Análise dimensional e semelhança (parte 1)

Ref: White F.M., Mecânica dos Fluidos, Panton, R.L., Incompressible Flow

Introdução

- Há muitos problemas cujas eqs. não conseguimos resolver completamente
- É necessário o uso de experimentos e simulações
- Para tanto, deve-se:
  - Organizar de forma sintética os resultados
    - Reduzir variáveis e agrupá-las
  - Relacionar os dados com a física do problema
  - Utilizar modelos reduzidos
    - E fazer a passagem modelo -> protótipo
    - Leis de transposição

Medidas e dimensões

- Duas classes de quantidades:
  - Contadas (sem dimensão)
    - Ex: número de moléculas
  - Medidas (com dimensão)
- Medição: comparação com escala conhecida (padrão)
  - Ex: comprimento -> régua, micrômetro, etc.
  - Massa (ou peso) -> balança
- Unidade: elemento essencial em qualquer medição
  - Por ex: não posso medir um comprimento sem antes definir o que é m, ft, in, anos-luz, etc.

Medidas e dimensões

- Unidades diferentes podem ser convertidas
  - Ex: comprimento

$$\underset{\substack{\text{size of}\\ \text{variable}\\ \text{in terms of}\\ \text{new measuring}\\ \text{scale}}}{\hat{\ell}} \quad = \quad \underset{\substack{\text{size of}\\ \text{variable}\\ \text{in terms of}\\ \text{old measuring}\\ \text{scale}}}{\ell} \quad \times \quad \underset{\substack{\text{ratio of}\\ \text{size of}\\ \text{new}\\ \text{unit to}\\ \text{old unit}}}{L}$$

- Dimensões primárias
  - M, L, T, θ
  - F, L, T, θ

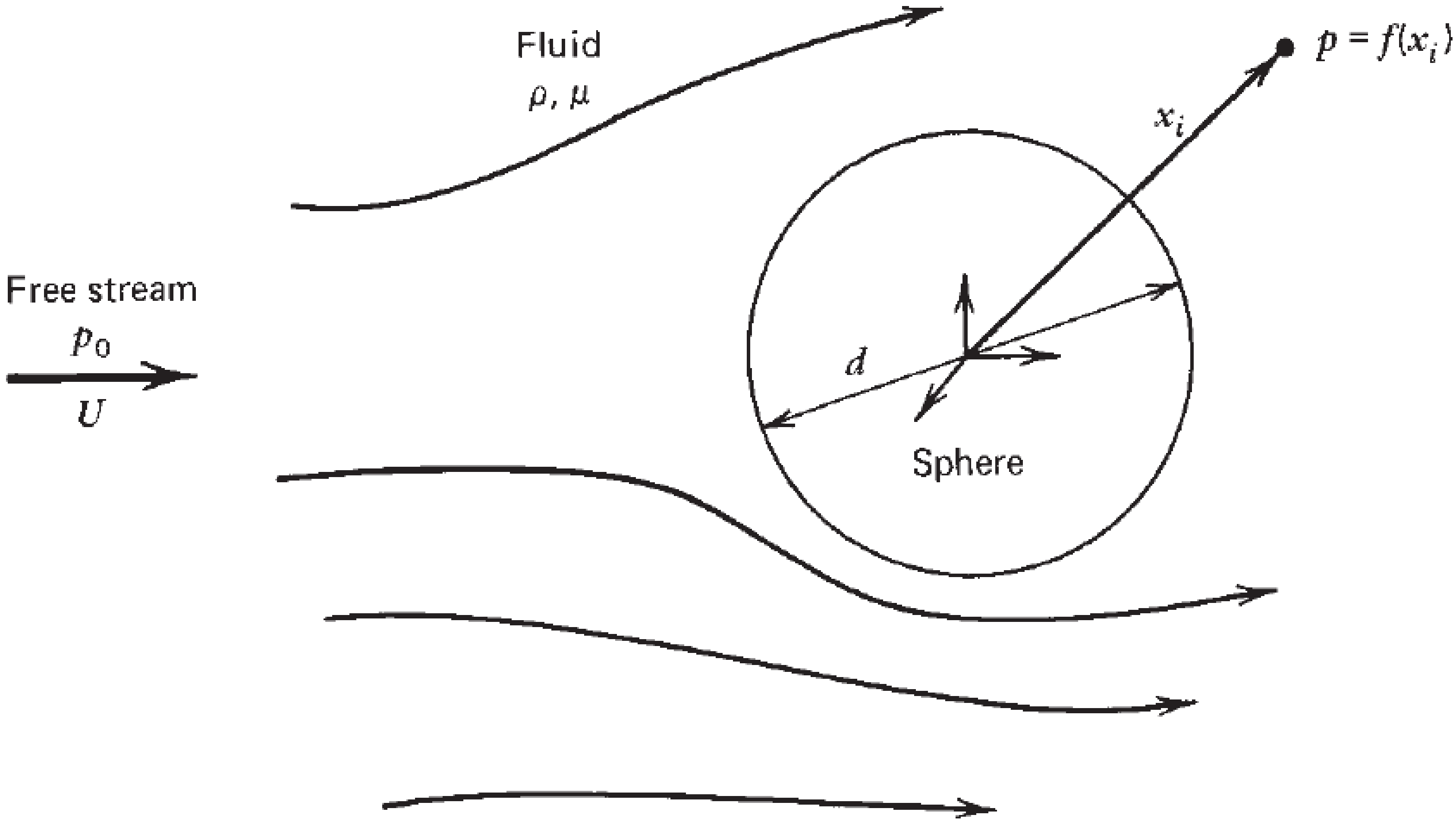
Variáveis e funções

- Relações entre variáveis físicas são expressas como funções matemáticas
- Funções matemáticas: relacionam variáveis dependentes à variáveis independentes
- Equações Físicas: também contém constantes
  - Constantes: têm origem nas cond. contorno, dados termodinâmicos ou manipulações matemáticas
- Por ex: para a pressão P em torno de uma esfera

$$p = f(\mathbf{x}, U, \rho, \mu, d, p_\infty)$$

Variáveis e funções

$$p = f(\mathbf{x}, U, \rho, \mu, d, p_\infty)$$



Análise dimensional

- Reagrupa diversas variáveis para formar uma nova variável sem dimensão
  - Busca uma relação funcional universalmente válida
  - Lei universal
- Por ex., observando que ρU^2tem dimensão de pressão:

$$\Pi \equiv \frac{p}{\rho U^2}$$

  - Que é uma pressão adimensional
  - ρU^2é uma escala natural de pressão (escala característica)
- OBS: a escala característica varia de acordo com o caso
  - Nem sempre ρU^2é a escala característica de pressão

Análise dimensional

- Se ρU^2é a escala natural

$$\Pi \equiv \frac{p}{\rho U^2} = \frac{1}{\rho U^2} f(\mathbf{x}, U, \rho, \mu, d, p_\infty)$$

- E, utilizando o teorema Pi (que veremos a seguir):

$$\frac{p}{\rho U^2} = F\left(\frac{\mathbf{x}}{d}, \frac{\rho\, dU}{\mu}, \frac{p_\infty}{\rho U^2}\right)$$

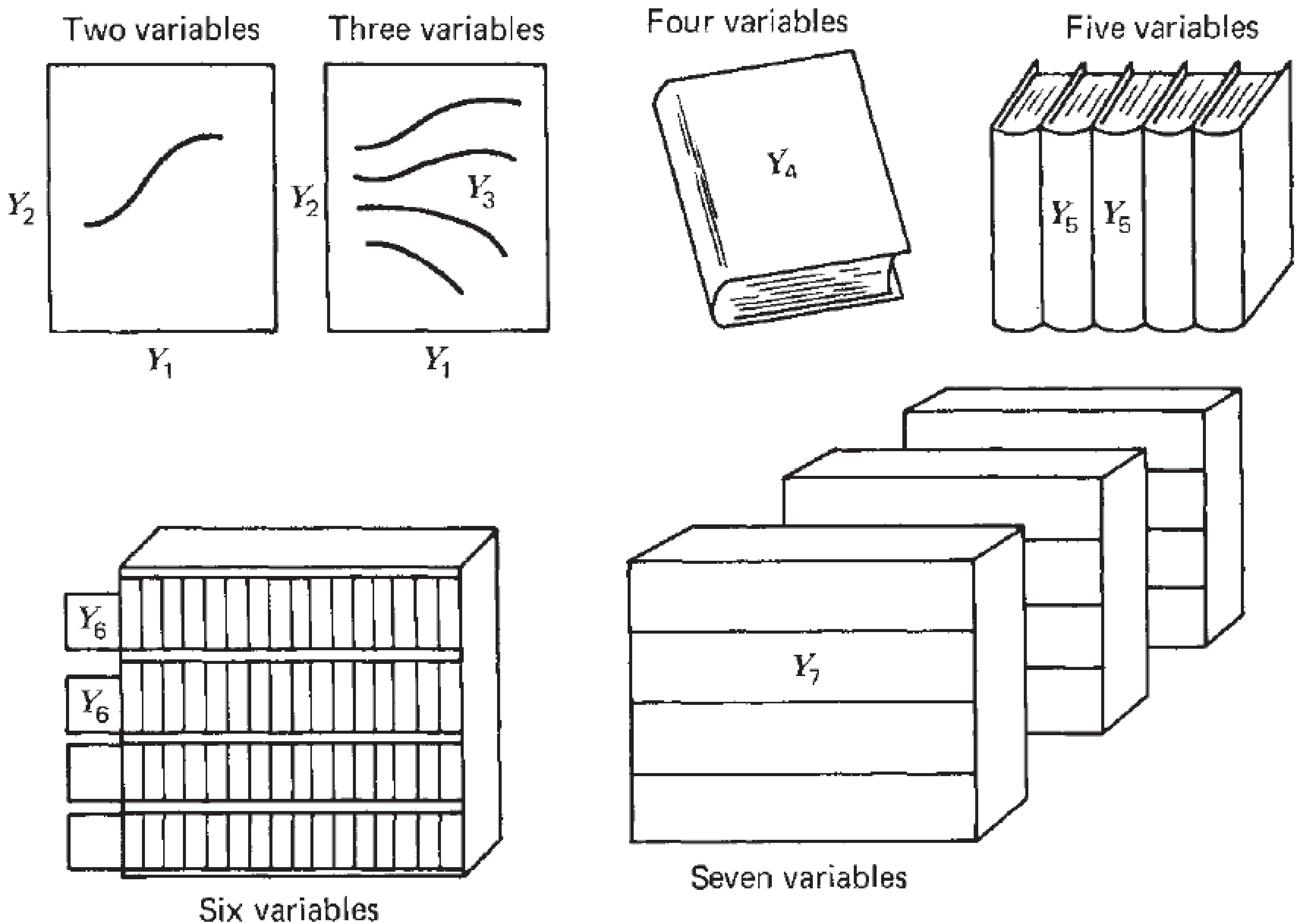
- E ainda, se estivermos interessados na pressão em locais específicos (na superfície da esfera, p. ex.):

$$\frac{p}{\rho U^2} = F\left(\frac{\rho\, dU}{\mu}, \frac{p_\infty}{\rho U^2}\right)$$

Análise dimensional

$$\frac{p}{\rho U^2} = F\left(\frac{\rho\, dU}{\mu}, \frac{p_\infty}{\rho U^2}\right)$$

- Esta Eq. possui 3 variáveis (in invés das 7 da Eq. original)
- Redução do número de variáveis:
  - Economia no tratamento dos dados
  - Leis físicas mais facilmente compreendidas
- Relação adimensional
  - Lei universal
  - Leis de transposição
- A racionalização obtida é esquematizada no slide a seguir para a armazenagem de dados


Two variables
Three variables
Four variables
Five variables
Y_2
Y_1
Y_2
Y_3
Y_1
Y_4
Y_5
Y_5
Y_6
Y_6
Six variables
Y_7
Seven variables

Racionalização: ensaios

- Suponha que para o tratamento adequados dos dados sejam necessários 5 pontos de cada variável
  - Para $$p = f(\mathbf{x}, U, \rho, \mu, d, p_\infty)$$

  serão necessários $5^6 = 15625$ ensaios

  - Para $$\frac{p}{\rho U^2} = F\left(\frac{\rho\, dU}{\mu}, \frac{p_\infty}{\rho U^2}\right)$$

  serão necessários $5^2 = 25$ ensaios

- Não precisamos variar de forma independente os parâmetros dimensionais: podemos variar de forma independente os grupos adimensionais

Princípio da homogeneidade dimensional

- Uma equação com base física deve ser "dimensionalmente homogênea": os termos aditivos devem ter a mesma dimensão.
  - Ex: A equação abaixo é a Eq. da energia em RP e com 2 portas, em unidades de comprimento.
  - Isto é: todos os termos aditivos têm unidade de comprimento.

$$\frac{w_{shaft}}{g} = \left(\frac{V_I^2}{2g} + z + \frac{P}{\rho g}\right)_{IN} - \left(\frac{V_I^2}{2g} + z + \frac{P}{\rho g}\right)_{OUT} - h_{irr}$$

Variáveis e constantes

- As Equações dimensionais possuem:
  - Variáveis dimensionais
    - Variam em dado caso
  - Constantes dimensionais
    - Podem variar caso a caso, mas são constantes para dado caso
  - Constantes puras
    - Não têm dimensão
    - São oriundas e manipulações matemáticas
  - Ex: $S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$
    - S e t => variáveis dimensionais
    - S_0, V_0 e g => constantes dimensionais
    - 1 e 1/2 => constantes puras
      - OBS: 1/2 vem da integração duas vezes sobre g

Variáveis e parâmetros de escala

- Parâmetros de escala
  - Utilizados na definição de variáveis adimensionais
- Parâmetro básico
  - Demais parâmetros cujos efeitos desejamos mostrar
- OBS: há “ambiguidade” na escolha
  - A escolha irá afetar a apresentação dos dados (mas não o conteúdo)
  - Para mostrar um efeito particular, devemos fazer uma escolha adequada.

- Um exemplo de escolha de parâmetros é apresentado no próximo slide

Exemplo: corpo em queda livre

$$S = S_0 + V_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2$$

- Parâmetros: S_0, V_0 e g

- Opção 1: mostrar o efeito da gravidade
  - Parâmetros de escala S_0 e V_0
  - Parâmetro básico: g
    - Fazemos

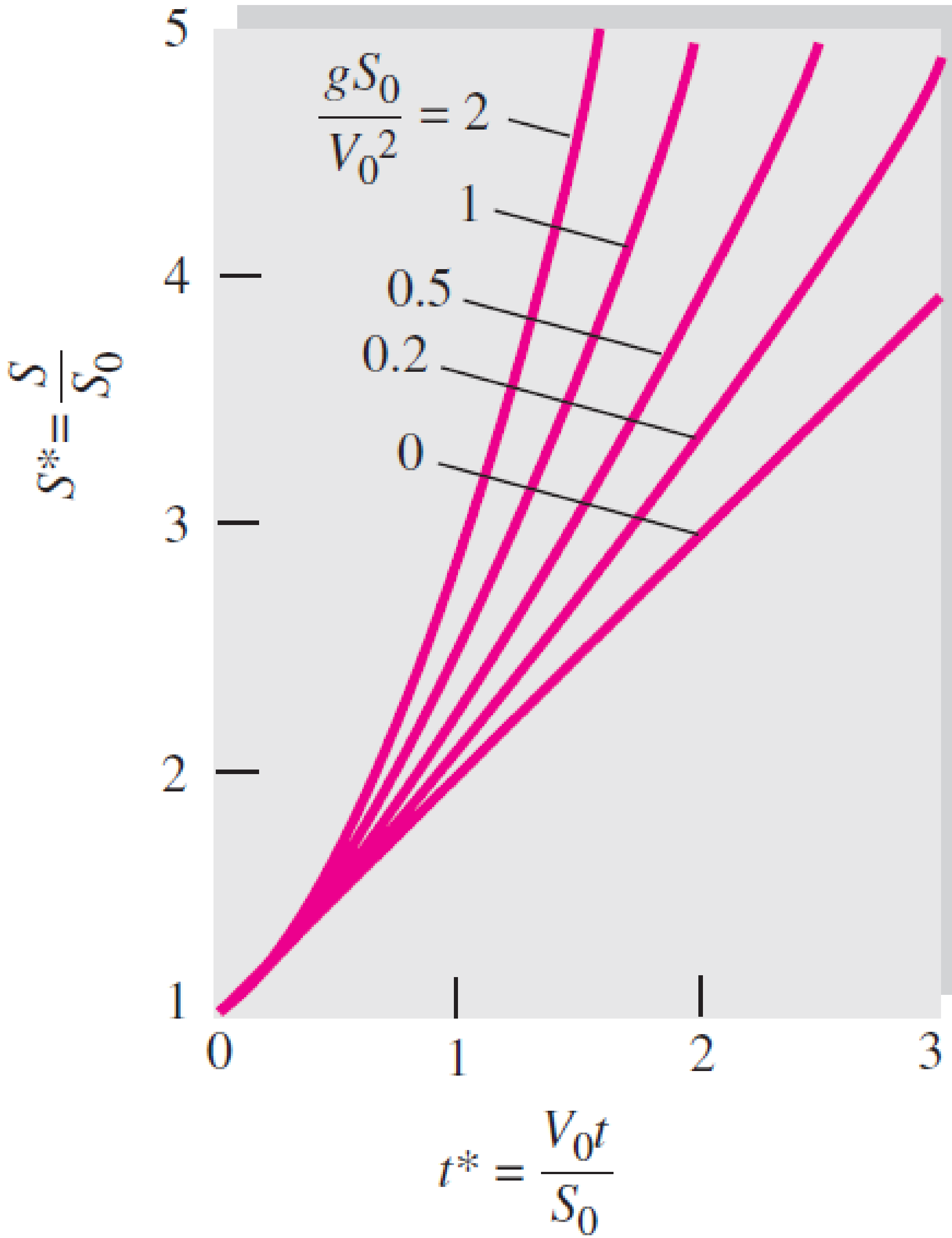
$$S^* = \frac{S}{S_0} \qquad t^* = \frac{V_0 t}{S_0}$$

    - Inserindo na Eq.:

$$S^* = 1 + t^* + \frac{1}{2}\alpha t^{*2} \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{g S_0}{V_0^2}$$

Efeito de g

- Vemos como a taxa de queda parabólica varia com a gravidade



Exemplo: corpo em queda livre

$$S = S_0 + V_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2$$

- Opção 2: mostrar o efeito do deslocamento inicial
  - Parâmetros de escala: V_0 e g
  - Parâmetro básico: S_0
    - Fazemos

$$S^{**} = \frac{Sg}{V_0^2} \qquad t^{**} = t\frac{g}{V_0}$$

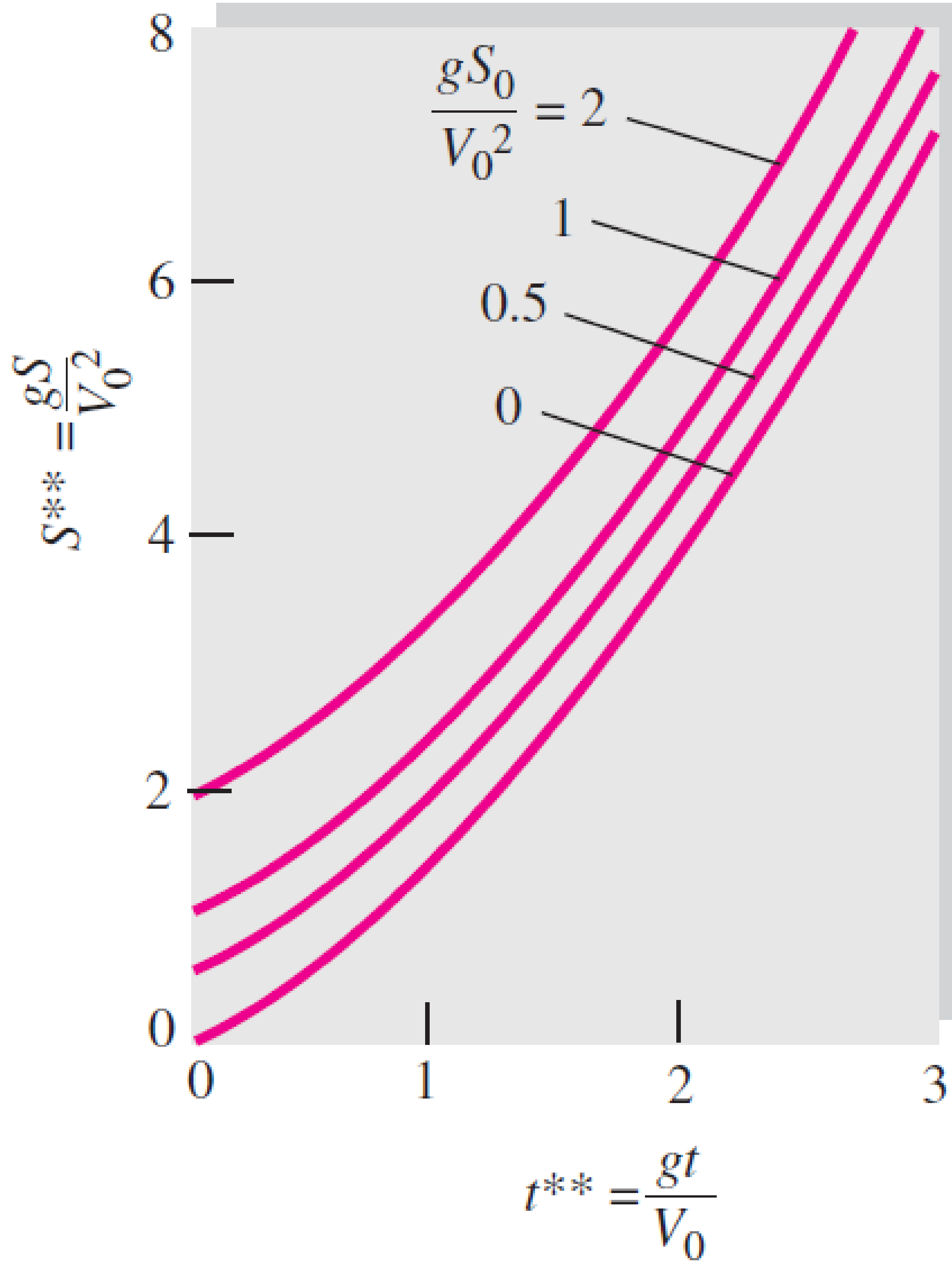
    - Inserindo na Eq.:

$$S^{**} = \alpha + t^{**} + \frac{1}{2} t^{**2}$$

onde $\alpha = \dfrac{g S_0}{V_0^2}$

Efeito de S_0

- Vemos que simplesmente as curvas são deslocadas, sem variação em sua forma



Exemplo: corpo em queda livre

$$S = S_0 + V_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2$$

- Opção 3: mostrar o efeito da velocidade inicial
  - Parâmetros de escala: S_0 e g
  - Parâmetro básico: V_0
    - Fazemos

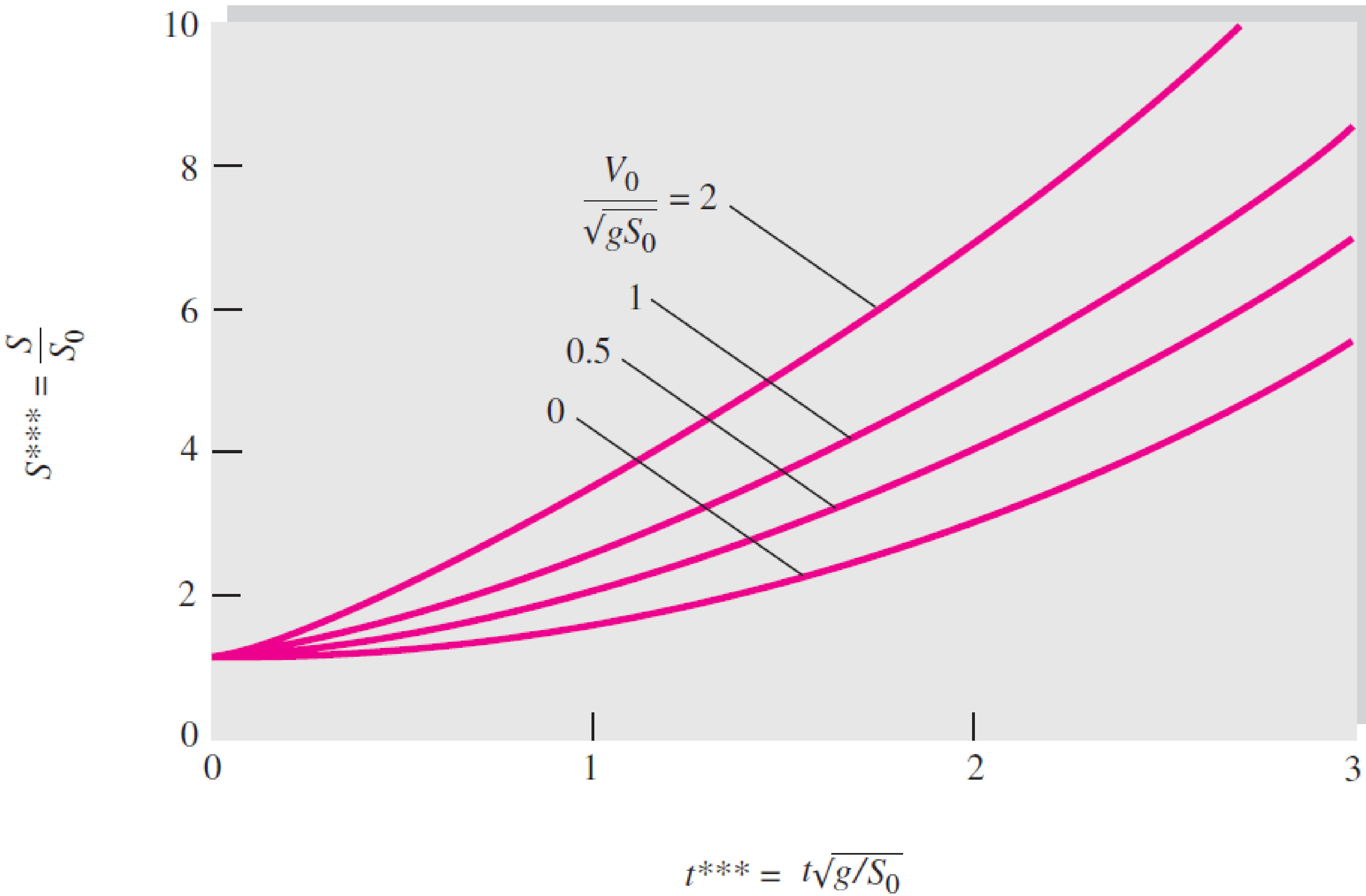
$$S^{***} = \frac{S}{S_0} \qquad t^{***} = t\left(\frac{g}{S_0}\right)^{1/2}$$

    - Inserindo na Eq.:

$$S^{***} = 1 + \beta t^{***} + \frac{1}{2} t^{***2}$$ onde $$\beta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{V_0}{\sqrt{g S_0}}$$

Efeito de S_0

- Vemos que simplesmente a velocidade de queda aumenta com V_0



Observação 1 do exemplo anterior

- O problema original envolve 5 grandezas
  - $S = f(S_0, V_0, g, t)$
- O problema adimensional envolve apenas 3 grandezas
  - $S^* = f(t^*, \alpha)$
- 5-3=2 = número e dimensões fundamentais envolvidas (L e T)
  - Esta é a ideia para o Teorema Pi

Observação 2 do exemplo anterior

- A escolha de variáveis de escala é feita caso a caso
- Grupos adimensionais resultantes têm diferentes interpretações