TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO

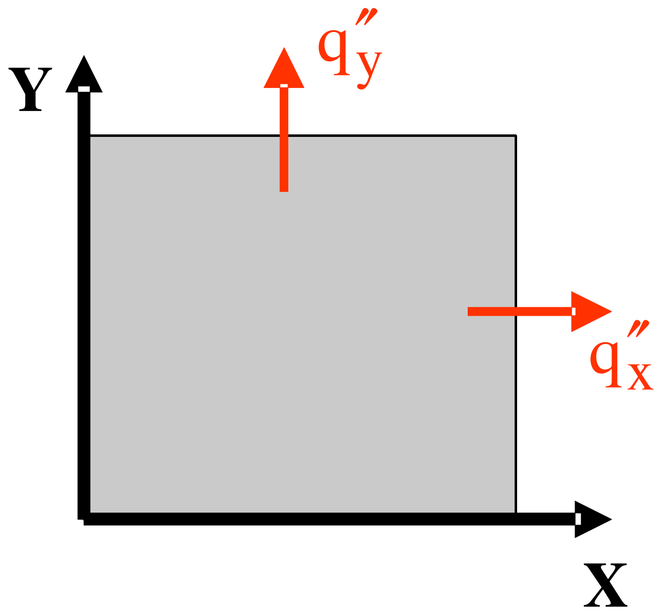
Modelo de Condução Térmica

- **O mecanismo de transmissão de calor por condução térmica consiste de um Processo de Difusão .**
- **Uma espécie (*massa, concentração, temperatura, e outra grandeza escalar*) é transportada da região de 'maior' concentração para a de 'baixa'.**
- **Joseph Fourier modelou a difusão em função do gradiente da espécie e de uma constante de proporcionalidade.**

Modelo de Condução Térmica

- **O taxa de calor por unidade de área, ou fluxo de calor q", *<u>depende da área onde ele cruza</u>*, portanto possui uma natureza vetorial!**

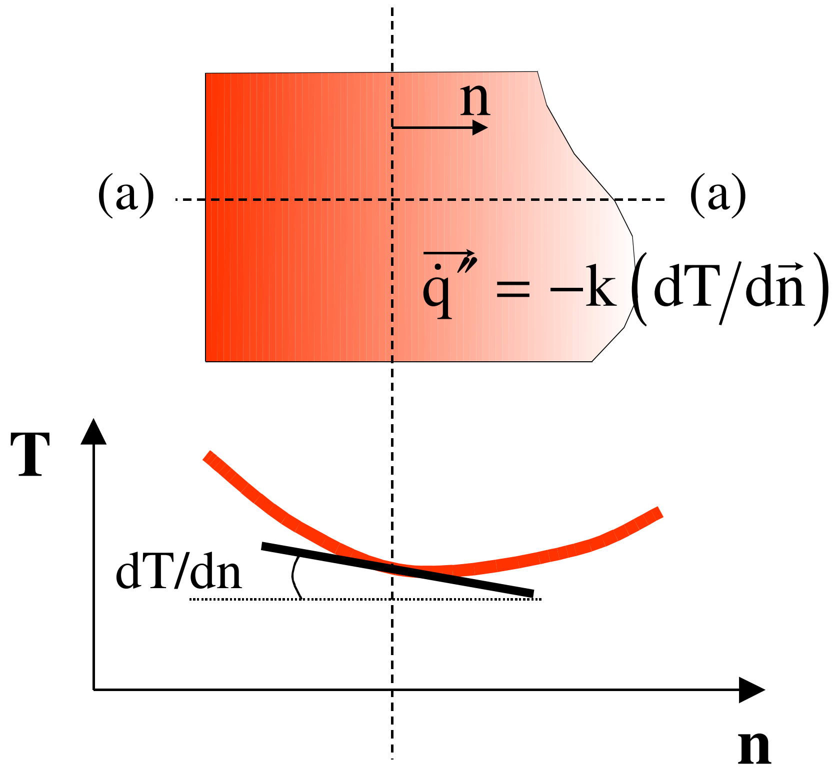
$$\vec{\dot{q}}'' = \vec{i}\,\dot{q}_x'' + \vec{j}\,\dot{q}_y''$$



Modelo de Condução Térmica

- **A taxa de calor por unidade de área que cruza uma superfície cuja normal é n, é função do *gradiente térmico*, dT/dn e da *constante de proporcionalidade, k* .**

$$\vec{\dot{q}}'' = \frac{\vec{\dot{Q}}}{A} = -k\,\frac{\partial T}{\partial n}$$



Perfil de temperatura ao longo da linha a-a, paralela ao vetor normal n

Condutividade Térmica: (kcal/s)/ (°Cm)

Alumínio	$4{,}9 \times 10^{-2}$
Cobre	$9{,}2 \times 10^{-2}$
Aço	$1{,}1 \times 10^{-2}$
Ar	$5{,}7 \times 10^{-6}$
Gelo	4×10^{-4}
Madeira	2×10^{-5}
Vidro	2×10^{-4}
Amianto	2×10^{-5}

1 kcal = 4184 J

Vácuo $\rightarrow k = 0$ (não há difusão térmica no vácuo; para haver difusão é necessário haver um meio para a temperatura difundir!

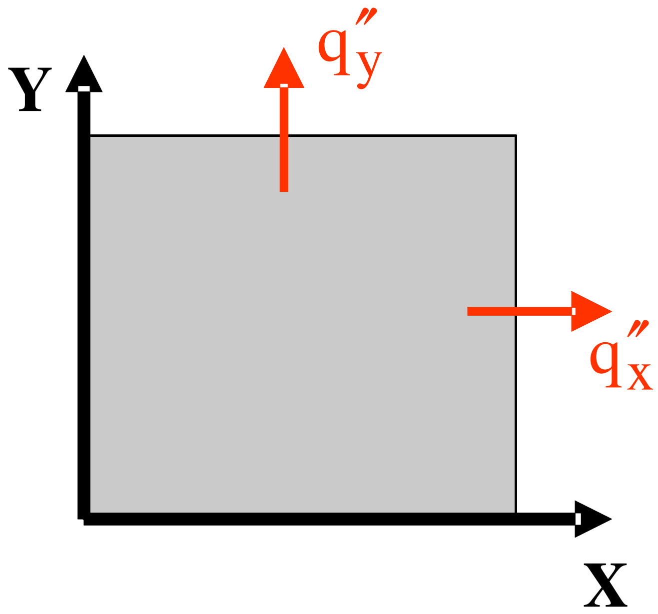
Modelo de Condução Térmica

- **O fluxo de calor na direção x:** $\dot{q}''_x = -k\left(dT/dx\right)$
- **O fluxo de calor na direção y:** $\dot{q}''_y = -k\left(dT/dy\right)$

$$\vec{\dot{q}}'' = \vec{i}\,\dot{q}_x'' + \vec{j}\,\dot{q}_y''$$

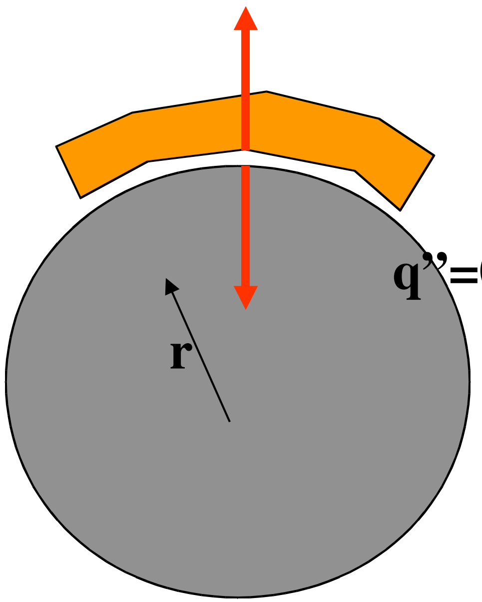
$$\vec{\dot{q}}'' = -\vec{i}\,k\frac{\partial T}{\partial x} - \vec{j}\,k\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\vec{\dot{q}}'' = -k\nabla T$$



8-2 Uma lona de freio é pressionada contra um tambor rotativo de aço. Calor é gerado na superfície de contato tambor-lona na taxa de 200 W/m². 90% do calor gerado passa para o tambor de aço, o restante passa pela lona. Determine o gradiente térmico no ponto de contato tambor-lona

$q'' = 0.1 \times 200 = 20 \, W/m^2$



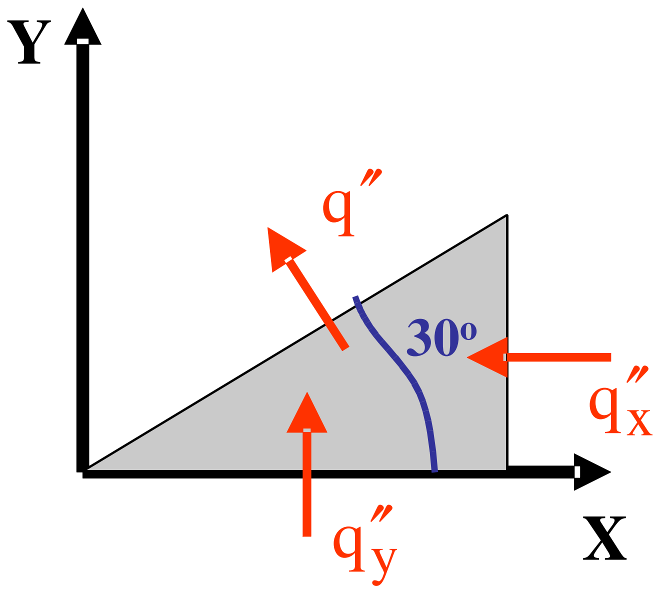
$q'' = 0.9 \times 200 = 180 \, W/m^2$

$$q'' = -k \, dT/dr \rightarrow dT/dr = -q''/k$$

Ex. 8.3 O fluxo de calor na superfície diagonal da cunha de baquelite é de 680 Btu/h.ft². Determine o fluxo de calor e o gradiente de temperatura nas direções x e y

Fluxo calor x, $q''_x = q''.\sin 30^o = -340$ Btu/h.ft²

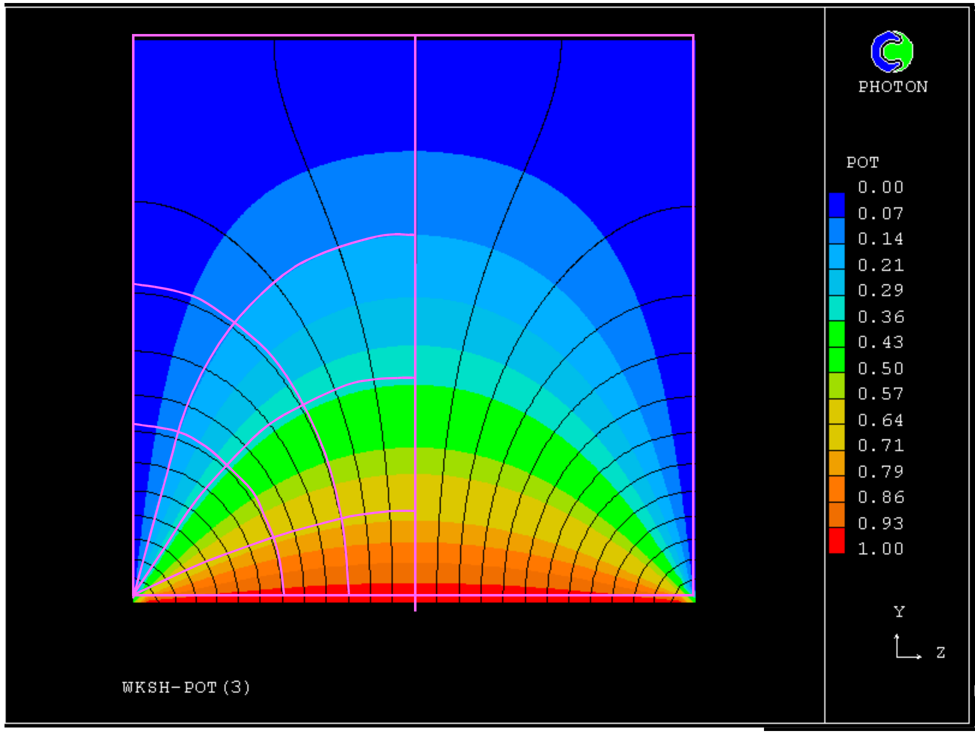
Fluxo calor y, $q''_y = q''.\cos 30^o = 589$ Btu/h.ft2

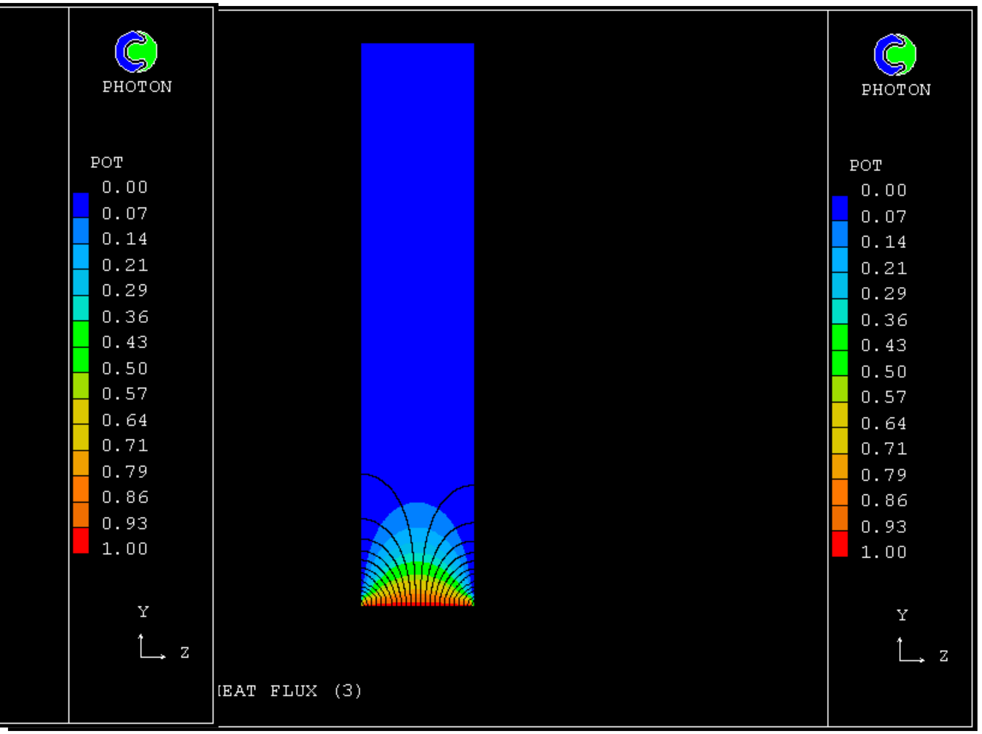


Grad T, x, → $dT/dx = -q_x/k$

Grad T, y, → $dT/dy = -q_y/k$

Temperatura e Linhas de Fluxo de Calor
As dimensões do domínio afetam o campo de temperatura?

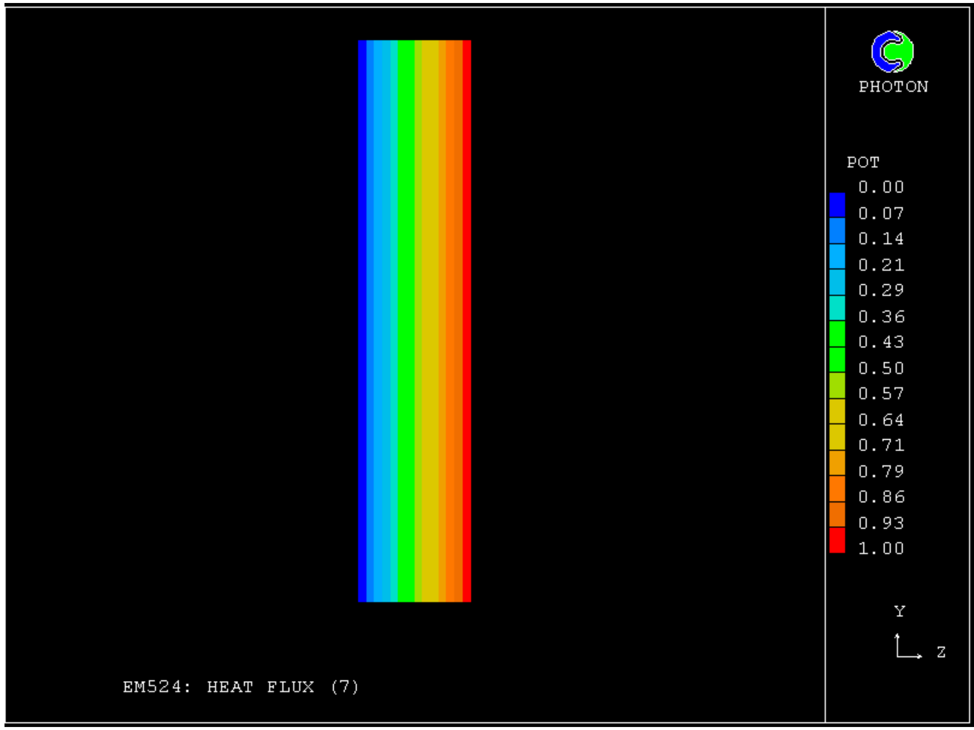


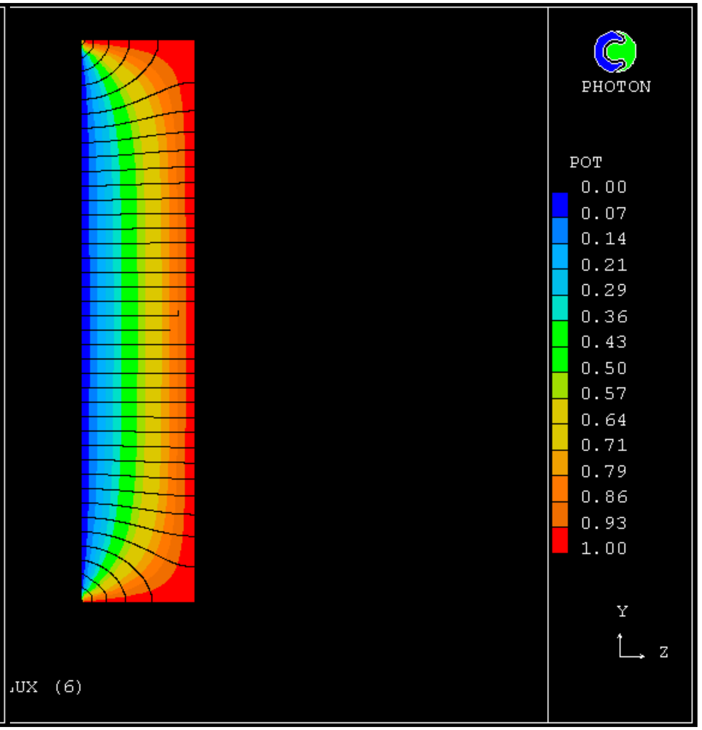


Bloco quadrado 1:1
temperatura nas faces
1,0,0,0

Bloco retangular 1:5
temperatura nas faces
1,0,0,0

Temperatura e Linhas de Fluxo de Calor
Uma condição 2D pode ser aproximada por uma solução 1D?

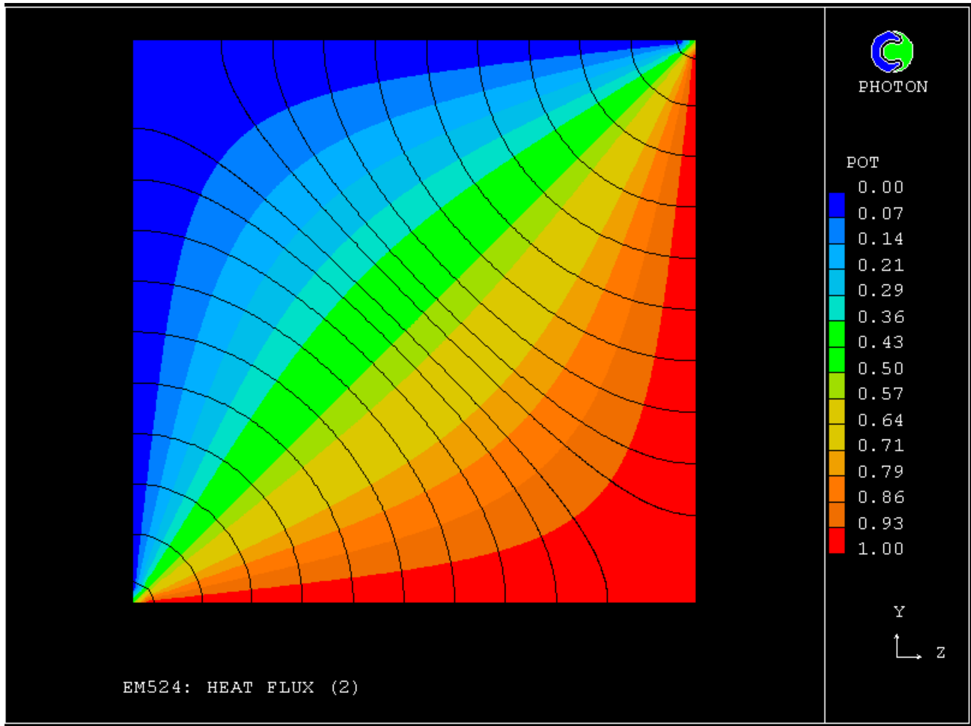


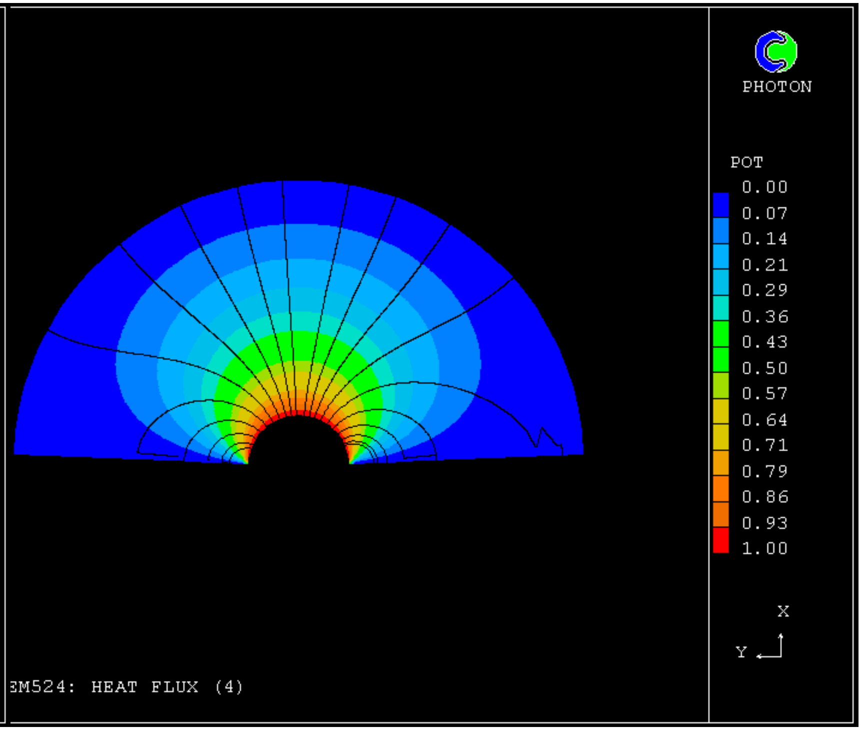


Campo Temp. Unidimensional
temperatura nas faces: 1,0
demais faces isoladas

Campo Temp. Bidimensional
temperatura nas faces
1,0,1,1

Temperatura e Linhas de Fluxo de Calor

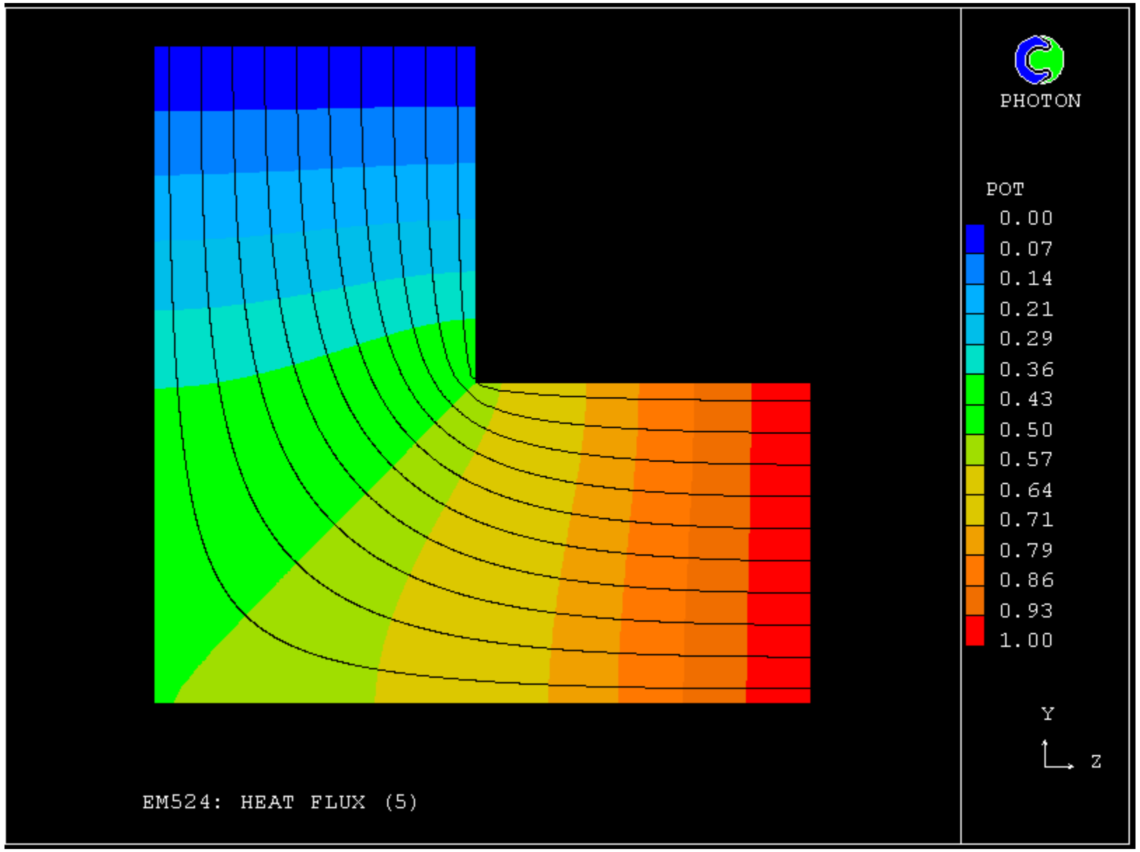




Bloco quadrado 1:1
temperatura nas faces
1,0,0,1

Coroa circular
temperatura nas faces
1,0,0,0

Temperatura e Linhas de Fluxo de Calor



Viga L
Faces isoladas
Temperatura 1 & 0 nas extremidades

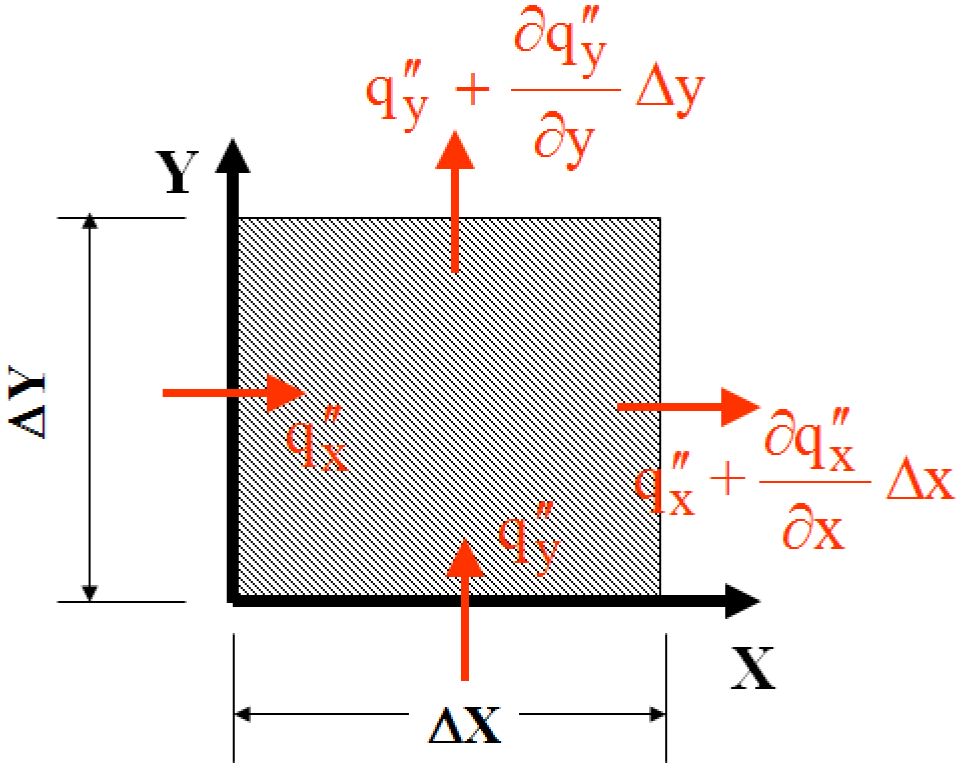
Equação da Condução: <u>*Balanço Energia (1ª Lei)*</u>

Considere um V.C. infinitesimal, ΔX e ΔY e a 1ª Lei:

$$\dot{Q}_{gen} = \frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, e\, d\forall + fluxo\, de\, calor$$

$$\dot{q}'''\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z + \nabla \cdot \vec{\dot{q}}''\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

Balanço infinitesimal de calor:



$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q}''' - \nabla \cdot \vec{\dot{q}}''$$

Se regime permanente e sem prod.
Interna de calor:

$$\nabla \cdot \vec{\dot{q}}'' = 0$$

Equação da Condução: *Balanço Energia (1ª Lei)*

Substituindo a definição da Lei de Fourier para a equação do calor, sem prod. Interna de calor:

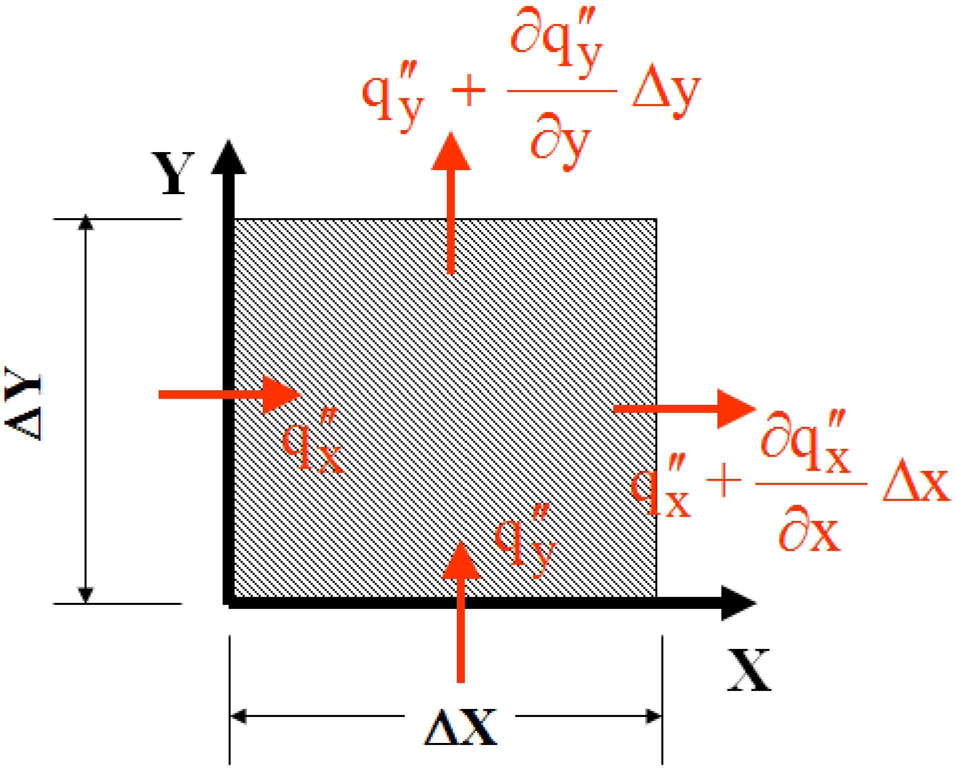
$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla . \dot{\vec{q}}'' = -\nabla . (-k \nabla T)$$

para k constante:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T$$

Se regime permanente

$$\nabla^2 T = 0$$



Analogia: Regime Permanente

- Campo elétrico E $\rightarrow$ fluxo de calor q”
- Potencial elétrico V $\rightarrow$ Temperatura T

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \overrightarrow{\dot{\mathbf{q}}''} = 0$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \varepsilon \nabla \mathbf{V} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{\dot{\mathbf{q}}''} = -\mathbf{k} \nabla \mathbf{T}$$

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{V} = \nabla^2 \mathbf{V} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot (-\mathbf{k} \nabla \mathbf{T}) = \nabla^2 \mathbf{T} = 0$$

ε – dielétrico do meio

Formas da Eq. Condução

Propriedades Constantes

- **Cartesiano:**

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$$

- **Cilíndrico**

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$$

Regime Permanente: Lapl.T=0

- **O laplaciano da temperatura é uma E.D.P Elípitca. Para resolvê-la é necessário informação em todo o contorno!**

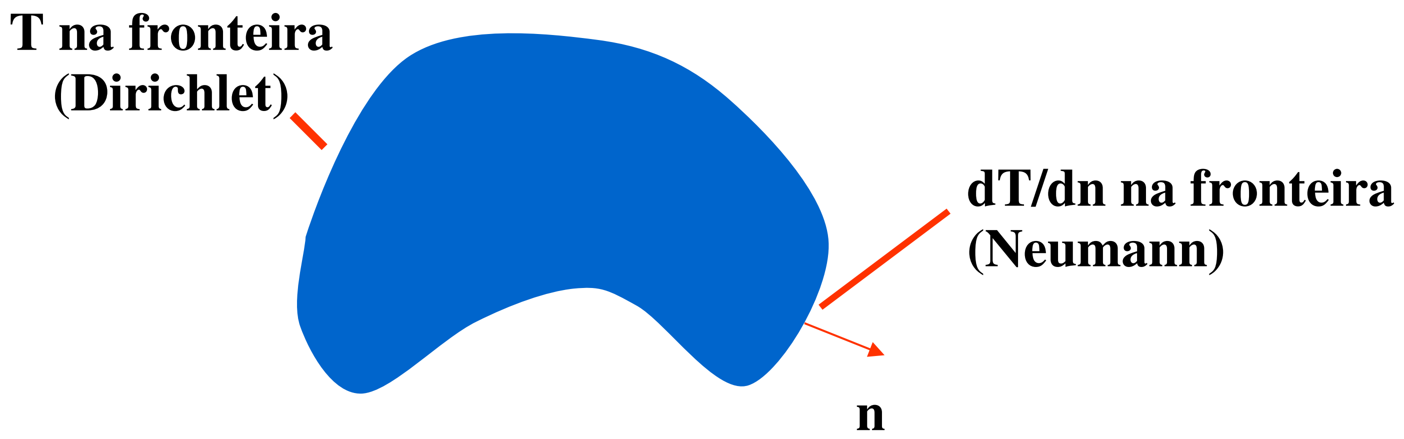


Tabela 8-1 Tipos de Condições de Contorno

Classificação	
I. **Temperatura especificada**	$T = T_s$
II. Fluxo de calor constante	$-k \dfrac{\partial T}{\partial \eta} = \dot{q}_p''$
III. Adiabático	$-k \dfrac{\partial T}{\partial \eta} = 0$
IV. Dois sólidos	$-k_1 \dfrac{\partial T}{\partial \eta} = -k_2 \dfrac{\partial T}{\partial \eta}$
V. Convecção	$-k \dfrac{\partial T}{\partial \eta} = h(T_\infty - T)$
VI. Radiação	$-k \dfrac{\partial T}{\partial \eta} = \dot{q}_{\text{rad}}''$
VII. Radiação e convecção combinadas	$-k \dfrac{\partial T}{\partial \eta} = h(T_\infty - T) + \dot{q}_{\text{rad}}''$

Condução 1D, Regime Permanente

- **Equação Geral**

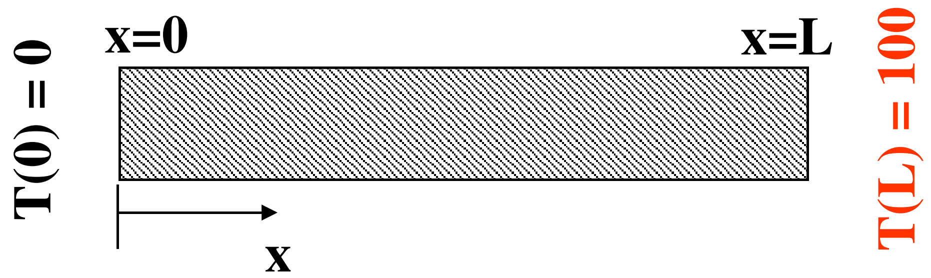
$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

- Solução Geral

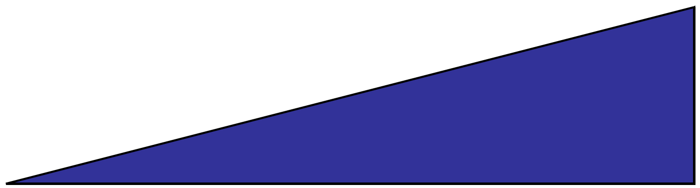
$$T(x) = A \cdot x + B$$

PERFIL LINEAR DE TEMPERATURA

Solução: Temperatura Especificada



$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

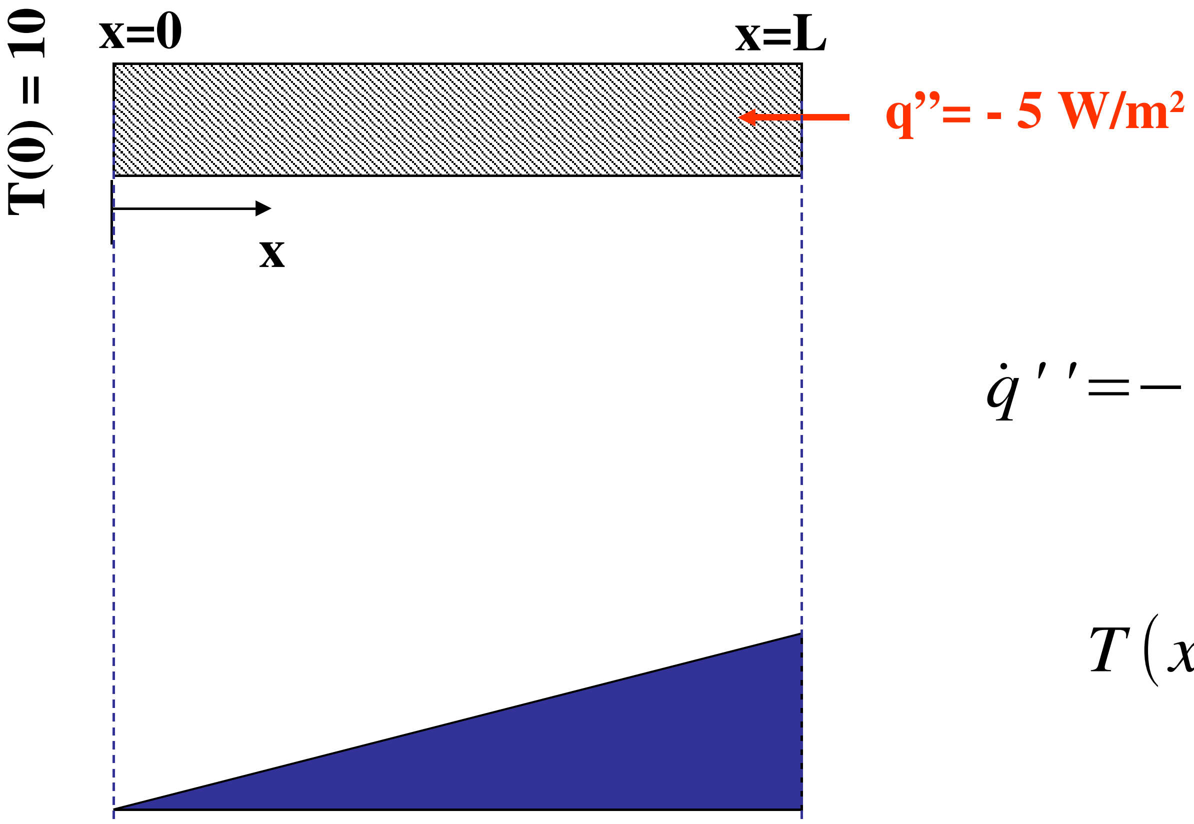


$$T(x) = \frac{100}{L} \cdot x + 0$$

GRADIENTE TEMPERATURA = 100/L

q”=-k(100/L)

Solução: Fluxo Calor Especificado



$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

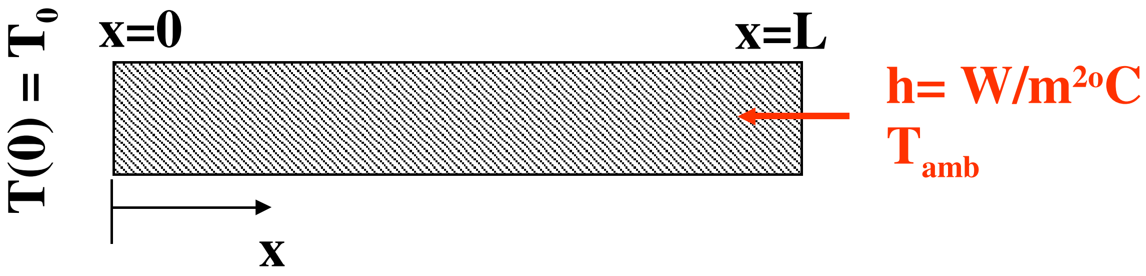
$$\dot{q}'' = -k\frac{dT}{dx} \rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{-\dot{q}''}{k}$$

$$T(x) = \left(\frac{-\dot{q}''}{k}\right)x + 10$$

GRADIENTE TEMPERATURA = -q”/k

q” =-k(-q” /k) = q”

Solução: Coef. Transf Calor Especificado



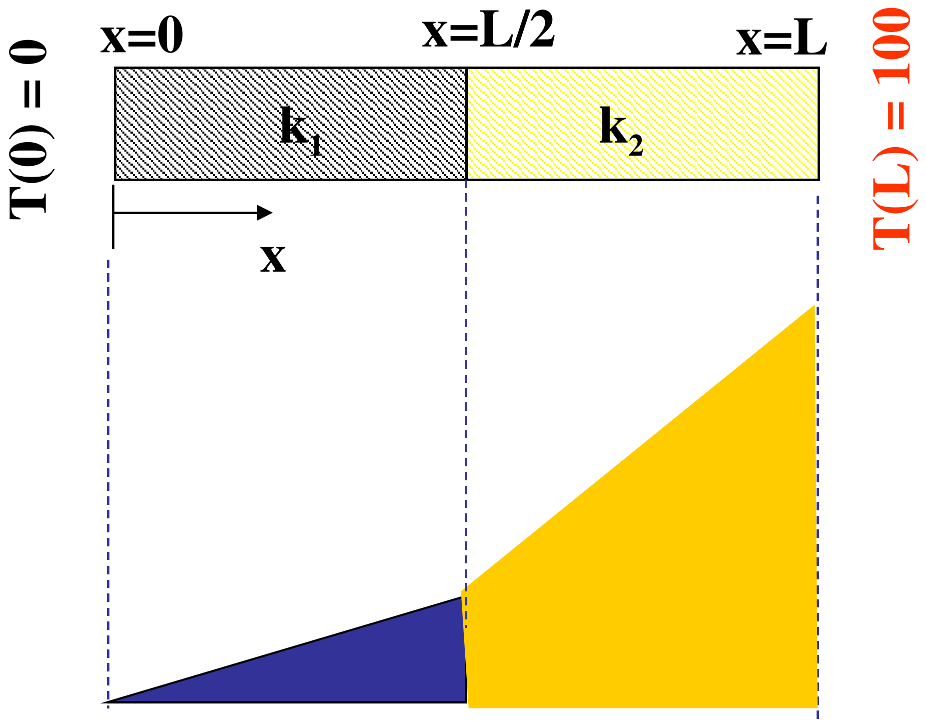
$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

$$h\left(T_L - T_{amb}\right) = -k\,\frac{dT}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dx} = A = -\,\frac{h\left(T_L - T_{amb}\right)}{k}$$

$$T(0) = T_0 = B \quad \rightarrow \quad T(L) = T_L = A \cdot L + T_0$$

A definição $q'' = h(T_L - T_{amb})$ está de acordo com o sentido do eixo x. Note que se $T_L > T_{amb}$ $q'' > 0$ e $T_L < T_{amb}$, $q'' < 0$.

Solução: Temperatura Especificada & Dois Materiais, $k_1 > k_2$



$$d^2T/dx^2 = 0$$

Condições Contorno

$x=0 \rightarrow T=0$

$x=L \rightarrow T=100$

$x=L/2 \rightarrow k_1 dT_1/dx = k_2 dT_2/dx$

Equações

$x=0 \rightarrow T_0=B_1$

$x=L \rightarrow T_L=A_2.L+B_2$

$x=L/2 \rightarrow k_1.A_1= k_2A_2$

$x=L/2 \rightarrow A_1(L/2)+B_1= A_2\,(L/2)+ B_1$

$$\dot{q}'' = \frac{T_L - T_0}{\left(L/2k_1 + L/2k_2\right)}$$

$$\dot{Q} = kA\frac{\Delta T}{L} \quad \text{ou} \quad \dot{Q} = hA\Delta T$$

Tabela 8-2 Analogia entre o fluxo de calor e a corrente para uma seção unidimensional

	Elétrico	Calor
Fluxos	i	$\dot{Q}$
Diferença de potencial	Δe	ΔT
Resistência ao fluxo	R	$R_t = \frac{L}{kA}$

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R} \quad \text{onde} \quad R_k = \frac{L}{kA} \quad \text{ou} \quad R_h = \frac{1}{kA}$$

$$i = \Delta e / R$$

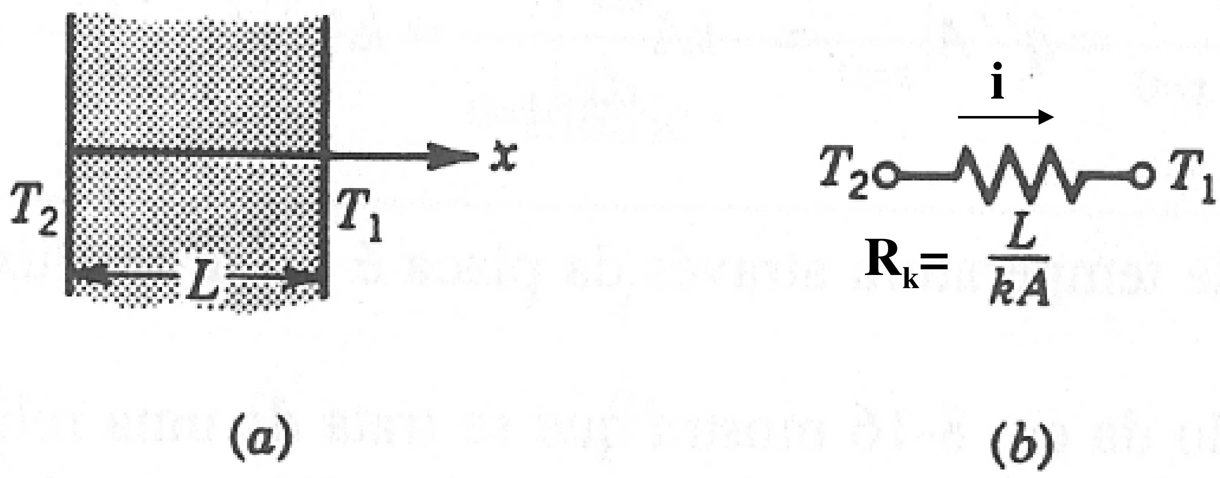


Figura 8-5 Transferência de calor unidimensional. (a) Placa unidimensional. (b) Circuito térmico equivalente.

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R} = \frac{kA}{L}\left(T_2 - T_1\right)$$

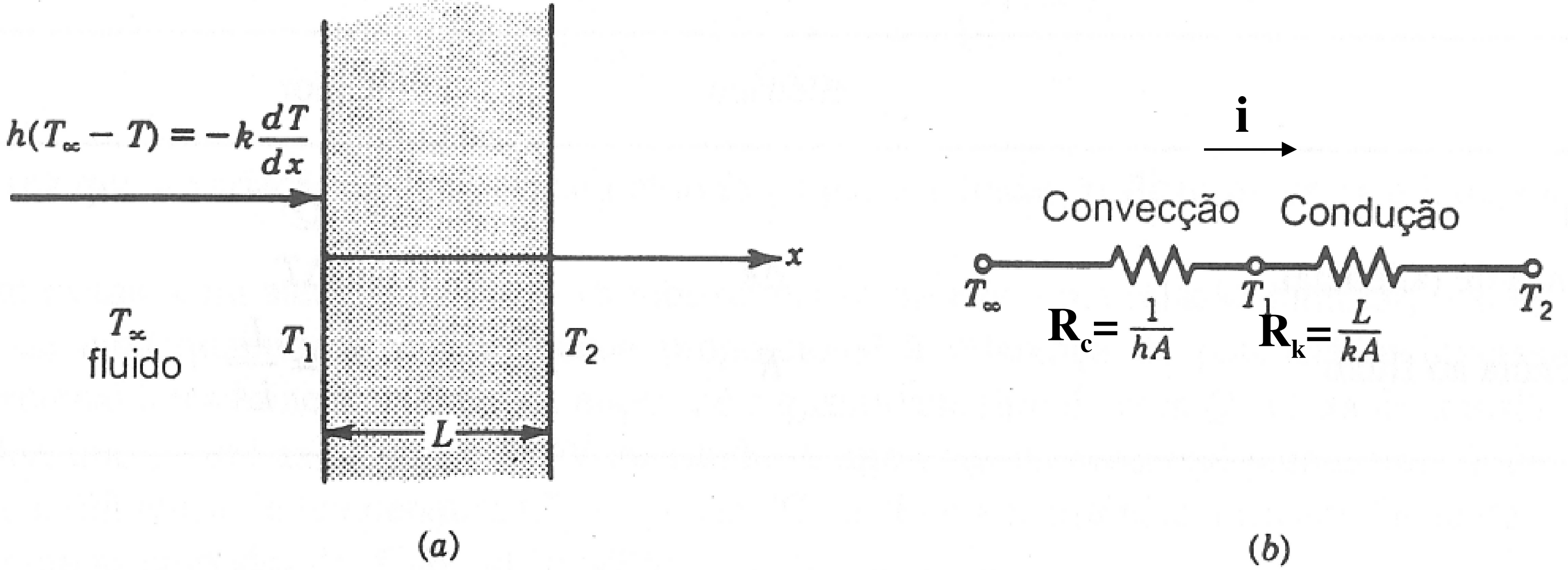
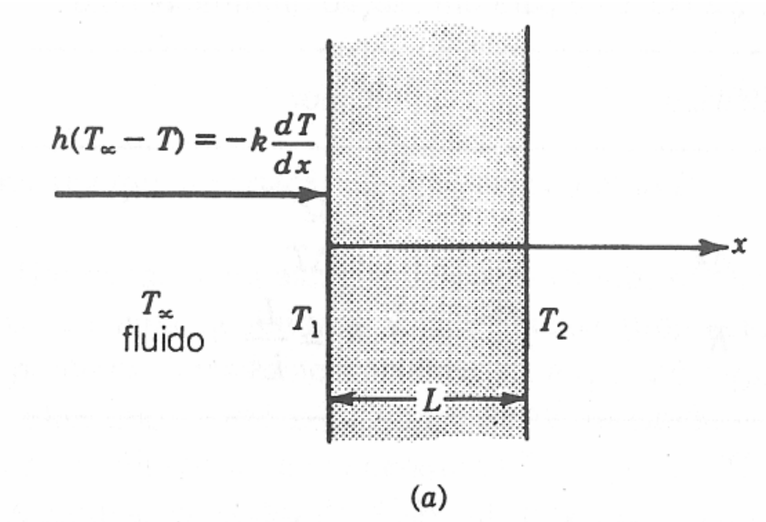


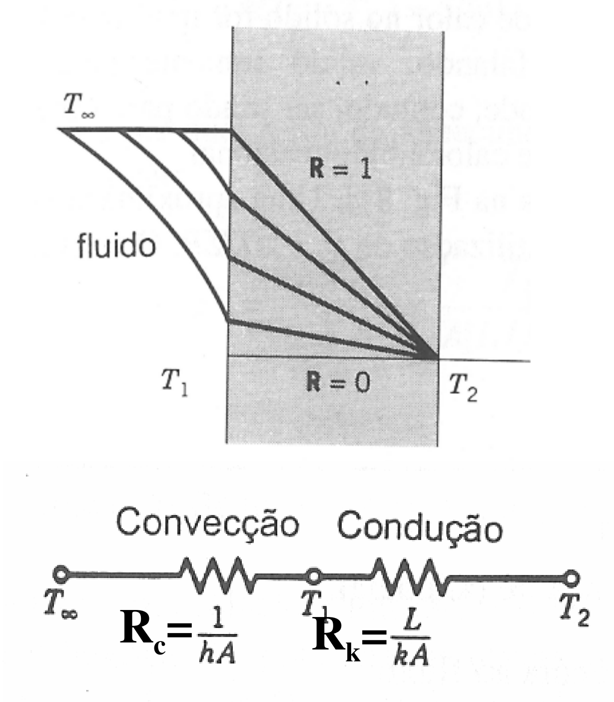
Figura 8-6 Placa semi-infinita com convecção como condição de contorno na fronteira. (a) Placa semi-infinita. (b) Circuito equivalente para a placa.

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{\sum R} = \frac{(T_\infty - T_2)}{\left(\dfrac{1}{hA} + \dfrac{L}{kA}\right)}$$

$$\frac{(T_\infty - T_1)}{\dfrac{1}{hA}} = \frac{(T_1 - T_2)}{\dfrac{L}{kA}} = \dot{Q}$$

Relação entre as Resistências $R = R_k/(R_c+R_k)$





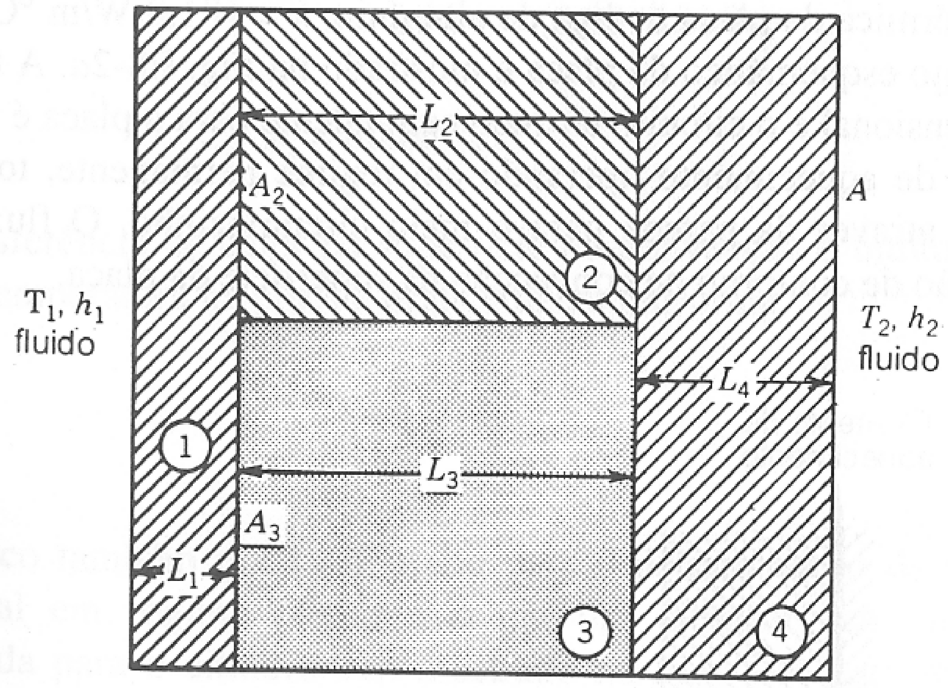
$$\text{Biot,}\quad Bi = \frac{R_k}{R_c} = \frac{hL}{k}$$

$$R = \frac{R_k}{R_c + R_k}$$

$R_c >> R_k \rightarrow R = 0 \quad \& \quad Bi << 1$

$R_c << R_k \rightarrow R = 1 \quad \& \quad Bi >> 1$

Materiais Compostos



(a)