Análise dimensional e semelhança (parte 2)

Ref: White F.M., Mecânica dos Fluidos, Panton, R.L., Incompressible Flow

Teoremas para redução de variáveis

- Para um problema físico onde o parâmetro dependente é função de n-1 parâmetros independentes
  - $q_1=f(q_2, q_3, \ldots, q_n)$
- Matematicamente, podemos expressar em uma forma equivalente:
  - $g(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)=0$

- Existem diversos métodos para redução do número de variáveis dimensionais para menos variáveis adimensionais
  - Teorema Pi de Buckingham é um destes métodos

Teorema Pi de Buckingham (1914)

- Teorema para redução de variáveis
- Sistemática para determinação de grupos adimensionais
- Os grupos adimensionais são produtos de potências
- Grupos adimensionais são denotados por Π (símbolo da produtória)
- $g(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)=0 \;\; -> \;\; G(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_{n-j})$
  - Onde j é usualmente o número de dimensões independentes envolvidas.

Teorema Pi de Buckingham (1914)

- Primeira parte do teorema:

- Se um processo físico satisfaz o Princípio da Homogeneidade Dimensional
- Se ele envolve n variáveis dimensionais
  - Então ele pode ser reduzido a $k = n - j$ variáveis adimensionais
    - Onde j = número máximo de variáveis que não formam um Π entre si mesmas
    - $j \leq$ número de dimensões independentes envolvidas

Teorema Pi de Buckingham (1914)

- Segunda parte do teorema:

- Encontrados j, selecione j variáveis que que não formem um Π entre si
  - Estas serão as variáveis de escala
- Cada Π será um produto de potências dessas j variáveis e de uma variável adicional (cujo expoente é não nulo)

Teorema Pi de Buckingham (1914)

- Suponhamos que temos 5 variáveis e que 3 dimensões independentes estão envolvidas (M, L, T)
  - Podemos inicialmente supor que $j = 3$
- Para tal caso, $k = 5-3 = 2$
  - 2 grupos adimensionais (Π) independenytes
- Devemos escolher $j=3$ variáveis que não formem um Π entre si
  - Por exemplo, sejam q_2, q_3 e q_4
- Os grupos Π são formados como:
  - $\Pi_1 = (q_2)^a\,(q_3)^b\,(q_4)^c q_1 = M^0 L^0 T^0$
  - $\Pi_2 = (q_2)^d\,(q_3)^e\,(q_4)^f q_5 = M^0 L^0 T^0$

Teorema Pi de Buckingham (1914)

- Igualando os expoentes obtemos os valores de a,b,c,d,e,f
- Cada grupo Π é independente pois apenas Π_1 contém q_1 e apenas Π_2 contém q_2

- O slide a seguir apresenta a sistemática do Teorema Pi

Teorema Pi: sistemática

- Liste todas as variáveis envolvidas e estabeleça o valor de n
- Selecione um conjunto de dimensões primárias ([M, L, T, θ] ou [F, L, T, θ]) e liste a dimensão de cada variável
- Encontre j. Um bom valor inicial é j = número de dimensões primárias envolvidas
  - Assegure-se de que há j variáveis dimensionais que não formam um produto entre si
    - Se isto não for possível, faça j = j-1 e verifique novamente
- Selecione j variáveis de escala que não formem um Π entre si
- Acrescente uma variável adicional às j variáveis de escala e forme um produto de potência
- Escreva a função adimensional final

Exemplo: Força de arrasto sobre esfera lisa

Sabendo que a força de arrasto F sobre uma esfera lisa depende da velocidade relativa U, do diâmetro da esfera L, da densidade do fluido ρ e da viscosidade do fluido μ, obtenha um conjunto de grupos adimensionais a serem utilizados na análise de dados experimentais

1) $F = f(L, U, \rho, \mu) \longrightarrow (n = 5)$

2)

F	L	U	ρ	μ
$\{MLT^{-2}\}$	$\{L\}$	$\{LT^{-1}\}$	$\{ML^{-3}\}$	$\{ML^{-1}T^{-1}\}$

3) $j \leq 3$. Da lista vemos que U, L e ρ não formam um Π entre si (entre elas, só ρ possui M e só U possui T)

Exemplo: Força de arrasto sobre esfera lisa

Logo j=3 => k = n-j = 2

=> 2 grupos Π

4) U, L e ρ

5) $$\Pi_1 = L^a U^b \rho^c F = (L)^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c (\, MLT^{-2}) = M^0 L^0 T^0$$

$$\begin{aligned} a + b - 3c + 1 &= 0 \\ c + 1 &= 0 \\ -b \qquad -2 &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \quad a = -2 \qquad b = -2 \qquad c = -1$$

$$\Pi_1 = L^{-2} U^{-2} \rho^{-1} F = \frac{F}{\rho U^2 L^2} = C_F$$

Exemplo: Força de arrasto sobre esfera lisa

$$\Pi_2 = L^a U^b \rho^c \mu^{-1} = L^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c (ML^{-1}T^{-1})^{-1} = M^0 L^0 T^0$$

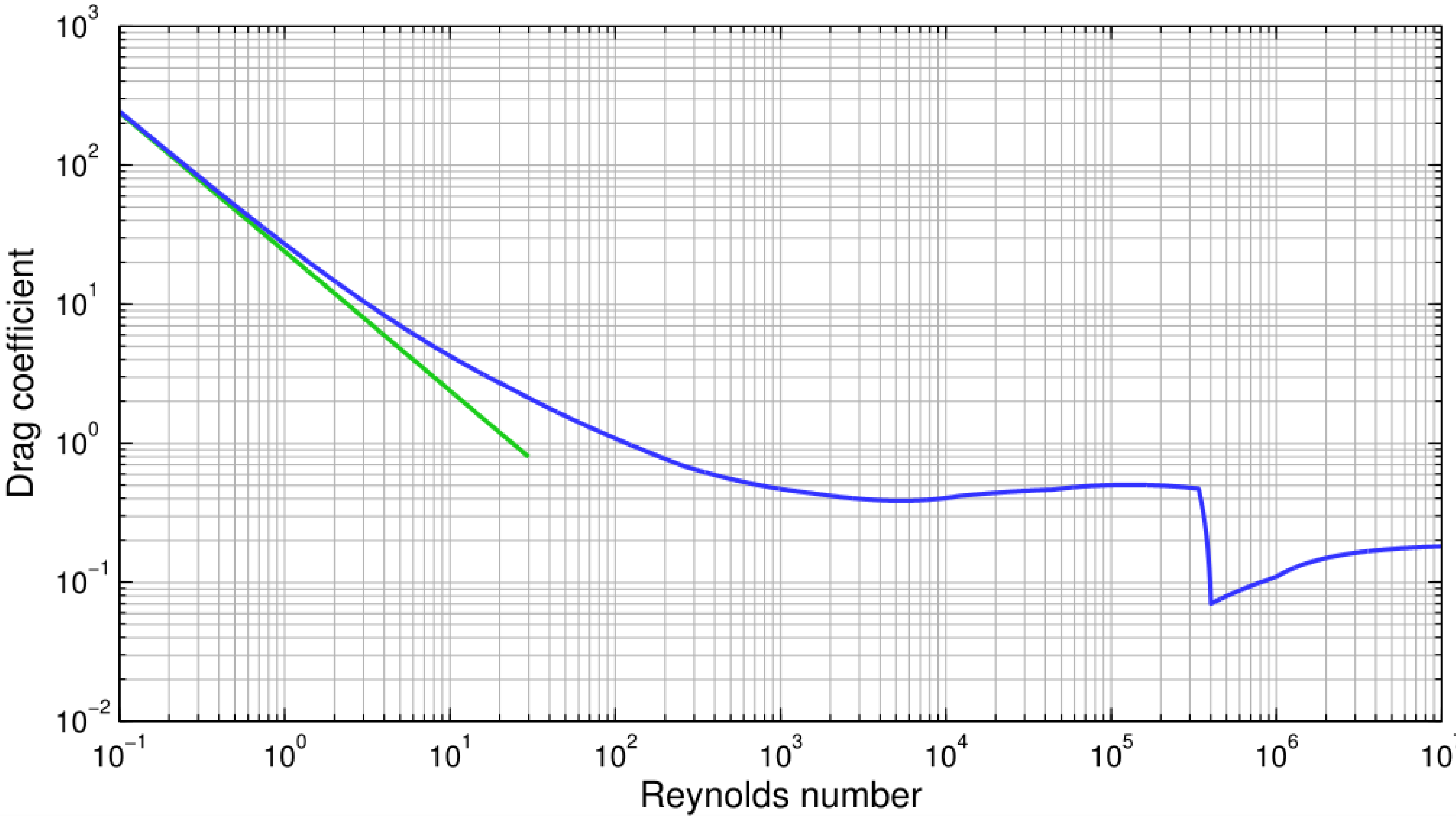
$$\begin{aligned} a + b - 3c + 1 &= 0 \\ c - 1 &= 0 \\ -b \qquad\quad + 1 &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \quad a = b = c = 1$$

$$\Pi_2 = L^1 U^1 \rho^1 \mu^{-1} = \frac{\rho U L}{\mu} = \mathrm{Re}$$

6) $$\frac{F}{\rho U^2 L^2} = g\left(\frac{\rho U L}{\mu}\right)$$

Exemplo: Força de arrasto sobre esfera lisa

- C_F = coeficiente de atrito = força sem dimensão
- Re = número de Reynolds = razão entre efeitos inerciais e efeitos viscosos
  - Quanto maior Re, maior o papel da inércia em relação oas efeitos viscosos, e vice-versa.
- Conclusão do exemplo: o coeficiente de atrito para o escoamento sobre uma esfera lisa é função do número de Reynolds
- OBS: o número de Reynolds é um grupo adimensional de muita importância em mecânica dos fluidos.
  - Está ligado, entre outras coisas, à identificação de escoamentos laminares e turbulentos.



Fonte: Wikipedia
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Smooth_sphere_drag_coefficient.svg#filelinks

Exemplo: bomba centrífuga

The power input P to a centrifugal pump is a function of the volume flow Q, impeller diameter D, rotational rate Ω, and the density ρ and viscosity μ of the fluid:

$$P = f(Q, D, \Omega, \rho, \mu)$$

Rewrite this as a dimensionless relationship. *Hint:* Use Ω, ρ, and D as repeating variables.

$$P = f(Q, D, \Omega, \rho, \mu) \longrightarrow n = 6$$

P	Q	D	Ω	ρ	μ
$\{FLT^{-1}\}$	$\{L^3T^{-1}\}$	$\{L\}$	$\{T^{-1}\}$	$\{FT^2L^{-4}\}$	$\{FTL^{-2}\}$

J = 3=> k = n-j = 3

=> 3 grupos Π

Exemplo: bomba centrífuga

$$\Pi_1 = \Omega^a \rho^b D^c P = (T^{-1})^a (FT^2L^{-4})^b (L)^c (FLT^{-1}) = F^0 L^0 T^0$$

$$\begin{aligned} b \qquad\quad + 1 &= 0 \\ -4b + c + 1 &= 0 \\ -a + 2b \qquad - 1 &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} a &= -3 \\ b &= -1 \\ c &= -5 \end{aligned}$$

$$\Pi_1 = \Omega^{-3} \rho^{-1} D^{-5} P = \frac{P}{\rho \Omega^3 D^5} = C_P$$

Exemplo: bomba centrífuga

$$\Pi_2 = \Omega^a \rho^b D^c Q = (T^{-1})^a (FT^2L^{-4})^b (L)^c (L^3T^{-1}) = F^0L^0T^0$$

$$a = -1 \qquad b = 0 \qquad c = -3$$

$$\Pi_2 = \Omega^{-1}\rho^0 D^{-3} Q = \frac{Q}{\Omega D^3} = C_Q$$

$$\Pi_3 = \Omega^a \rho^b D^c \mu = (T^{-1})^a (FT^2L^{-4})^b (L)^c (FTL^{-2}) = F^0L^0T^0$$

$$a = -1 \qquad b = -1 \qquad c = -2$$

$$\Pi_3 = \mu/(\rho\Omega D^2)$$

$$\frac{P}{\rho\Omega^3 D^5} = f\left(\frac{Q}{\Omega D^3}, \frac{\mu}{\rho\Omega D^2}\right)$$

Exemplo: bomba centrífuga

- C_P = coeficiente de potência = potência sem dimensão
- C_Q = coeficiente de vazão = vazão sem dimensão
- $\Pi_3 = 1/Re$

- A potência adimensional é função da vazão adimensional e do número de Reynolds.

Adimensionalização de equações básicas

- Ex: Equação diferencial da quantidade de movimento

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \boldsymbol{\nabla} p + \mu \nabla^2 \mathbf{V}$$

$$\mathbf{V}^* = \frac{\mathbf{V}}{U} \qquad \boldsymbol{\nabla}^* = L\boldsymbol{\nabla} \qquad x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L} \quad z^* = \frac{z}{L}$$

$$t^* = \frac{tU}{L} \qquad p^* = \frac{p + \rho g z}{\rho U^2}$$

$$\frac{d\mathbf{V}^*}{dt^*} = -\boldsymbol{\nabla}^* p^* + \frac{\mu}{\rho U L} \nabla^{*2}(\mathbf{V}^*)$$

1/Re

Números adimensionais comuns

- Da análise dimensional, aparecem diversos grupos adimensionais importantes em mecânica dos fluidos:

$$\text{Reynolds number Re} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

  - Efeitos inerciais/efeitos viscosos

$$\text{Euler number (pressure coefficient) Eu} = \frac{p_a}{\rho U^2}$$

  - Pressão sem dimensão

$$\text{Froude number Fr} = \frac{U^2}{gL}$$

  - Velocidade característica do fluido/velocidade de propagação de ondas de superfície

Números adimensionais comuns

$$\text{Weber number We} = \frac{\rho U^2 L}{\Upsilon}$$

- Forças inerciais / forças devidas à tensão superficial

$$\text{Mach number Ma} = \frac{U}{a}$$

- Velocidade do fluido / velocidade do som

- Etc. (ver tabela 5.2 do White)