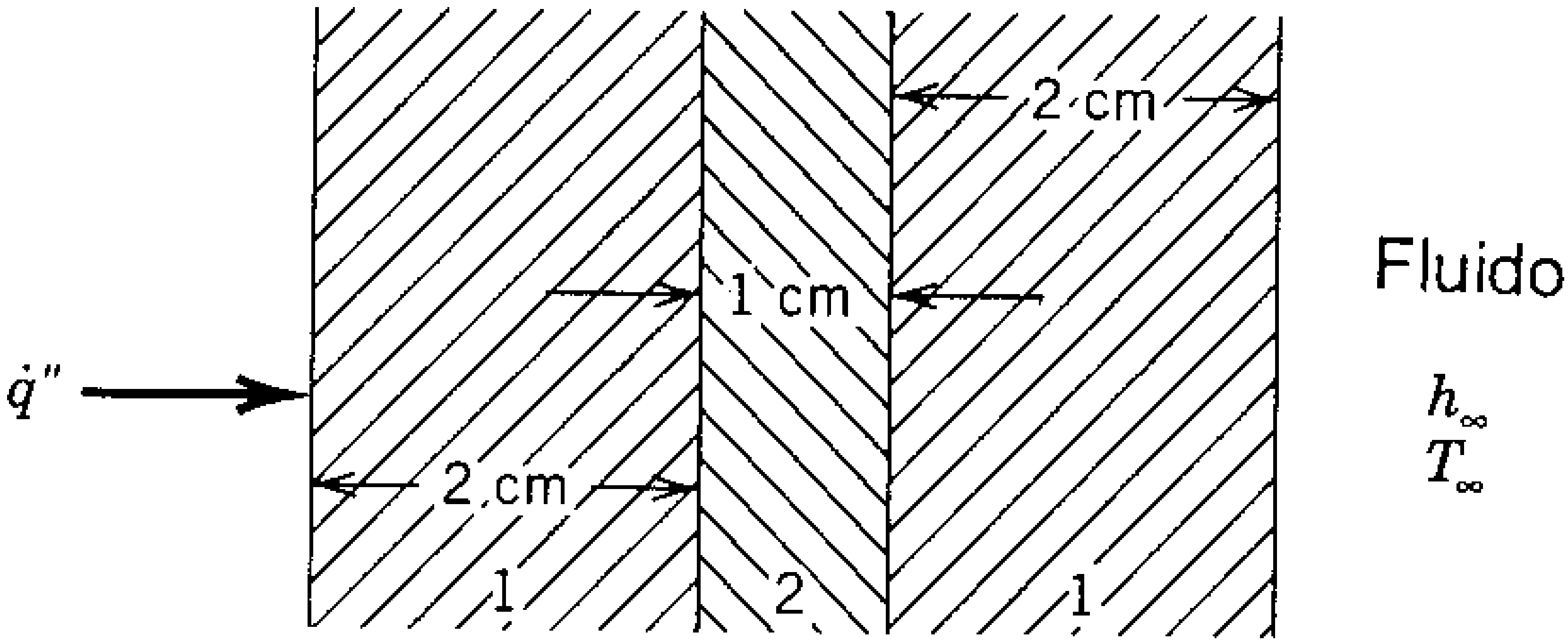
(a)



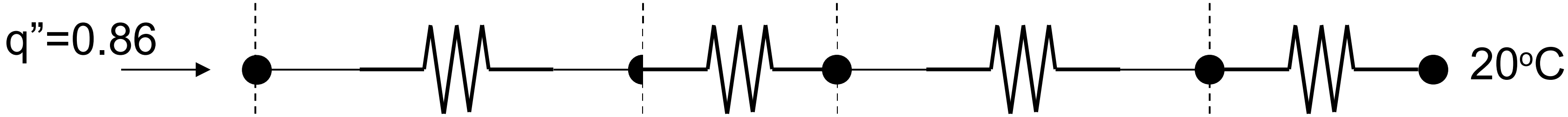
(b)

k_1=14 W/m°C
k_2=0,5W/m°C
T_1=100°C
T_2=30°C

q"=0,86kW/m²
k_1=15 W/m°C
k_2=60W/m°C
h_∞=10W/m²°C
T_∞= 20°C

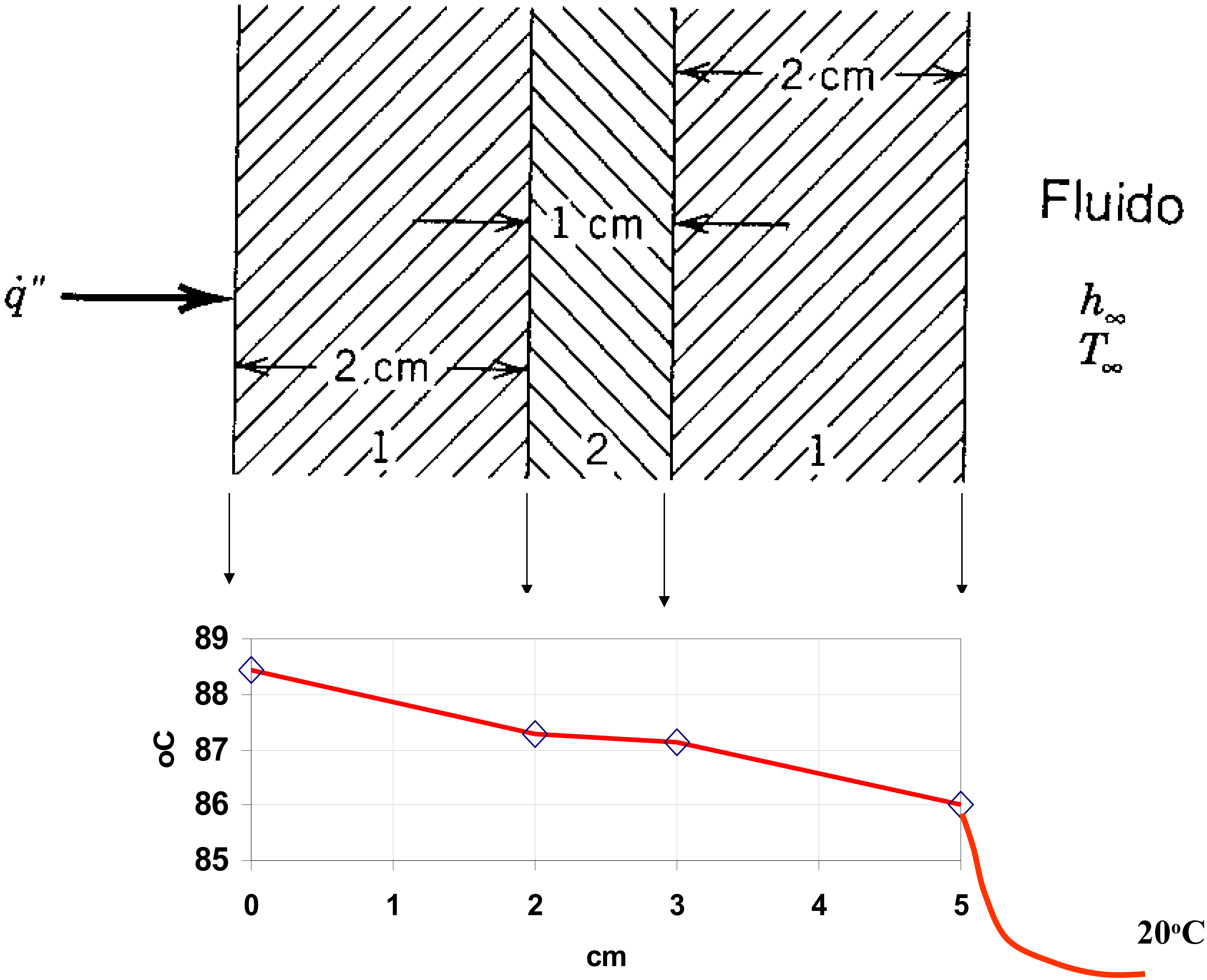


$R_1 = \dfrac{L_1}{k_1 \cdot A}$ $R_2 = \dfrac{L_2}{k_2 \cdot A}$ $R_1 = \dfrac{L_1}{k_1 \cdot A}$ $R_c = \dfrac{1}{h \cdot A}$



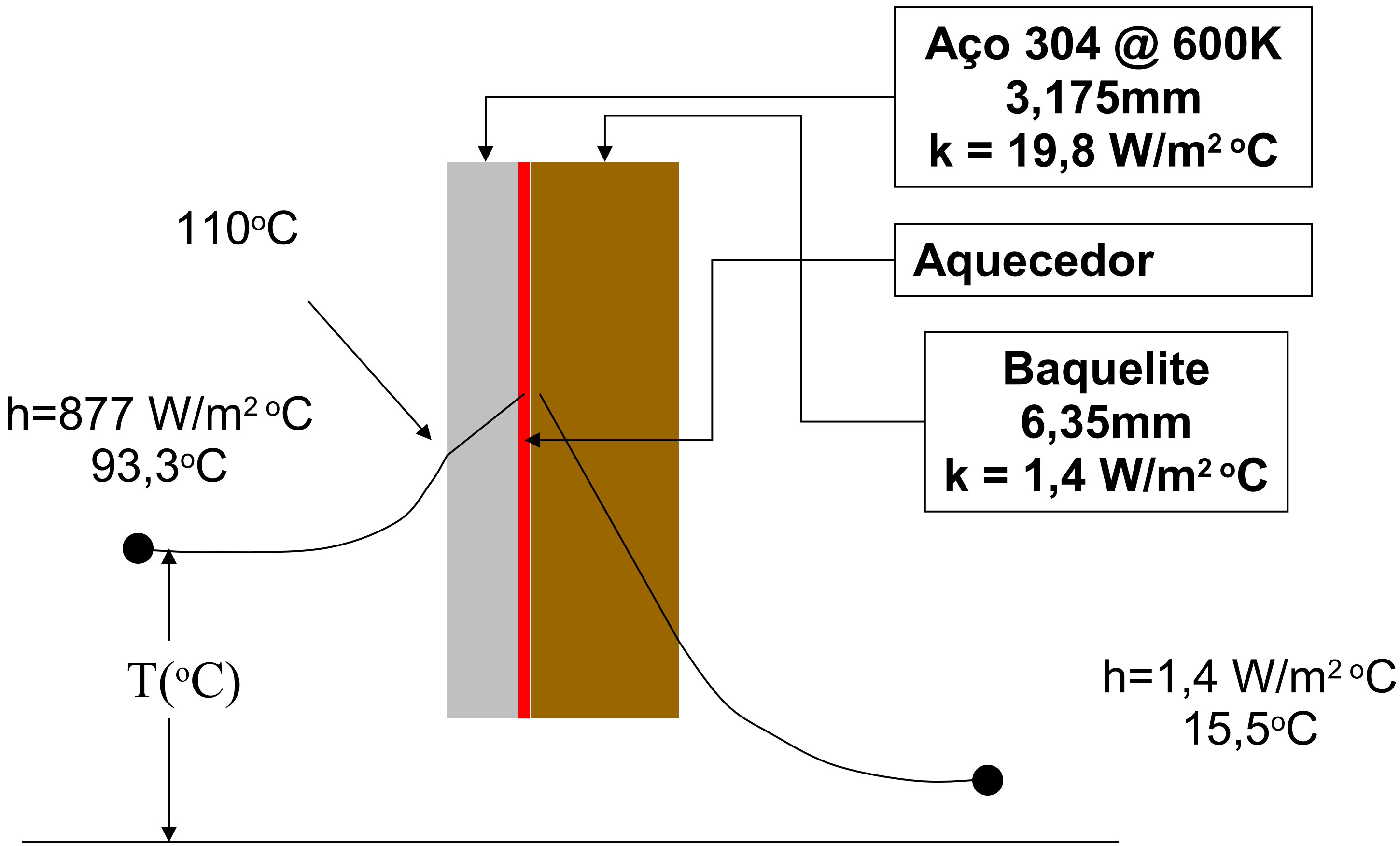
0.00133 m²°C/W **0.00133 m²°C/W**

0.000167 m²°C/W **0.1 m²°C/W**

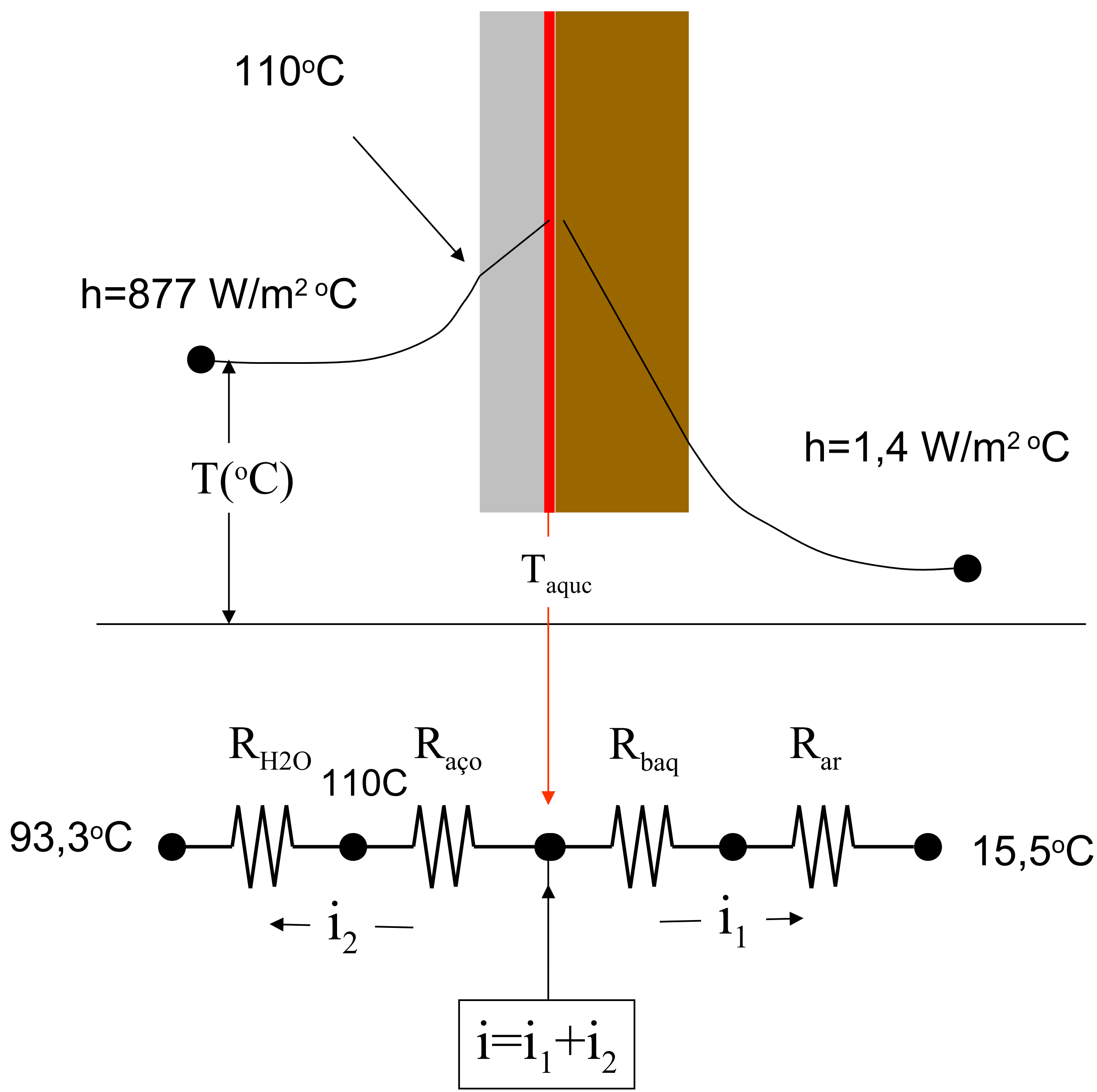


$\dot{q}''$
2 cm
1 cm
2 cm
1
2
1
Fluido
h_∞
T_∞
89
88
87
86
85
oC
0
1
2
3
4
5
cm
20°C

8-9 Um elemento de aquecimento 'fino' é colocado entre uma placa plana de aço inoxidável AISI 304 de 1/8" (3,175 mm) de espessura e uma placa plana de baquelite de ¼" (6,35 mm) de espessura. A superfície de baquelite está em contato com ar a 15,5 °C enquanto a superfície de aço está em contato com água a 93.3 °C. Os coeficientes de transf. de calor por convecção são 1,4 $W/m^2\,°C$ do lado do ar e 877 $W/m^2\,°C$ do lado da água. Determine o fluxo de energia que precisa ser fornecido ao elemento de aquecimento para manter a temperatura <u>da superfície de aço inox em contato com a água a 110°C</u>. Que fração da energia passa através da placa de inox? Despreze a espessura do elemento de aquecimento.



Circuito Equivalente



Resposta

$AR_{H2O} = 0.00114\ m^{2o}C/W$
$AR_{aço} = 0.00016\ m^{2o}C/W$
$AR_{baq} = 0.0045\ m^{2o}C/W$
$AR_{ar} = 0.7142\ m^{2o}C/W$

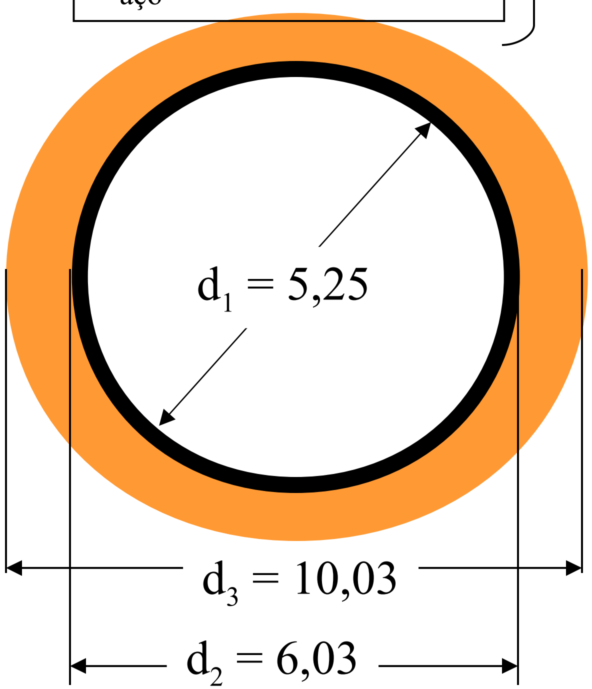
$q''_{H2O} = 14646\ W/m^2$
$q''ar = 134.7\ W/m^2$
(%)H2O = 99 %
T aquecedor = 112.3°C

8-11 Um tubo liso de aço carbono com diâmetro interno de 5,25 cm e espessura de 0,78 cm, é recoberto com seis camadas de papel corrugado de asbestos com 2 cm de espessura. A temperatura do vapor de água no lado interno do tubo é de 150°C e o ar no lado externo é de 25°C. Estime: i) a temperatura da superfície do lado externo do isolamento e ii) a taxa de transferência de calor por metro de comprimento do tubo. Dados: h_{vapor} = 1500 W/m²°C & h_{ar} = 5 W/m²°C

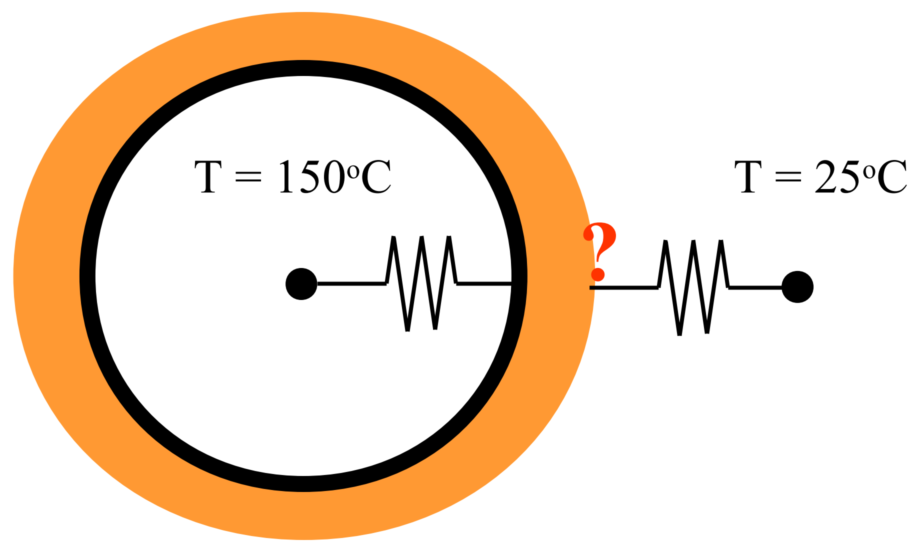
$k_{papel} = 0{,}078$ W/m°C

$k_{aço} = 60{,}5$ W/m°C

Tabs. A-15.4
A-14

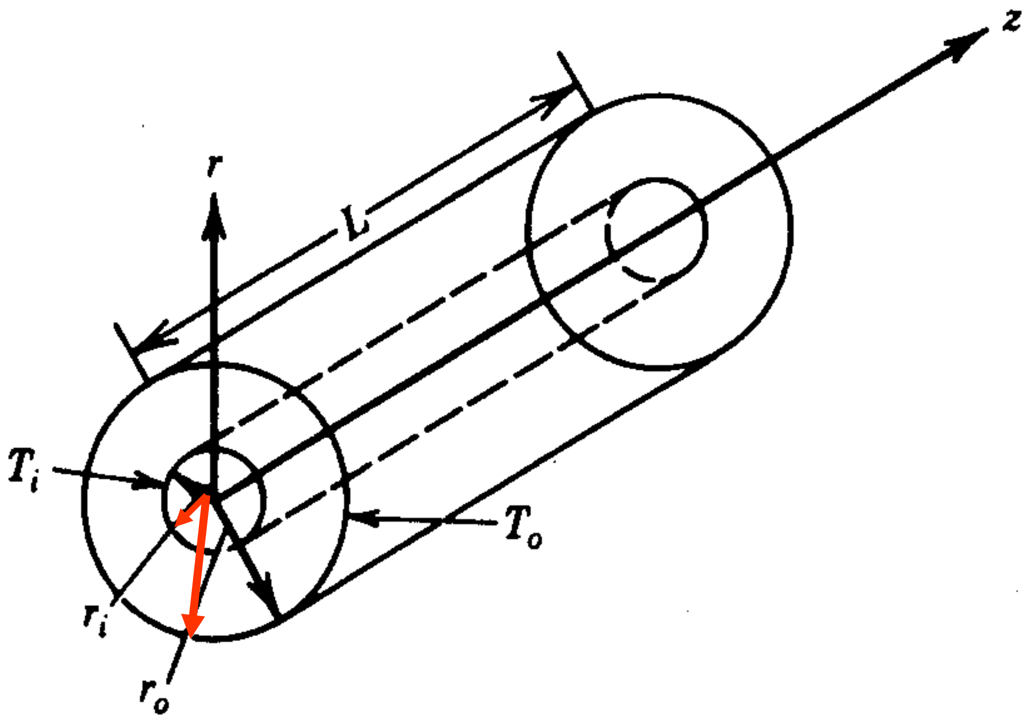


Circuito Equivalente



Como calcular resistência equivalente para tubo cilindrico?

Condução Radial no Cilindro: Temperatura



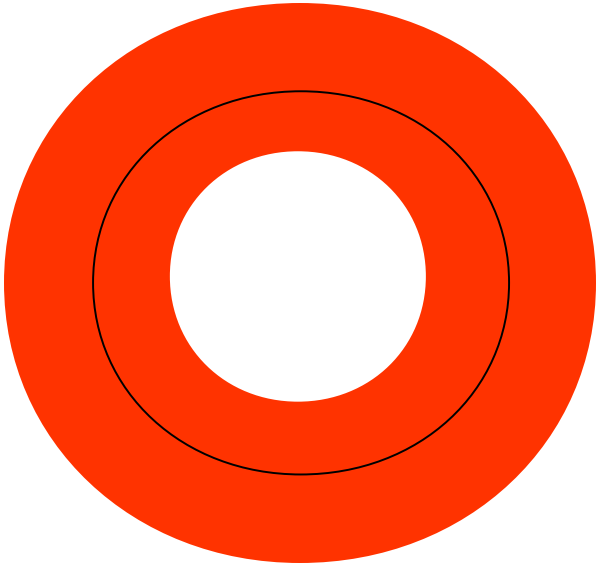
$$\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dT}{dr}\right)=0$$

$$\begin{cases} r = r_i \rightarrow T = T_i \\ r = r_o \rightarrow T = T_o \end{cases}$$

Perfil de temperatura

$$T(r) = T_i - \frac{(T_i - T_o)}{Ln(r_o/r_i)} \cdot Ln(r/r_i)$$

Condução Radial no Cilindro: <u>Calor & Resistência Térmica</u>



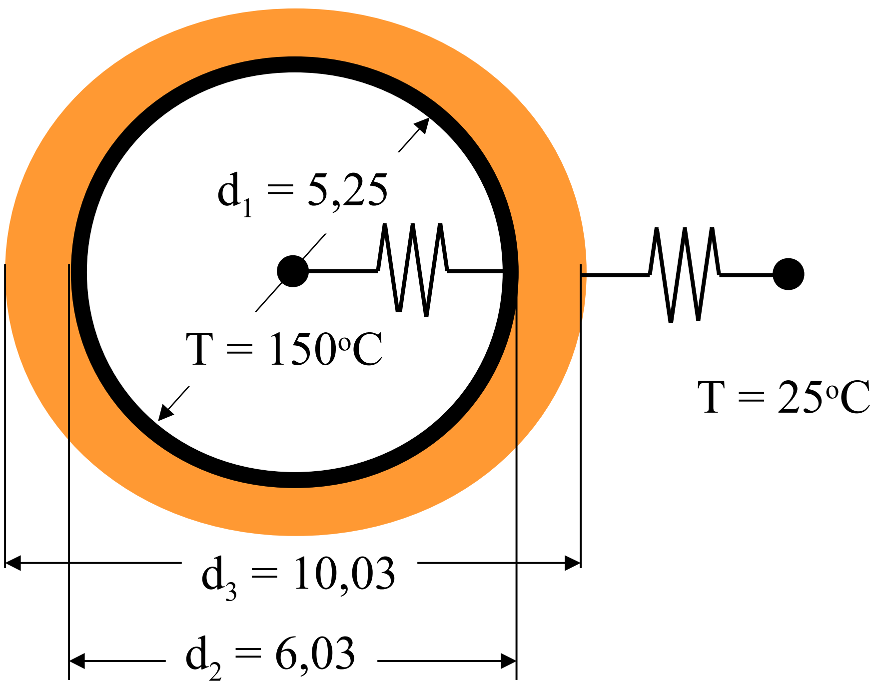
- O fluxo de calor, q”, varia pq a área varia radialmente.

$$\dot{q}'' = -k\frac{dT}{dr} = \frac{k}{r}\cdot\frac{\Delta T}{Ln\left(r_o/r_i\right)}$$

- A taxa de calor, Q, que cruza de r_o a r_i é sempre a mesma!

$$\dot{Q} \equiv 2\pi rL\dot{q}'' = \frac{\Delta T}{\left[\dfrac{Ln\left(r_o/r_i\right)}{2\pi kL}\right]} \rightarrow R_{eq} = \left[\frac{Ln\left(r_o/r_i\right)}{2\pi kL}\right]$$

Retornando Problema 8-11



Respostas

$$Rc_{H2O} = \frac{1}{\pi d_1 L \cdot h_{vap}} = \frac{0.0020}{L} \quad (0.2\%)$$

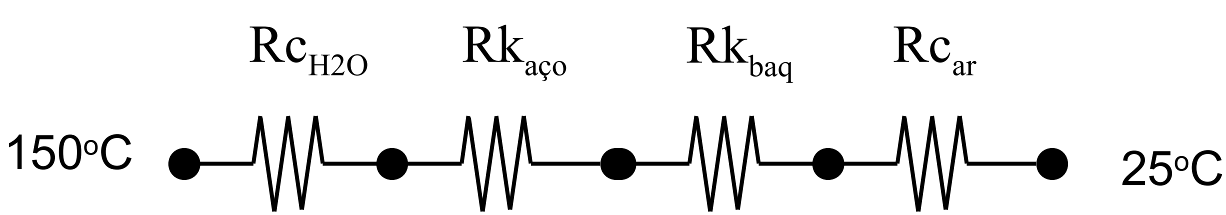
$$Rk_{aço} = \frac{Ln\left(d_2/d_1\right)}{2\pi k L} = \frac{0.0004}{L} \quad (<0.1\%)$$

$$Rk_{papel} = \frac{Ln\left(d_3/d_2\right)}{2\pi k L} = \frac{1.038}{L} \quad (61.9\%)$$

$$Rc_{ar} = \frac{1}{\pi d_3 L \cdot h_{ar}} = \frac{0.6347}{L} \quad (37.8\%)$$

$$R_{eq} = 1.6774/L$$

Circuito Equivalente

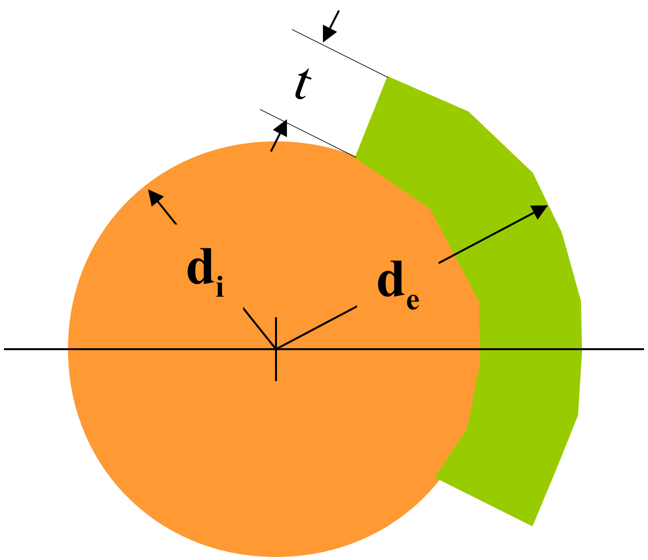


$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_{eq}} = 74.5 \text{ W/m}$$

$$T_{ext} = 72^{o}\,C$$

Espessura Crítica de Isolamento

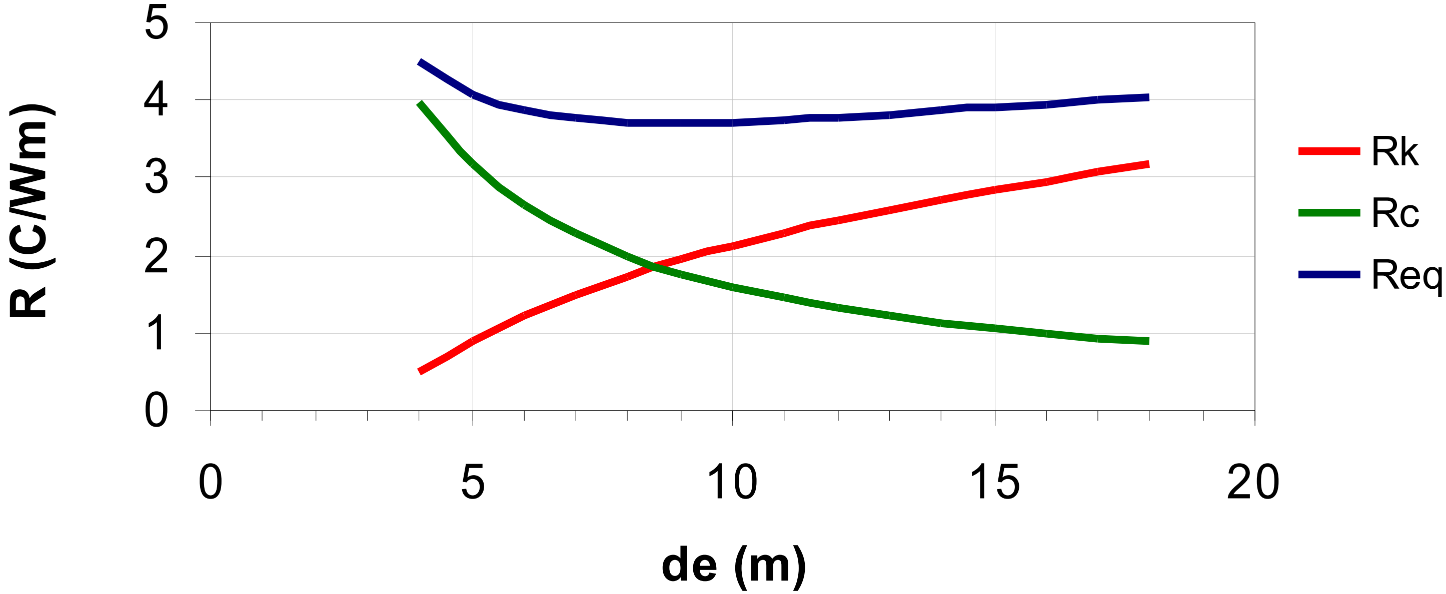
8-17 Um fio elétrico tem um diâmetro de 3 mm. O fio precisa ser isolado eletricamente com um plástico cujo k = 0,09 W/m°C. O coeficiente de transferência de calor por convecção, h_{ar} = 20 W/m²°C. A corrente elétrica que o fio pode transportar é limitada pela temperatura que não pode exceder 150°C. Determine: (a) a influência da espessura do isolante, t, na taxa de calor (b) encontre a taxa de calor dissipada por metro linear de fio.



A taxa de calor depende das resistências de condução e convecção.

$$\dot{Q} = \frac{T_i - T_\infty}{\left\{\frac{Ln\left(de/di\right)}{2\pi \cdot k_i L} + \frac{1}{\pi \cdot d_e L h_e}\right\}}$$

Fixando o diâmetro do fio, d_i, vamos notar que o aumento da espessura do isolante faz **AUMENTAR R_k** e **DIMINUIR R_c**!



A Resistência equivalente passa por um mínimo e Q passa por um máximo!

O diâmetro crítico é aquele onde R_{eq} é mín & Q é max.

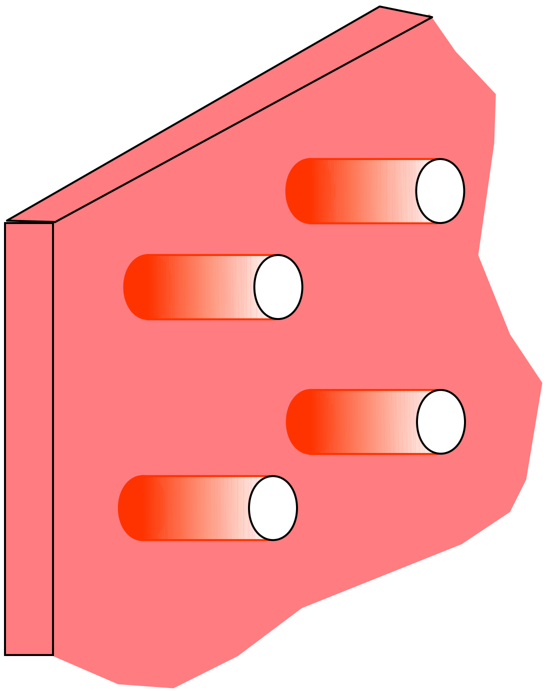
$$\frac{dR_{eq}}{d\ d_e} = 0 \rightarrow \frac{d}{d\ d_e}\left[\frac{Ln\left(de/di\right)}{2\pi \cdot k_i L} + \frac{1}{\pi \cdot d_e L h_e}\right] = 0$$

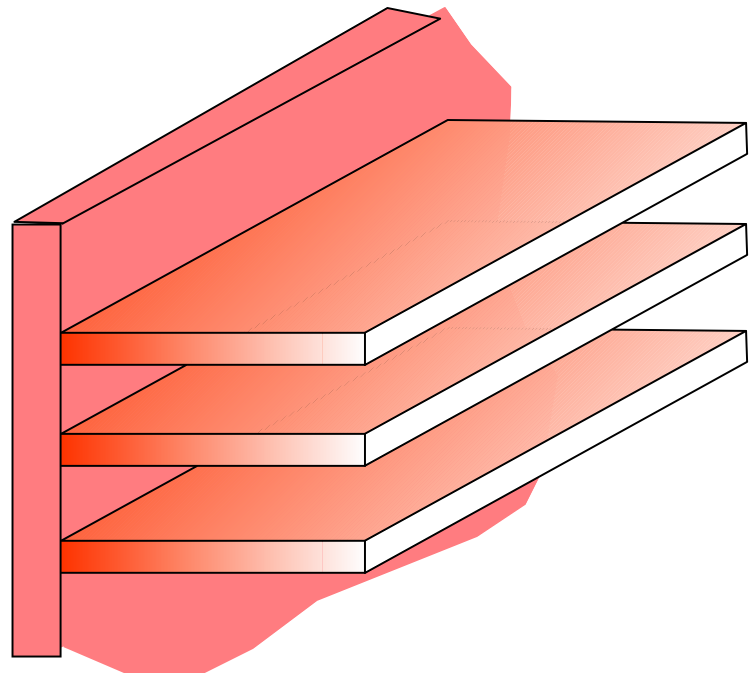
$$d_{crit} = \frac{2k}{h}$$

Neste problema, d_{crit} = 9 mm

ALETAS

- Aumento da taxa de transferência de calor pelo aumento da área de troca de calor

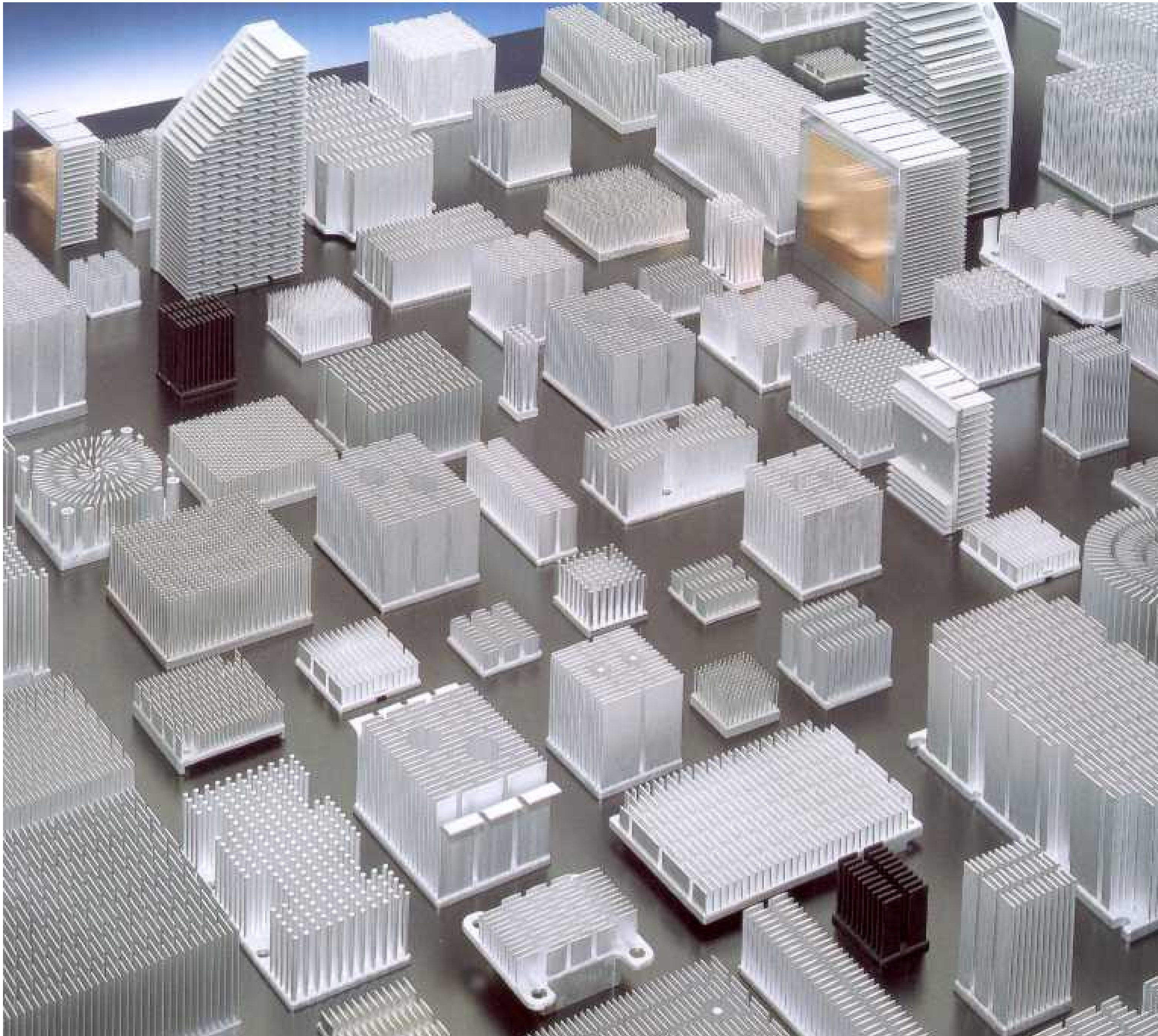




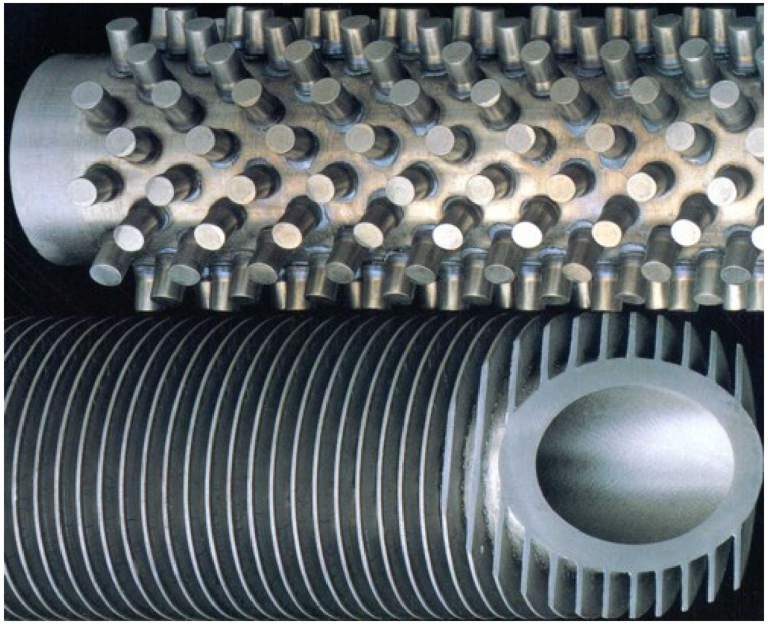
- Aleta tipo pino

Aleta tipo retangular

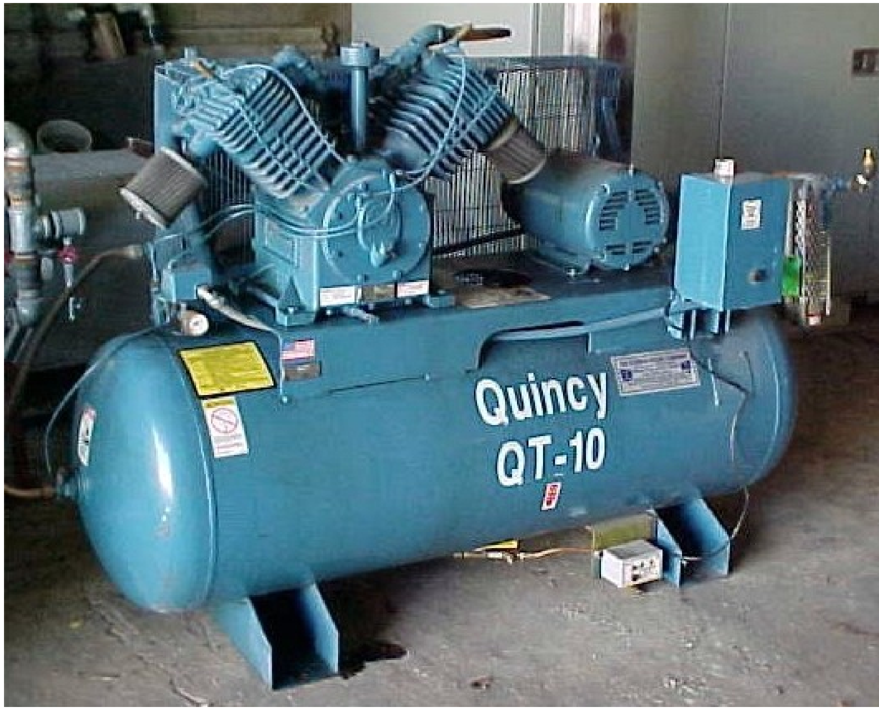
ALETAS



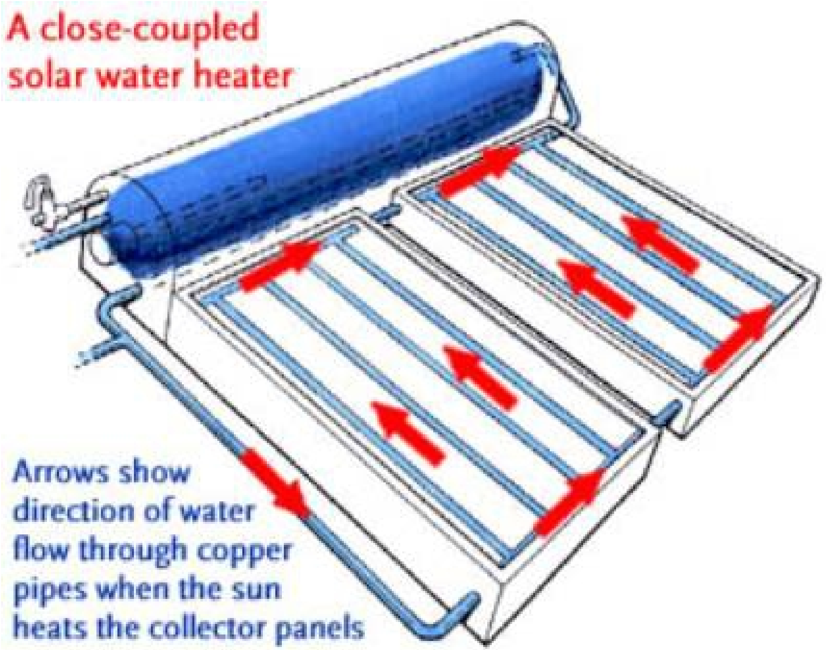
Tubos Aletados

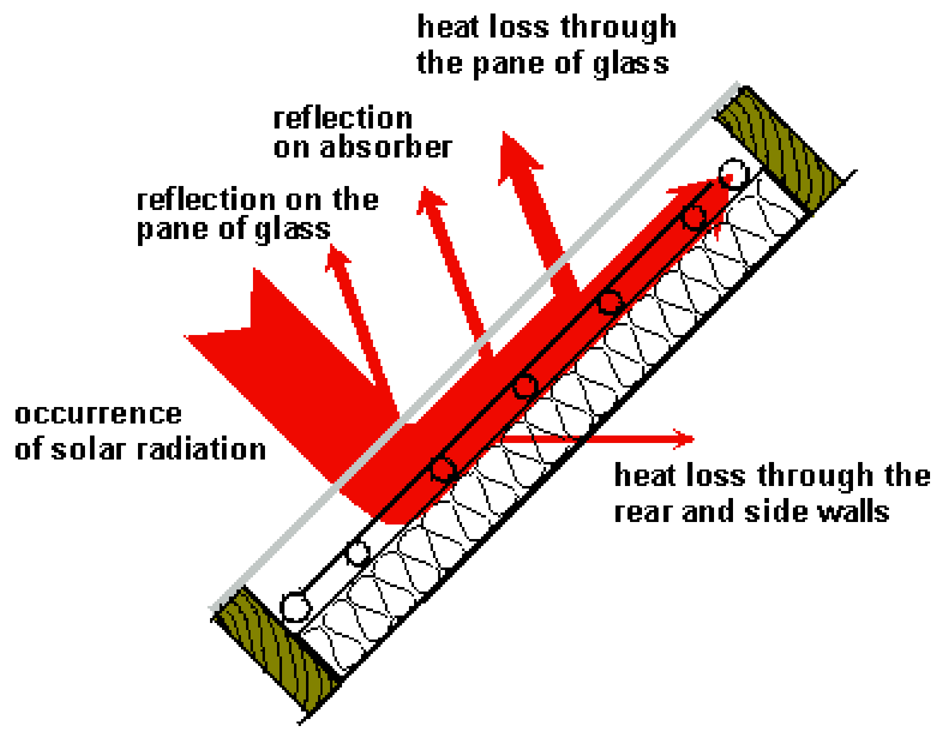


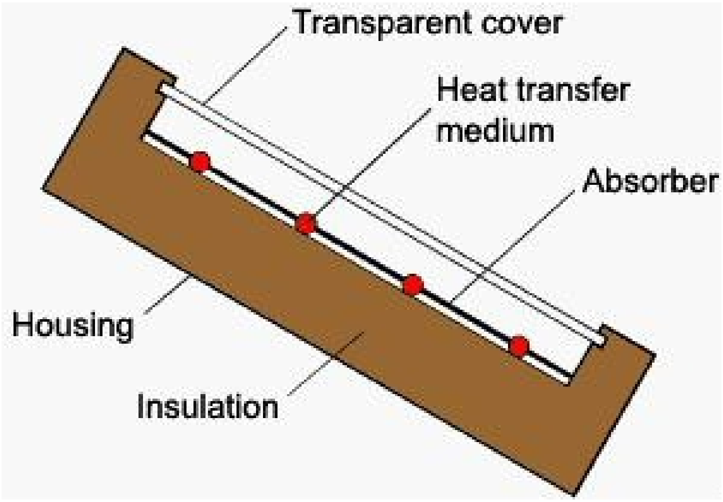
Aletas que Resfriam

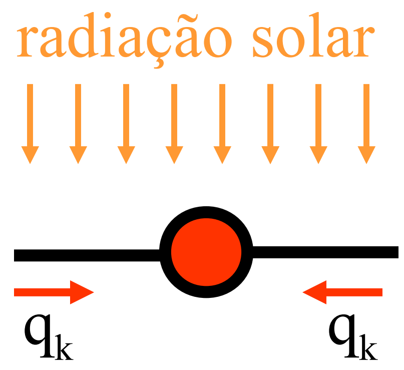


Aletas que Aquecem



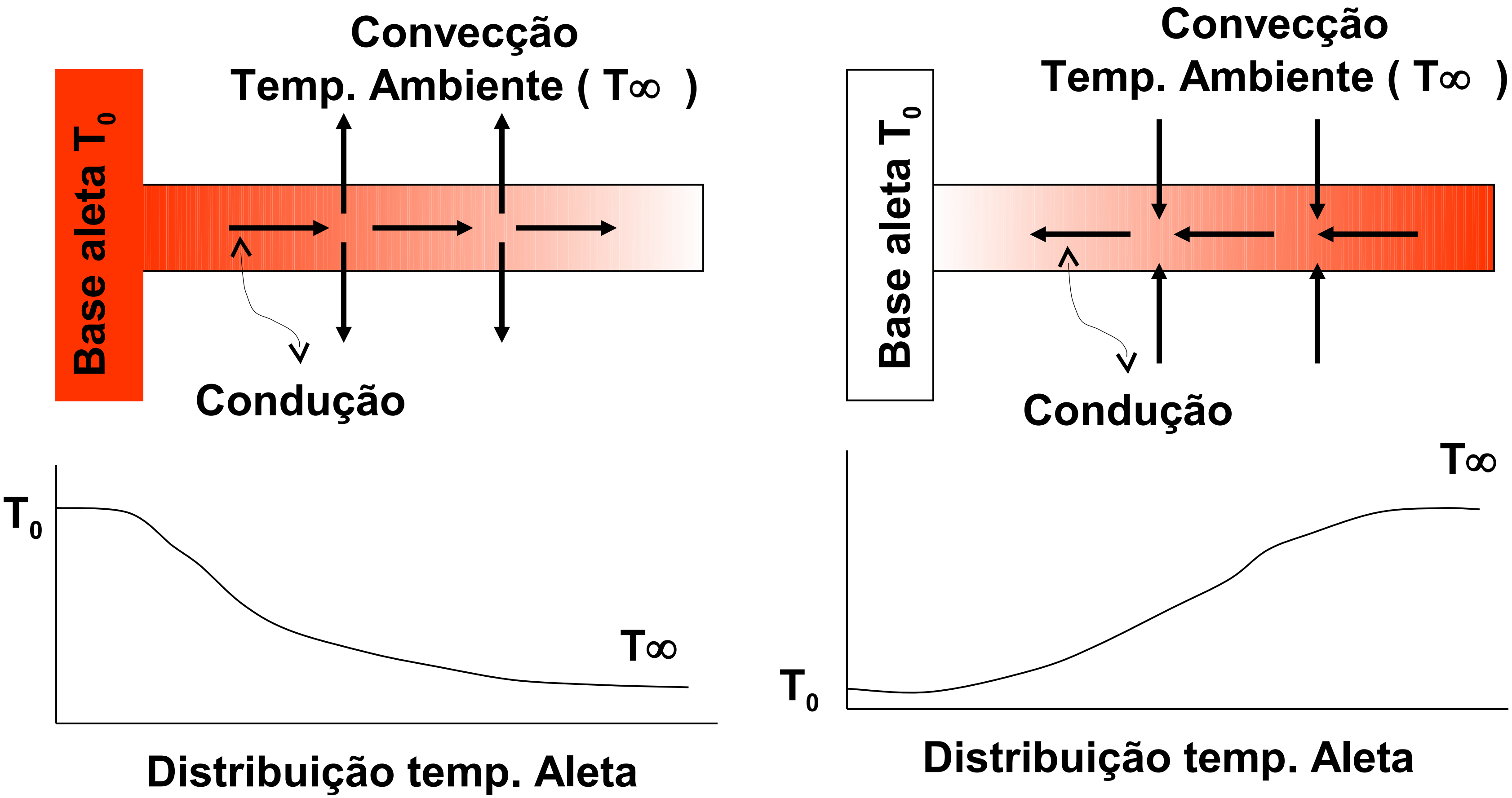




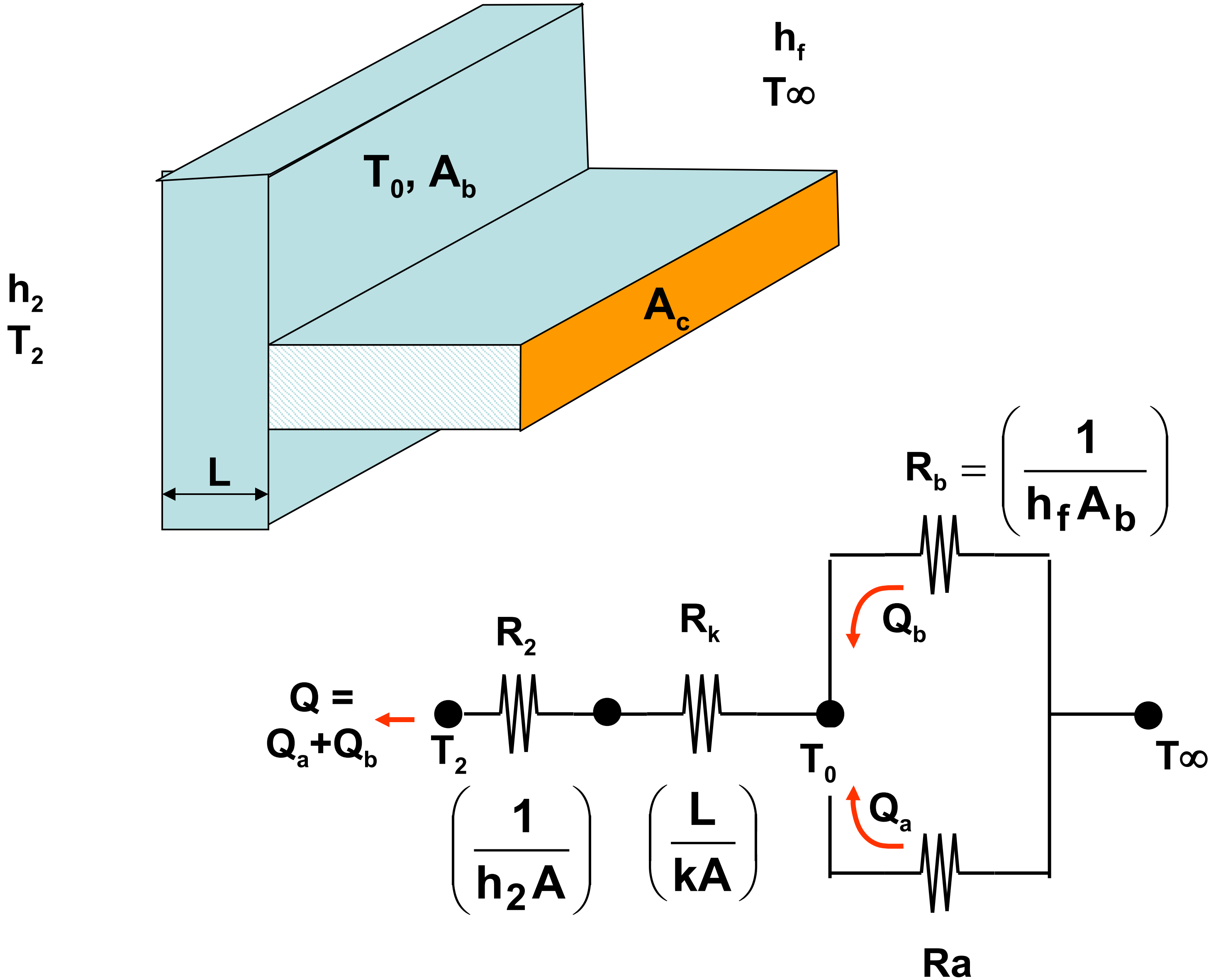


ALETAS: COMO FUNCIONAM?

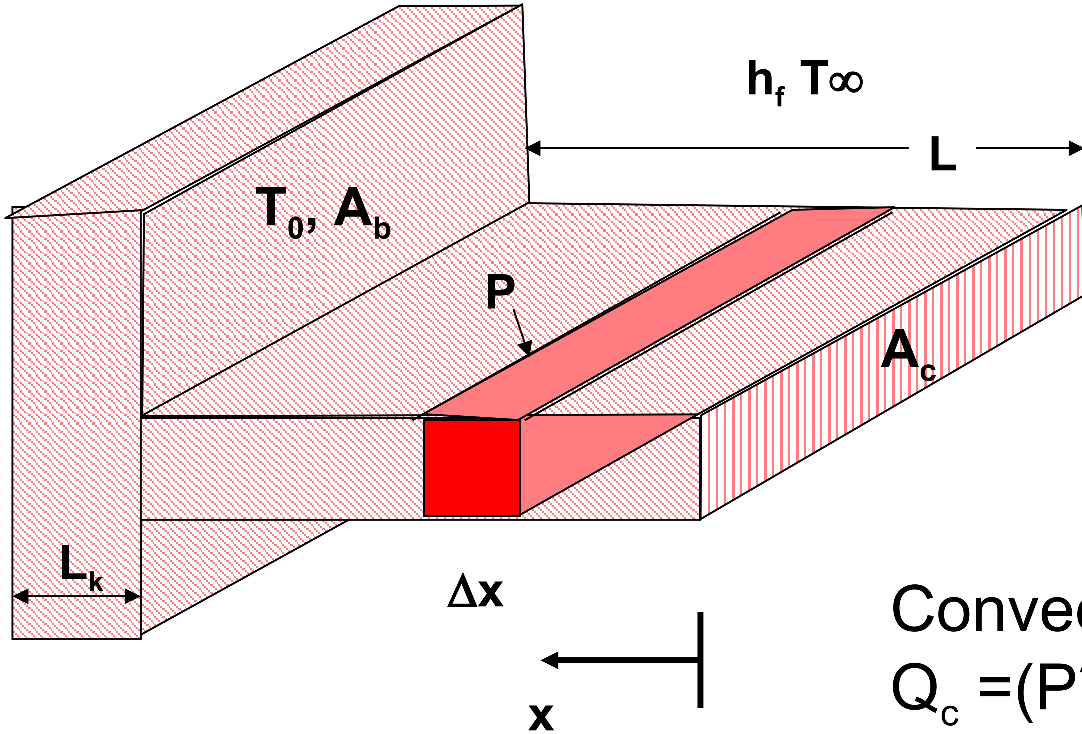
- O calor é transportado da base (ou para a base) por meio da condução térmica e adicionado (ou removido) ao ambiente externo pela convecção térmica.

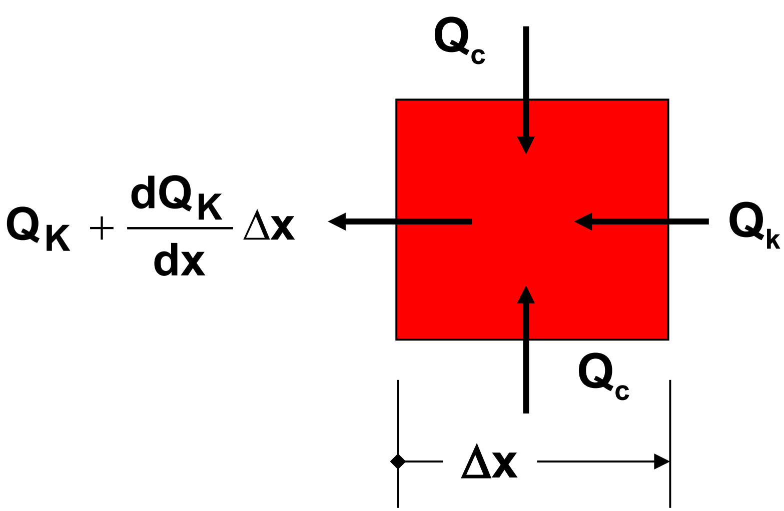


ALETAS:
Circuito Térmico Equivalente



ALETAS: Balanço de Energia





Convecção:

Q_c =(P*Δx)*h_f*[T∞ – T(x)]

Condução:

Q_k = - Ac*k*dT/dx

Balanço:

- (dQ_k/dx) Δx + Qc = 0

ALETAS: Modelo Térmico

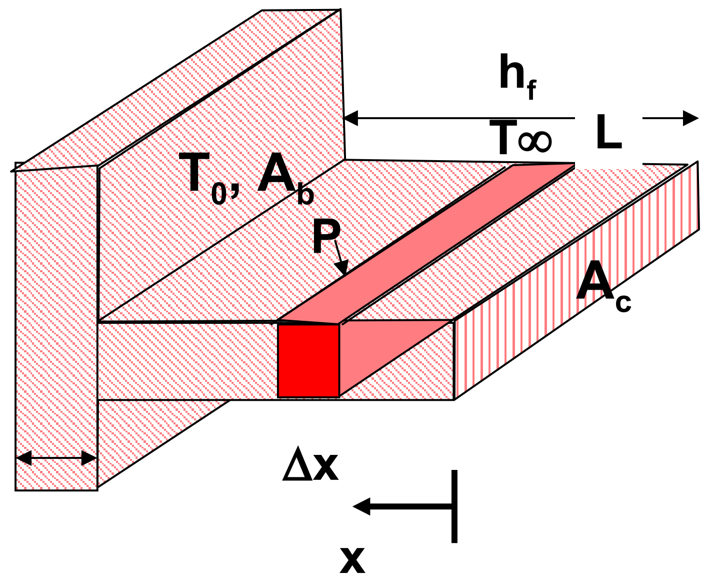
$$\frac{d}{dx}\left(A_c k \frac{dT}{dx}\right)\Delta x + (P\Delta x)\, h\,(T_\infty - T) = 0$$

$$m^2 = \frac{h \cdot P}{kA_c}$$

&

$$\theta = (T - T\infty)$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$



Condições de Contorno:

$$x = L \rightarrow T(L) = T_0 \Rightarrow \theta(L) = \theta_0 = (T_0 - T\infty) \quad \text{temp igual base aleta}$$

$$x = 0 \rightarrow \left.\frac{dT}{dx}\right|_0 = 0 \Rightarrow \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_0 = 0 \quad \text{ponta aleta isolada}$$

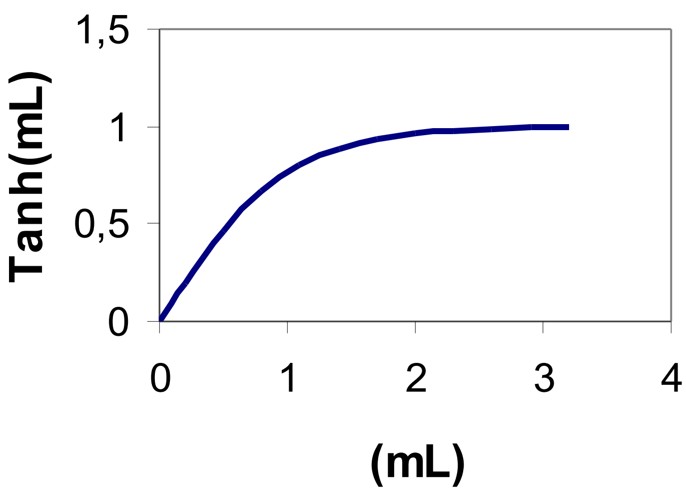
ALETAS: Solução do Modelo Térmico

Campo Temperaturas

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh(mx)}{\cosh(mL)}$$

Fluxo de Calor na Base

$$Q_a = -A_c k \left.\frac{dT}{dx}\right|_L = \sqrt{h \cdot PkA_c} \cdot \left(T_0 - T_\infty\right) \cdot \mathrm{Tanh}\,(mL)$$

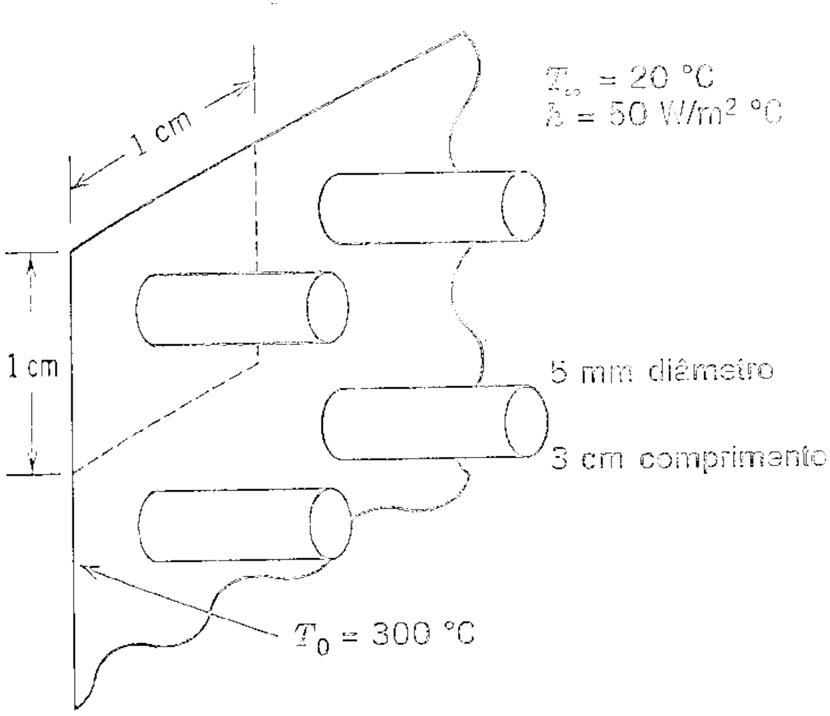


Fluxo Calor aumenta: h, P, k, Ac e mL

Resistência Térmica da Aleta

$$R_a = \frac{1}{\sqrt{h \cdot PkA_c} \cdot \mathrm{Tanh}\,(mL)} \rightarrow Q_a = \frac{\left(T_0 - T_\infty\right)}{R_a}$$

- **8-21** Determine a taxa de transferência de calor para uma aleta reta de seção transversal circular instalada numa superfície em contato com o ar a 20°C na qual calor é retirado. As aletas são de aço inox (k 56.7 W/m°C tab A-14) com 5mm de diâmetro e 3cm de comprimento com espaçamento de 1cm x 1cm como mostrado na figura. Considere o coeficiente de transferência de calor de 50 W/m²°C e a temperatura da base de 300°C.



$$Q_a = \frac{(T_0 - T\infty)}{R_a}$$

$$R_a = \frac{1}{\sqrt{h_f P k A_c} \cdot \mathrm{Tanh}(mL)}$$

- **8-21** continuação.

Cálculo da aleta

$$P = \pi \cdot d = \pi \cdot 0.005 = 0.0157m$$

$$Ac = \pi d^2 / 4 = 1.9635 \cdot 10^{-5} m^2$$

$$m = \sqrt{\frac{h \cdot P}{kA_c}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 0.0157}{56.7 \cdot 1.96 \cdot 10^{-5}}} = 26.56$$

$$R_a = \frac{1}{\sqrt{hPk\ A_c} \cdot \tanh(mL)} = 51.06$$

Cálculo da base

$$A_b = (1cmx1cm - A_c) = 8.034 \cdot 10^{-5} m^2$$

$$R_b = \frac{1}{h \cdot A_b} = 248.9$$

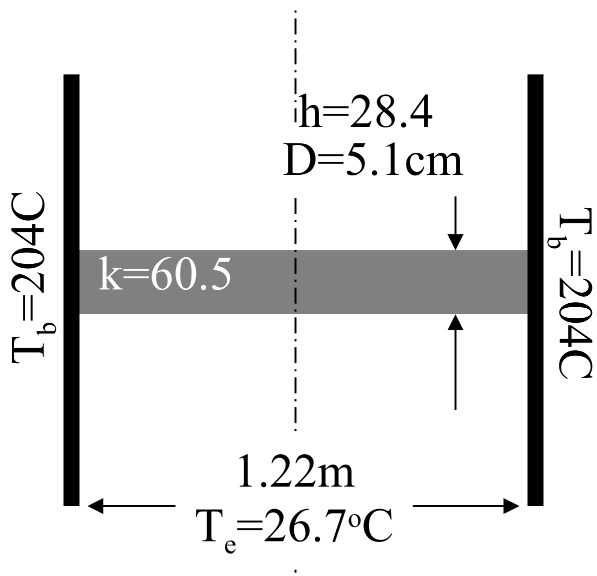
Taxa de Calor

$$Req = \frac{R_a \cdot R_b}{(R_a + R_b)} = 42.4$$

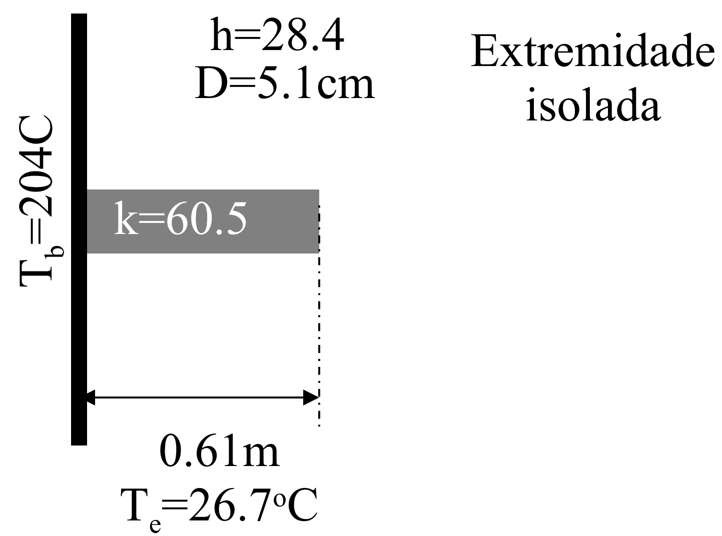
$$\dot{Q} = 6.6W$$

- **8-22** Uma haste de aço carbono com 5.1cm de diâmetro é instalada como suporte estrutural entre duas superfícies que estão a 204°C. O comprimento da haste exposta ao ar a 26.7°C é de 1.22m. O coeficiente de transferência de calor por convecção é de 28.4 W/m²°C. Determine a taxa de transferência de calor da barra para o ar. *Dica: analise o problema como se a barra fosse composta por duas aletas com extremidades isoladas – simetria em transf calor é frequentemente utilizada para resolver problemas.*

Montagem Física



Problema Equivalente



- **8-22** continuação.

Cálculo da aleta

$$P = \pi \cdot d = \pi \cdot 0.051 = 0.160\text{m}$$

$$Ac = \pi d^2 / 4 = 2 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^2$$

$$m = \sqrt{\frac{h \cdot P}{kA_c}} = \sqrt{\frac{28.4 \cdot 0.16}{60.5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = 6.06$$

$$R_a = \frac{1}{\sqrt{hPk\ A_c} \cdot \tanh(mL)} = 1.349$$

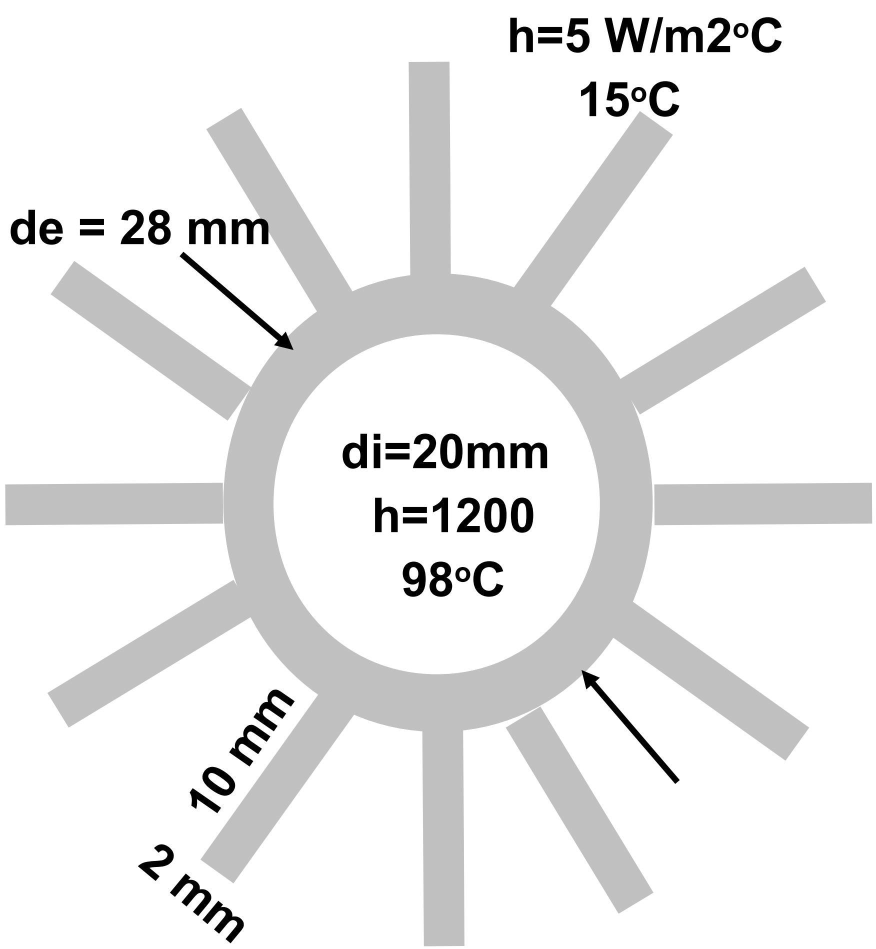
Taxa de Calor

$$\dot{Q} = \frac{(Te - Tb)}{Ra} = \frac{(204 - 26.7)}{1.349} = 131.5\text{W}$$

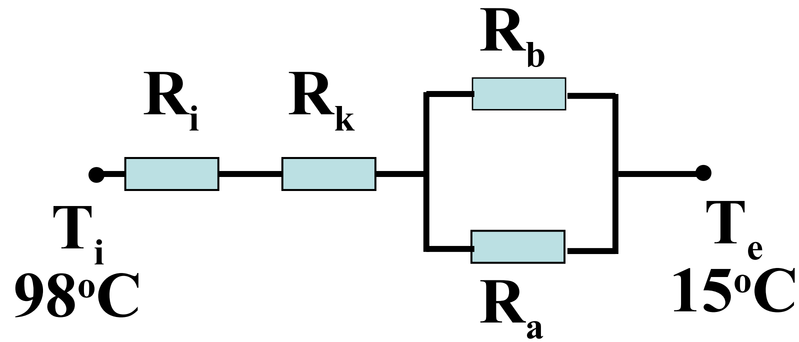
131.5W é a taxa de calor que UMA aleta transfere, portanto a barra toda transferirá 263W

Ex. 8-23: *Qual é o Q transf. por metro tubo?*

Material do Tubo & Aletas: Bronze (tab. A14)



Circuito Equivalente

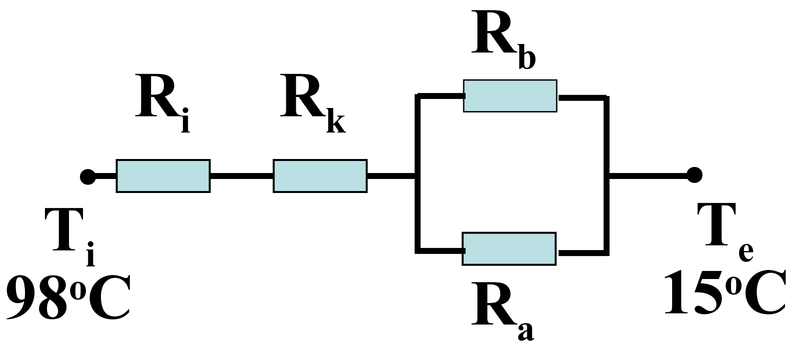


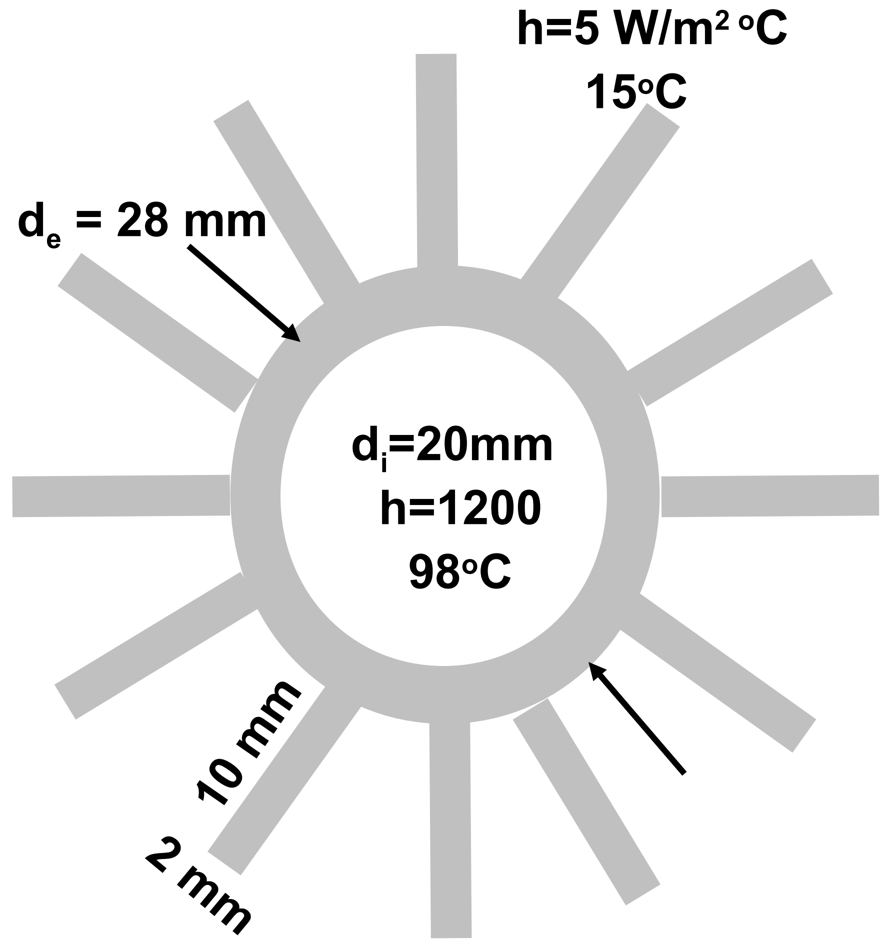
$$Q = (T_i - T_e)/R_{eq}$$

&

$$R_{eq} = R_i + R_k + (R_b . R_a)/(R_b + R_a)$$

Ex. 8-23: *Cálculo das Resistências*





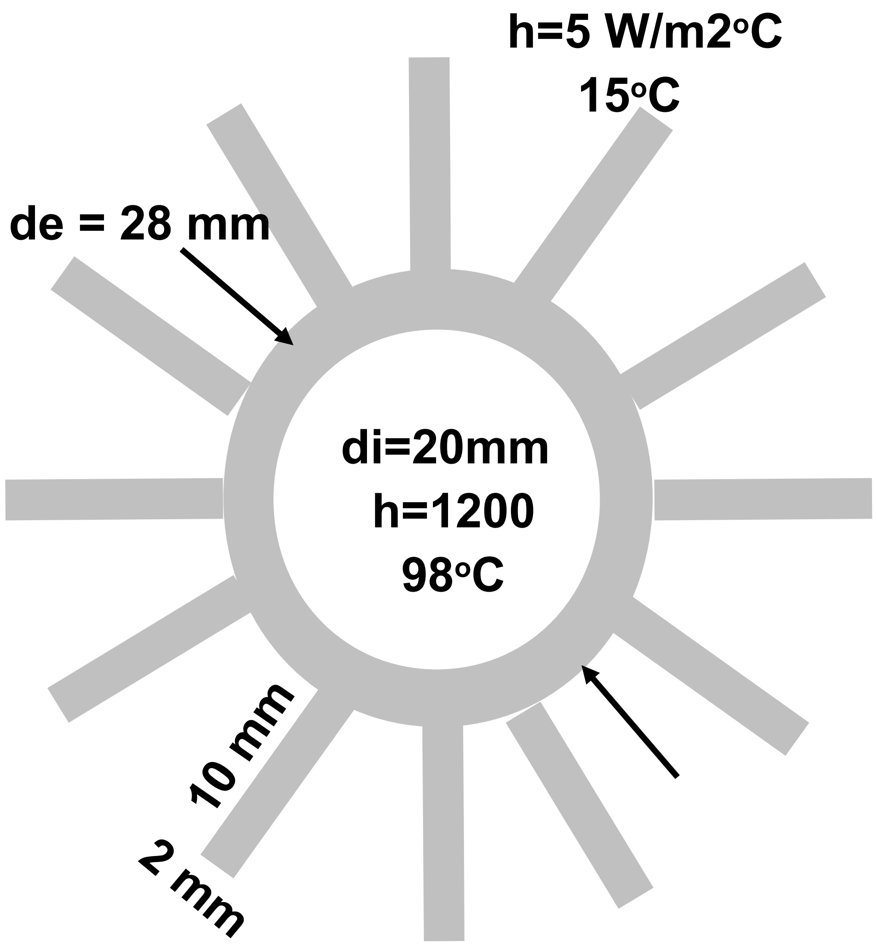
$$Ri = \frac{1}{h_i \pi d_i L} = \frac{1}{1200 \cdot \pi \cdot 0.02 \cdot L} = \frac{0.03}{L}$$

$$Rk = \frac{Ln\left(d_e/d_i\right)}{2\pi k L} = \frac{Ln\left(2.8/2\right)}{2\pi 54 \cdot L} = \frac{9.92 \cdot 10^{-4}}{L}$$

$$R_b = \frac{1}{h_e A_b} = \frac{1}{h_e L\left(\pi d_e - 12.0{,}002\right)} = \frac{3{,}13}{L}$$

Ex. 8-23: *Resistência da Aleta*

Material do Tubo & Aletas: Bronze (tab. A14)



$$\text{Perimetro Aleta} \rightarrow P = 2L(m)$$

$$\text{Area transv. Aleta} \rightarrow A_c = 0.002L\ (m)$$

$$\text{Área Int. Tubo} \rightarrow A_i = \pi \cdot 0{,}02L = 0{,}06L\ (m)$$

$$\text{Área Base} \rightarrow A_b = (\pi 0{,}028 - 12 \cdot 0{,}002)L =$$

$$A_b = 0{,}06L\ (m)$$

$$\text{Comprimento Aleta} \rightarrow L_a = 0{,}01\ (m)$$

$$hi = 1200\ W/m^{2\,0}C$$

$$he = 5\ W/m^{2\,0}C$$

$$k = 54 W/m\ ^0C$$

$$m = \sqrt{\frac{h_e P}{k A_c}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2}{54 \cdot 0{,}002}} = 9{,}62$$

$$mL_a = 9{,}62 \cdot 0{,}01 = 0{,}0962$$

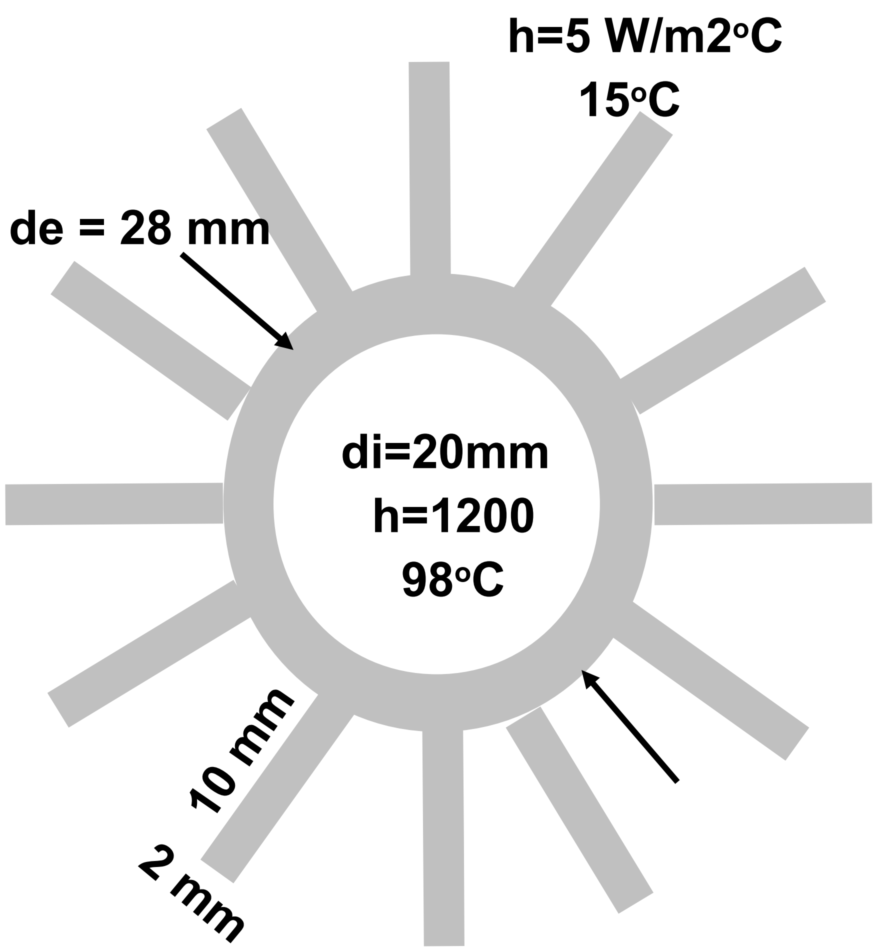
$$\text{Tanh}(mL) = 0{,}10$$

$$\sqrt{h_e P k A_c} = \sqrt{5 \cdot 2 \cdot L \cdot 54 \cdot 0{,}002 \cdot L} =$$

$$= 1{,}04L\left(W/^{o}\ C\right)$$

Ex. 8-23: *Resistência da Aleta*

Material do Tubo &
Aletas: Bronze (tab. A14)



Considerando uma aleta:

$Q = \Delta T/Ra$

Se tivermos N aletas,

$Q_T = N.Q = N\Delta T/Ra$

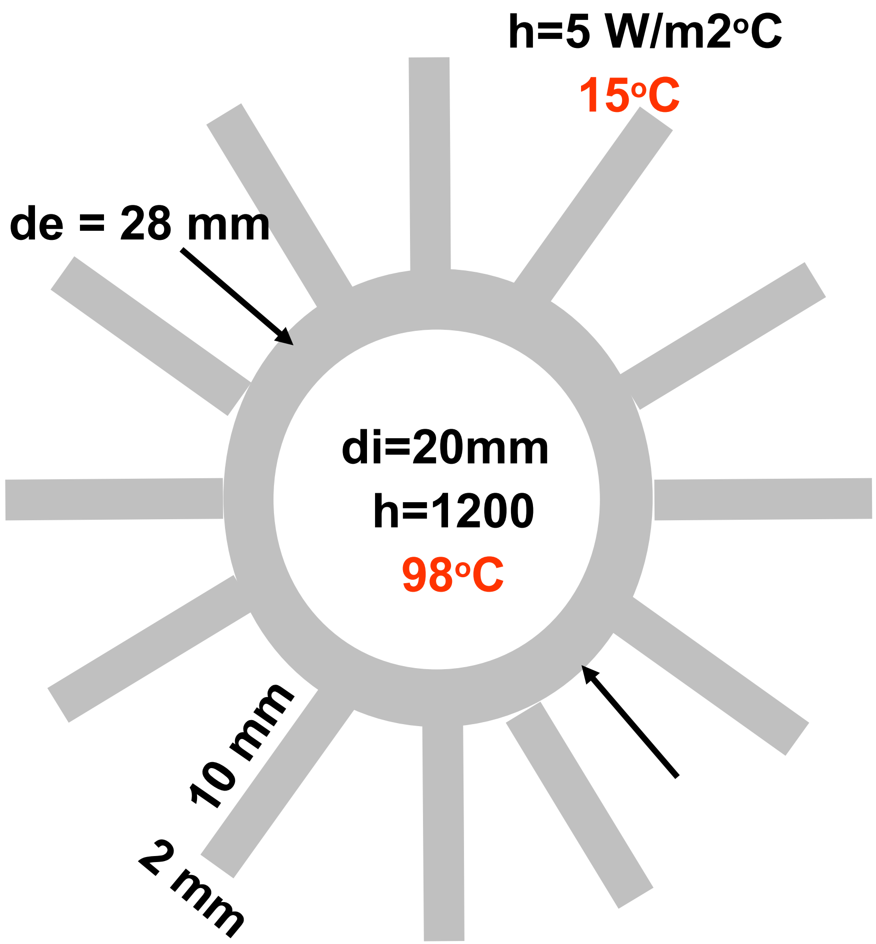
Logo $Ra_T = Ra/N$

Para o problema,

$$Ra_T = \frac{1}{N\sqrt{hPkA_c}\,Tanh(mL)} = \frac{1}{12\cdot 1.04\cdot 0.1} = \frac{0.80}{L}$$

Ex. 8-23: *Calculo do Calor Transferido*

Material do Tubo & Aletas: Bronze (tab. A14)



$$Q = (T_i - T_e)/R_{eq}$$

&

$$R_{eq} = R_i + R_k + (R_b.R_a)/(R_b+R_a)$$

$$R_{eq} = 0.03/L + 0.001/L + 0.64/L$$

$$R_{eq} = 0.67/L$$

Q/L = (98-15)/0.67 = 123.9 W/m

Condução de Calor Bidimensional

- Soluções analíticas para condução térmica em casos 2D requerem um esforço muito maior do que aquelas para casos 1D.

- Há no entanto inúmeras soluções baseadas em técnicas da Física-Matemática, tais como: séries de Fourier, séries de Bessel, séries de Legendre, Transformada de Laplace entre outras, veja por exemplo *Carslaw and Jaeger (1959) Conduction Heat Transfer*.

- Baseado nestas soluções analíticas o Livro Texto propõe a determinação da taxa de calor para algumas situações bi-dimensionais baseado em '*fatores de forma de condução*'.

Fator de Forma de Condução

1. A geometria contém somente DUAS superfícies ISOTÉRMICAS, T1 e T2
2. O material é homogêneo

$$\dot{Q} = S \cdot k \cdot \left(T_2 - T_1\right) \rightarrow R = \frac{1}{S \cdot k}$$

- Onde S é o fator de forma de condução e tem dimensão de metro.
- Note que para uma placa plana unidimensional infinita, S = A/L

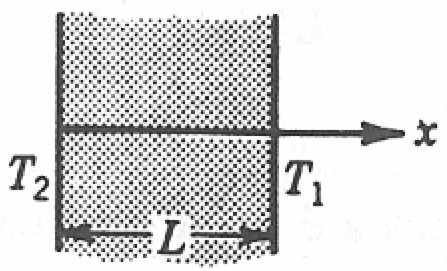
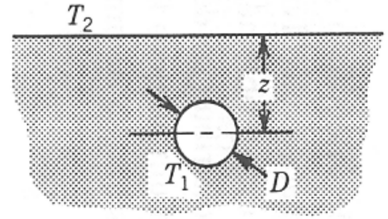
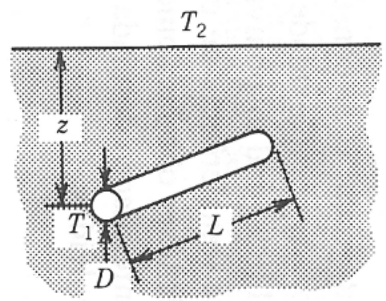
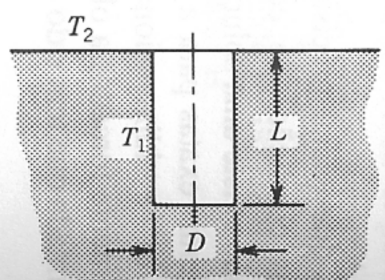
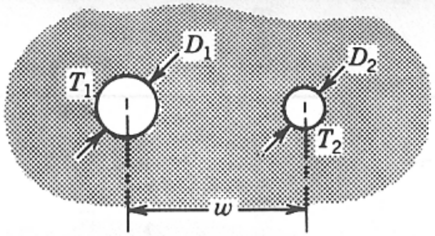
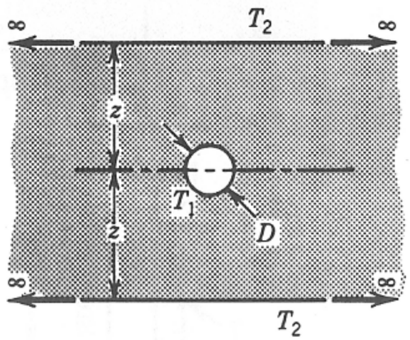
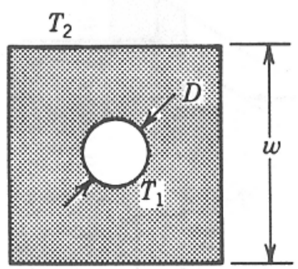
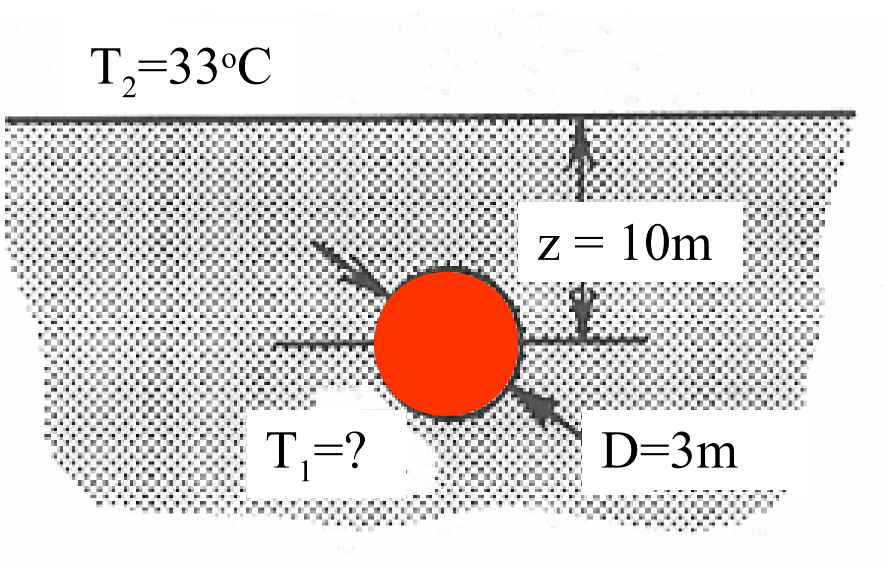


Tabela 8-3 Fatores de forma de condução de calor[11]

Sistema	Esquema	Restrições	Fator de forma
Esfera isotérmica enterrada em um meio semi-infinito		$z > D/2$	$\dfrac{2\pi D}{1 - D/4z}$
Cilindro isotérmico horizontal de comprimento *L* enterrado em um meio semi-infinito		$L >> D$	$\dfrac{2\pi L}{\cosh^{-1}(2z/D)}$
		$L >> D$ $z > 3D/2$	$\dfrac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$
Cilindro vertical em um meio semi-infinito		$L >> D$	$\dfrac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$

Condução entre dois cilíndros de comprimento L em um meio infinito		$L >> D_1 D_2$ $L >> w$	$\dfrac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1 D_2}\right)}$
Cilindro circular horizontal de comprimento L entre placas paralelas de comprimento igual e largura infinita		$z > D/2$ $L >> z$	$\dfrac{2\pi L}{\ln(8z/D)}$
Cilíndro circular de comprimento L inserido em um sólido quadrado		$w > D$ $L >>> w$	$\dfrac{2\pi L}{\ln(1,08w/D)}$

- **8-25** Resíduo de material radioativo é colocado em uma esfera que é então enterrada na terra (k=0,52W/m°C). A esfera tem um diâmetro de 3m e seu centro é enterrado 10m abaixo da superfície do solo. A taxa de transferência de calor liberada no início do processo de armazenamento é de 1250W. Estime a temperatura da superfície da esfera se a temperatura do solo é de 33°C.



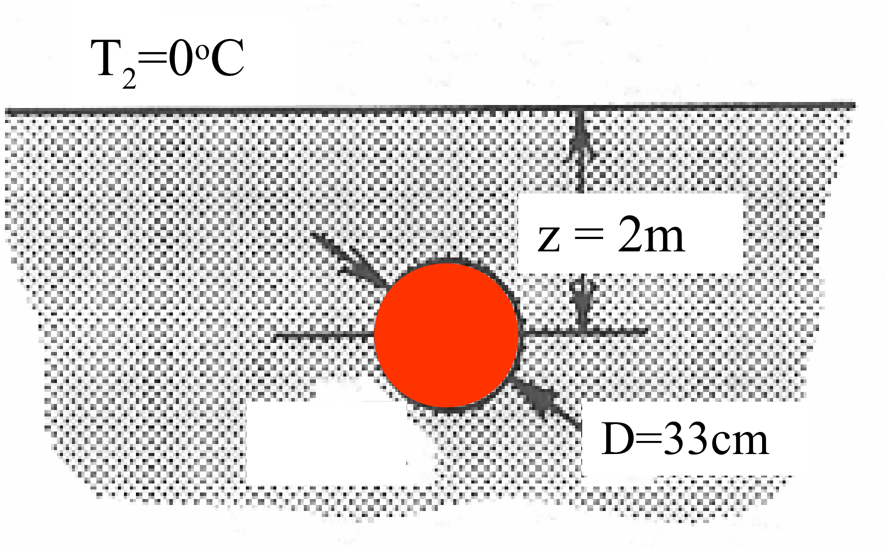
$$\dot{Q} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_s} \rightarrow T_1 = T_2 + \dot{Q} \cdot R_s$$

$$S = \frac{2\pi D}{1 - D/4z} = 20,38\text{m} \qquad z>D/2$$

$$R_s = \frac{1}{S \cdot k} = 10,6\ {}^{o}\text{C/W}$$

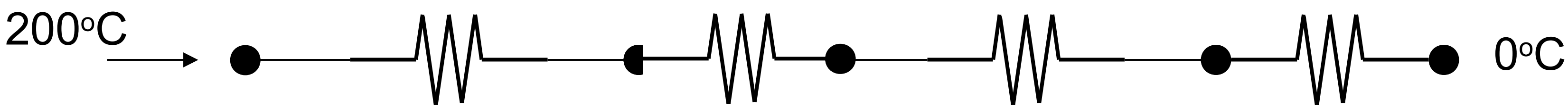
$$T_1 = 150,9^{o}\text{C}$$

- **8-28** Uma tubulação com vapor d'agua a 200°C está enterrada a 2 m abaixo do solo (ksolo = 41 W/m°C) que está a 0°C. O tubo (k = 41 W/m°C) tem um diâmetro interno de 20 cm e uma espessura de 5mm com um coef transf calor interno de 1000 W/m²°C. O tubo é envolto em uma manta isolante (k = 0,06 W/m°C) com 6 cm de espessura. Determine a taxa de calor perdida por metro linear de tubo



- A taxa de transferência de calor do vapor para o solo pode ser determinada pelo circuito equivalente:

$$R_c = \frac{1}{hi \cdot Ai} \qquad R_{isol} = \frac{Ln\left(d_3/d_2\right)}{2\pi k_{isol} \cdot L}$$



$$R_{aco} = \frac{Ln\left(d_2/d_1\right)}{2\pi k_{aco} \cdot L} \qquad R_s = \frac{1}{S \cdot k}$$

$$R_c = \frac{1}{hi \cdot Ai} = \frac{1}{1000 \cdot \pi \cdot 0,2} = 0,002\ / \ L$$

$$R_{aco} = \frac{Ln\left(d_2/d_1\right)}{2\pi k_{aco} \cdot L} = \frac{Ln\left(21/20\right)}{2\pi 41 \cdot L} = 1,89 \cdot 10^{-4}\ / \ L$$

$$R_{isol} = \frac{Ln\left(33/21\right)}{2\pi \cdot 0,06 \cdot L} = 1,117\ / \ L$$

$$S = \frac{2\pi L}{Ln\left(4z/D\right)} = 1,971 m$$

$$R_s = \frac{1}{S \cdot k} = 0,976\ / \ L$$

$$R_{eq} = 2,095\ / \ L$$

$$\dot{Q}/L = 95,5 W$$